# Archiv der Mathematik und Physik


HARVARDINAE
ACADEMIAE
SIGILL
IN NOV ANG
CHRISTO
ECCLESIAE
ET
VE
RI
TAS

1889, July 20 - 1890, March 3.
Haven fund.

# Inhalts-Verzeichnis

## des achten Teils.

| № der Abhandlung. | | Heft. | Seite |
|---|---|---|---|

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

## Geometrie der Ebene.



## Geometrie des Raumes.

## Mechanik.



## Erd- und Himmelskunde.



## Litterarische Berichte.

(Bull. XVI.) Fac. de Toul. (Ann. II.) Versl. en Meded. (III. IV.)

XXX. Kaiser (neu. Geom.) Schoenflies (Geom. d. Bew.) Reye (G. d. Lage). Peschka (Persp.) Willig (Kegelschn.) Dorst (Kreiswkl.) Waege (Netze). Vonderlinn (darst. G.) Brill (Mod.) Katzer (Kryst.) Bieler (Mech.) Land (Trägh.) Samuelson (Dampfexp.) Stokes (Licht). Pabst (Opt.) Linc. (Rend. IV.) Mittag-Leffler (A. M. VIII.)

XXXI. Reiff (Gesch. un. Rh.) Curtze (Jord. Nem.) Böklen (Hist. im Unt.) Helm (Energ.) Harms (Rech.) Schram (Jd.) Fr. Meyer (Unendl.) Krumme (anal. G.) Newcomb (Am. J. XI.) Mittag-Leffler (A. M. XII.)

XXXII. Schram u. Schüssler (Vorsch.) Otto u. Diesener (nied. M.) Kleyer (Encykl.) Köstler (eb. G.) Rottok (Plan. — Ster.) Wallentin (Naturl. — Phys.) Recknagel (Mech.) Meissel (Taf. Bess. F.) Ligowski (Taf. Hyp. F.) Bassot (5 u. 4 st. Log.) Blater (Taf. Quadr.) Versl. en Meded. V.

## Berichtigungen
### im VIII. Teile.

| Seite | Zeile | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 3 v. u. | statt | Bestimmung | setze | Restbestimmung |
| 211 | 3 v. ob. | „ | $n$ | „ | $a$ |
| | 11 „ „ | streiche man | | | |
| | 15 „ „ | statt | $g$ | setze | $q$ |
| 212 | 7 „ „ | „ | Zahlen | „ | Primzahlen |
| | 12 „ „ | „ | $x^4$ | „ | $y^4$ |
| 213 | 3 u. 2 v. u. | „ | $a$ | „ | $\alpha$ |
| 218 | 10 v. ob. | „ | $\delta_2$ | „ | $\delta_1$ |
| 220 | 2 v. u. | „ | $q$ | „ | $g$ (zweimal) |
| 320 | 3 v. ob. | „ | $x^5$ | „ | $x^4$ |
| | 12 „ „ | „ | $x^8$ | „ | $x^3$ |

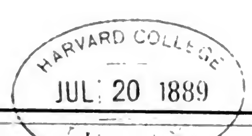
Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker. 105. Bd. (4 Hfte.) 1. u. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. prcplt. 12 Mk.

Kleyer, A., Encyklopädie der gesammten mathematischen, technischen u. exacten Naturwissenschaften. 36. Lfg. Stuttgart, Maier. 1 Mk.

Prometheus. Illustrirte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. O. N. Witt. 1. Jahrg. 1889/90. Nr. 1. Berlin, Mückenberger. Vierteljährl. 3 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 1889. 2. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abtheilg. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 98. Bd. 1. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 50 Pf.




# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

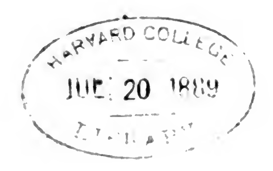
Zweite Reihe.

Achter Teil. Erstes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1889.




I.

# Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte und des geraden Kreiskegels.

Von

**F. Ruth**
in Leoben.

(Mit einer Tafel.)

---

1) In der vorliegenden Abhandlung sollen die Eigenschaften der die Asymptoten eines Kegelschnittes berührenden Kreise erörtert werden, wodurch wir einerseits zu einer Definition der Scheitelkreise als Einhüllende gewisser Geraden gelangen, andererseits zu gewissen Constructionen, teils die Kegelschnitte selbst, teils die Bestimmung des Schnittes derselben mit zu den Hauptaxen parallelen Geraden u. s. w. betreffend, die, wenngleich sie, was Einfachheit anlangt, durch manche der schon bekannten übertroffen werden, immerhin als Beiträge zur Vervollständigung der Theorie der Hyperbel und Ellipse von einigem Interesse sein dürften. Die Hyperbel besitzt zwei reelle, die Ellipse zwei imaginäre Asymptoten, die Doppelstrahlen ihrer Durchmesserinvolutionen; als Grenzfall zwischen beiden tritt die Parabel auf, bei welcher die beiden Asymptoten mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene zusammenfallen, daher man bei der Parabel von Kreisen, die die Asymptoten berühren, nicht sprechen kann, und die im Nachfolgenden erhaltenen und besprochenen Resultate sich nur auf die Ellipse und Hyperbel beziehen.

Wir gelangen zuerst ganz allgemein durch Betrachtung einer gemischten Kegelschnittschaar, bestimmt durch zwei Punkte und zwei Tangenten (jener Schaar, die sich selbst dual ist), zu einem

Satze, durch dessen Specialisirung sich die fraglichen Eigenschaften ergeben; denn die Kreise einer Ebene gehen alle durch dieselben zwei unendlich fernen imaginären Punkte, und jene davon, welche zwei gegebene Gerade berühren, bilden eine specielle Art einer solchen Kegelschnittschaar. Wir werden dann aber noch einen andern directen und elementaren Weg der Ableitung einschlagen, der nur die Kenntniss gewisser einfacher Relationen zweier Kreise voraussetzt, und schliesslich einige Uebertragungen in den Raum machen.

2) Bekanntlich sondern sich die Kegelschnitte durch zwei feste Punkte $I$ und $II$ auf $s$ (Fig. 1.) berührend an zwei Gerade $t$ und $t_1$ durch $S$, derart in zwei Gruppen, dass die Polaren von $S$ (Berührungssehnen mit $t$ und $t_1$) durch einen von 2 festen Punkten $P$ oder $Q$ gehen [1]), die so auf der Geraden $s$ liegen, dass sie sowol $I$ und $II$, als auch $t$ und $t_1$ harmonisch trennen; die Pole der gemeinsamen Secante $s$ liegen auf einer von zwei Geraden $p$ oder $q$, die durch $S$ gehen und ebenfalls $I$ und $II$, und $t$ und $t_1$ harmonisch trennen, also durch $P$ und $Q$ gehen.

Betrachten wir jetzt die eine Gruppe der Kegelschnitte des Systemes, z. B. die, für welche die Polaren von $s$ durch $P$ gehen, und bezeichnen wir einen beliebigen Kegelschnitt dieser Gruppe mit $P_i^2$.

„Legt man einen Kegelschnitt $K^2$ beliebig, der $SI$ und $SII$ in „den Punkten $I$ und $II$ berührt, und legt man an diesen und jeden „Kegelschnitt $P_i^2$ der Gruppe $P$ die gemeinsamen Tangenten, so „liegen die auf den $P_i^2$ befindlichen Berührungspunkte 1, 2, 3, 4 „derselben alle auf einem neuen Kegelschnitte $K^{*2}$, welcher $t$ und $t_1$ „in den auf $s$ gelegenen Punkten $T$ und $T_1$ berührt, und den Kegel„schnitt $K^2$ in den auf $p$ gelegenen Punkten doppelt berührt.“

„Wählt man umgekehrt einen Kegelschnitt $K^{*2}$ beliebig, der „jedoch die gegebenen Geraden $t$ und $t_1$ in den auf $s$ gelegenen „Punkten $T$ und $T_1$ berührt, so schneidet dieser die Kegelschnitte „$P_i^2$ der Gruppe $P$ in Punkten derart, dass die Tangenten in diesen „an die Kegelschnitte $P_i^2$ einen neuen Kegelschnitt $K^2$ umhüllen, „welcher $K^{*2}$ in den auf $p$ gelegenen Punkten doppelt und die Ge„raden $SI$ und $SII$ in den Punkten $I$ und $II$ resp. berührt.“

Zum Beweise des Vorstehenden betrachten wir in Fig. 1. $K^2$ und $P_i^2$, zwei Kegelschnitte mit den auf $s$ und $s_1$ gelegenen gemeinsamen Punkten $I$, $II$, $III$ und $IV$, welche $C$ und $C_1$ als gemeinsame auf $p$ befindliche Contingenzpunkte besitzen. Sind $S$ und $\Sigma$ die Pole

1) Siehe Schröter: Theorie der Kegelschnitte. 2te Aufl. p. 3?2. und H. Pfaff, Neuere Geometrie II. Thl. p. 176. u. s. f.

von $s$ bezüglich $K^2$ und $P_i^2$, so bilden die von $I$ nach $C$, $C_1$, $S$ und $\Sigma$ gezogenen Geraden vier harmonische Strahlen, da ja $IS$ und $I\Sigma$ die Doppelstrahlen der in $I$ durch die Kegelschnitte der Schaar $K^2P_i^2$ bestimmten Involution sind, in der $IC$ und $IC_1$ ein Paar bilden. $S$, $\Sigma$ und $CC_1$ sind somit zwei Paare harmonisch conjugirter Punkte auf $p$ und ihre Polaren $\sigma s$ $cc_1$ bezüglich $P_i^2$ werden 4 harmonische Strahlen durch $P$ bilden. ($\sigma$ die Polare von $S$, $s$ die Polare von $\Sigma$ bez. $P_i^2$).

Dasselbe findet bezüglich $S_1$ und $\Sigma_1$ den Polen von $s_1$ hinsichtlich $K^2$ und $P_i^2$ und Polaren in Bezug auf $P_i^2$ statt, so dass $\sigma_1$ $s_1$ $cc_1$ wieder 4 harmonische Strahlen durch $P$ bilden.

$K^2$ und $P_i^2$ haben gemeinsame Tangenten und die Berührungspunkte 1, 2, 3, 4 auf $P_i^2$ liegen auf $c$ und $c_1$ und geben diese bekanntlich dasselbe Poldreieck $POR$ wie die Punkte $I$, $II$, $III$ und $IV$. Legen wir jetzt aus $S$ die Tangenten $t$ und $t_1$ an $P_i^2$ und bringen wir sie zum Schnitt mit $s$ und ebenso aus $S_1$ die Tangenten $\tau$ und $\tau_1$ und bringen sie zum Schnitt mis $s_1$, so erhalten wir 4 auf $s$ und $s_1$ (und $t$ $t_1$ und $\tau$ und $\tau_1$ resp.) gelegene Punkte, die ebenfalls $POR$ als Poldreieck haben, wie sich leicht ergibt[1]). Diese 4 Punkte müssen nun einem bekannten Satze zufolge mit den Punkten 1, 2, 3, 4 auf einem und demselben Kegelschnitte liegen — $K^{*2}$. —

Da aber früher gezeigt wurde, dass $(s\sigma cc_1) = -1$, so sind $t$ und $t_1$ Tangenten in den Punkten $T$ und $T_1$ an $K^{*2}$, denn $K^{*2}$ ist der ausser $P_i^2$ noch durch 1, 2, 3, 4 gehende Kegelschnitt der $t$ berührt, und muss der Berührungspunkt von jenem mit $P_i^2$ durch $c$ und $c_1$ harmonisch getrennt sein, was mit $T$ wegen $(s\sigma cc_1) = -1$ der Fall ist.

Aehnliches lässt sich für $\tau$ und $\tau_1$ sagen. Zur weiteren Bestimmung von $K^{*2}$ suchen wir die Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit $p$; da $S$ und $s$ sowol als auch $S_1$ und $s_1$ Pol und Polare nicht nur in Bezug auf $K^2$, sondern auch hinsichtlich $K^{*2}$ sind, so berühren sich $K^{*2}$ und $K^2$ in den auf $p$ gelegenen Punkten $A$ und $A_1$ doppelt, $K^2$ und $K^{*2}$ sind also doppelt berührende Kegelschnitte mit $P$ und $p$ als gemeinsamem Pol und Polare.

---

1) Legt man aus 2 Punkten einer Seite des gemeinsamen Poldreiecks eines Kegelschnittbüschels die von den Ecken des Poldreiecks harmonisch getrennt werden, Tangenten an irgend einen Kegelschnitt des Büschels, so treffen diese die durch die dritte Ecke des Poldreiecks gehenden gemeinsamen Secanten zweimal in 4 Punkten, die dasselbe Poldreieck, das des Büschels geben.

Wenn wir jetzt $K^2$ ungeändert lassen und den Kegelschnitt $P_i^2$ derart ändern, dass er jederzeit durch die zwei festen Punkte $I$ und $II$ geht und die ebenfalls festen Geraden $t$ und $t_1$ berührt (so dass die Berührungssehne durch $P$ geht) und an jeden dieser Kegelschnitte $P_i^2$ und an $K^2$ die gemeinsamen Tangenten legen, so liegen jedesmal die auf $P_i^2$ befindlichen Berührungspunkte mit $TT$, $T_1T_1$, $AA$, $A_1A_1$ u. s. w. auf demselben Kegelschnitte, der durch die soeben aufgezählten Bestimmungsstücke schon bestimmt und mit dem Kegelschnitte $K^{*2}$ identisch ist, wodurch der angeführte Satz bewiesen erscheint.

Es ist wol nicht notwendig, den Beweis besonders zu führen für den Fall, dass die festen Punkte $I$ und $II$ oder die Geraden $t$ und $t_1$, oder beide Paare Bestimmungselemente der Schaar imaginär sind, ebenso darf hier von dem Beweise des zweiten Teiles, wo $K^{*2}$ gewählt wird, Umgang genommen werden.

3) An das Vorhergehende lassen sich noch unmittelbar folgende ergänzende Bemerkungen anreihen:

a) Auf $K^{*2}$ liegen noch jederzeit die Schnittpunkte der zweiten durch $P$ gehenden $K^2$ und $P_i^2$ gemeinsamen Secante $s_1$ mit den Tangenten an $P_i^2$ aus dem Pole $S_1$ der Secante $s_1$ in Bezug auf $K^2$; diese Tangenten an $P_i^2$ sind zugleich auch Tangenten an $K^{*2}$.

b) Da es noch einen zweiten Kegelschnitt $P_i^{2\prime}$ gibt, der mit $P_i^2$ ausser $I$, $II$ noch dieselbe zweite Secante $s_1$ mit $K^2$ gemeinsam hat, so erscheint $K^{*2}$ auch als die einhüllende Curve der ausser $t$ und $t_1$ noch vorhandenen gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittspaare $P_i^2$ und $P_i^{2\prime}$ der Gruppe $P$, die sich auf $K^2$ ausser in $I$ und $II$ noch in denselben zwei Punkten schneiden; auf der zweiten noch gemeinsamen Secante $s_1$ liegen auch die Punkte von $K^{*2}$.

Zur näheren Orientirung über die Paare $P_i^2$ und $P_i^{2\prime}$ dient die leicht zu erweisende Bemerkung, dass ihre Berührungspunkte auf $t$ (also auch auf $t_1$) Paare einer Involution bilden, deren Doppelpunkte auf $K^{*2}$ liegen.

Die in a) und b) angeführten Ergänzungen lassen sich auch leicht bezüglich der Fassung des zweiten Teiles des Satzes formuliren, was aber hier nicht weiter verfolgt werden soll.

4) Bevor wir auf einige Specialisirungen übergehen, wollen wir noch die zweite Gruppe des Systemes der Kegelschnitte ($I$, $II$, $t$, $t_1$)

in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Es ergibt sich für diese Gruppe, welche $Q$ und $q$ als Convergenzpunkt der Polaren von $S$ resp. als Ort der Pole von $s$ bezüglich der $Q_i^2$, wie wir einen Repräsentanten dieser Gruppe bezeichnen wollen, haben, dass, wenn wir $K^2$ von früher festhalten, und an $K^2$ und jeden Kegelschnitt $Q_i^2$ die gemeinsamen Tangenten legen, die auf $Q_i^2$ befindlichen Berührungspunkte auf einem neuen Kegelschnitte, $K_q^2$ wollen wir ihn bezeichnen, liegen der ebenfalls $t$ und $t_1$ in den Punkten $T$ und $T_1$ berührt und $K^2$ in den auf $q$ gelegenen Punkten doppelt berührt. Betrachtet man also beide Gruppen $P_i^2$ und $Q_i^2$ der Kegelschnitte des Systemes, so folgen für jeden beliebig gewählten Kegelschnitt $K^2$ in der angegebenen Weise zwei Kegelschnitte $K_p^2$ und $K_q^2$, die sich in $T$ und $T_1$ doppelt berühren, und deren jeder $K^2$ doppelt berührt ersterer mit $p$, letzterer mit $q$ als Berührungssehne.

Wenn wir hingegen $K^{*2}$ festhalten, und diesen Kegelschnitt mit den Kegelschnitten $Q_i^2$ der zweiten Gruppe zum Schnitt bringen, in den Schnittpunkten an diese Kegelschnitte die Tangenten legen, so umhüllen diese einen neuen Kegelschnitt $K_q^2$, welcher $SI$ und $SII$ in $I$ und $II$ berührt, und $K^{*2}$ doppelt berührt mit $q$ als Berührungssehne. $K_p^2$ für die Gruppe $Q_i^2$ und der demselben Kegelschnitt $K^{*2}$ zukommende Kegelschnitt für die Gruppe $Q_i^2$ berühren sich doppelt in den Punkten $I$ und $II$ mit $SI$ und $SII$ als Tangenten in diesen, und jeder berührt $K^{*2}$ doppelt, ersterer in den Schnittpunkten mit $p$, letzterer in jenen mit $q$.

Wir erhalten also aus beiden Gruppen von Kegelschnitten $P_i^2$ und $Q_i^2$ denselben Kegelschnitt $K^{*2}$, wenn wir die erste Gruppe mit $K_p^2$, die zweite Gruppe mit $K_q^2$ in der angegebenen Weise in Beziehung bringen u. s. w.

Die in 3) gemachten Zusätze lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten auch für den Fall dass wir die zweite Gruppe von Kegelschnitten benutzen ausdrücken, was jedoch für den allgemeinen Fall hier nicht geschehen soll; nur mit Bezug auf die in den späteren Ausführungen folgenden Specialisirungen sei hierauf aufmerksam gemacht.

5) Gehen wir auf die Specialisirungen dieses allgemeinen Satzes und seiner Zusätze über, so ergibt sich:

a) Ein System von Kegelschnitten durch 2 feste Punkte, welches einen gemeinsamen Brennpunkt besitzt, werde mit einem Kegelschnitte geschnitten, der denselben Brennpunkt und die Verbindungslinie der festen Punkte zur zugehörigen Leitlinie hat.

Legt man in den Schnittpunkten an die Kegelschnitte des Systemes die Tangenten, so umhüllen diese einen von zwei Kegelschnitten, die sich in den festen Punkten berühren, in diesen die Verbindungslinien mit dem gemeinsamen Brennpunkt zu Tangenten haben, und welche den angenommenen Kegelschnitt doppelt berühren, und:

b) Hat man ein System von Kegelschnitten durch 2 feste Punkte, welches einen Brennpunkt gemeinsam hat, und legt man an diese und an einen Kegelschnitt der die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den beiden festen Punkten in diesen berührt die gemeinsamen Tangenten, so liegen die Berührungspunkte (ausser auf dem angenommenen) auf einem von zwei neuen Kegelschnitten, der ebenfalls den gemeinsamen Brennpunkt zum Brennpunkt hat, und dessen zu diesem gehörige Leitlinie die Verbindungslinie der beiden festen Punkte ist.

Sind die beiden festen gemeinsamen Punkte unendlich fern, so erhält man:

c) Bringt man ein System von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt mit einem mit dem Brennpunkt concentrischen Kreise zum Schnitt, und legt in den Schnittpunkten desselben mit den Kegelschnitten an diese die Tangenten, so umhüllen diese einen von zwei Kegelschnitten, welche den Kreis doppelt berühren, und die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den festen $\infty$ fernen Punkten zu Asymptoten (reell o. imag.) haben.

oder:

d) Legt man an ein System von ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkte und einen beliebigen andern Kegelschnitt, der die Verbindungslinien des gemeinsamen Brennpunktes mit den allen Kegelschnitten gemeinsamen Punkten zu Asymptoten hat, die gemeinsamen Tangenten, so liegen die Berührungspunkte derselben auf einem von zwei Kreisen, die mit dem gemeinsamen Brennpunkt concentrisch sind [1]).

1) Diese sind die beiden Scheitelkreise des angenommenen Kegelschnittes. Im Falle ähnlicher Ellipsen wird der über der grossen Axe mit Hilfe der reellen Ellipsen, der über der kleinen Axe mit Hilfe der imaginären Gruppe erhalten.

Als Grenzfall lassen wir die beiden $\infty$ fernen Punkte in einen zusammenfallen, wodurch wir ein System von coaxialen confocalen Parabeln erhalten, ein specieller Fall einer Kegelschnittschaar. Es ergibt sich hier:

e) Ein mit einem beliebigen Radius um den Brennpunkt als Mittelpunkt beschriebener Kreis schneidet die Parabeln in Punkten so, dass die Tangenten in diesen durch 2 feste Punkte gehen, die Endpunkte des auf der gemeinsamen Parabelaxe gelegenen Kreisdurchmessers, und umgekehrt:

f) Legt man aus einem Punkte der gemeinsamen Axe eines Systemes von confocalen coaxialen Parabeln die Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kreise der durch diesen Punkt geht, und dessen Mittelpunkt der gemeinsame Brennpunkt der Parabeln ist.

Der Kreis ist derselbe für die Berührungspunkte der Tangenten aus dem zweiten Endpunkte des auf der gemeinsamen Parabelaxe gelegenen Durchmessers [1]).

Dieses Ergebniss ist übrigens auch direct elementar und leicht nachweisbar, mit Hilfe der bekannten Parabeleigenschaften. Ist nämlich Fig. 2. $l_i$ die Leitlinie einer beliebigen Parabel des Systemes, so liegt in der Mitte zwischen dieser und dem Brennpunkt $F$ der Scheitel $S_i$ der Parabel. Die Schnittpunkte der Parabel mit dem Kreise vom Halbmesser $r$ ergeben sich auf einer Parallelen zu $l_i$ im Abstande $r$ von dieser und der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten mit der Axe wird erhalten, wenn man den Abstand des Scheitels $S_i$ von der Sehne auf die entgegengesetzte Seite abträgt, wodurch, wie zu sehen, der Durchmesserendpunkt erhalten wird u. s. w.

6) Von den zahlreichen noch denkbaren Specialisirungen, deren der allgemeine Satz fähig ist, soll nun noch eine, allerdings die wichtigste, erörtert werden. Wir nehmen an, die beiden festen Punkte $I$ und $II$ seien die u n e n d l i c h f e r n e n i m a g i n ä r e n K r e i s p u n k t e der Ebene, die Kegelschnitte des Systemes also vertreten durch die zwei Gruppen von K r e i s e n , welche zwei gegebene (reelle oder imaginäre) G e r a d e berühren, deren Mittelpunkte daher

1) Specialfall von: Legt man aus einem Punkte der gemeinsamen Hauptaxe eines Systemes confocaler Ellipsen Tangenten an diese, so ist der Ort der Berührungspunkte ein Kreis. Siehe F i e d l e r, Anal. Geometrie der Kegelschnitte. 4te Aufl. pag. 282.

auf einer von zwei Geraden $a$ und $b$ liegen, die, da sie conjugirt in Bezug auf die unendlich fernen Kreispunkte sind, senkrecht zu einander und weil sie auch durch die gegebenen Geraden harmonisch getrennt werden, die Halbirungslinien der Winkel dieser sind (oder die Axen des die Geraden ersetzenden Strahlensystems).

Die in der allgemeinen Betrachtung mit $P$ und $Q$ bezeichneten Punkte sind in diesem Falle die unendlich fernen Punkte von $a$ und $b$, und der Kegelschnitt $K^2$ der allgemeinen Betrachtung ist ein mit dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden concentrischer Kreis, den wir mit $A^2$ oder $B^2$ bezeichnen wollen. Der Kegelschnitt $K^{*2}$ ist dann ein Kegelschnitt, der die gegebenen Geraden zu Asymptoten hat, wenn diese reell, eine Hyperbel, wenn imaginär, eine Ellipse $A^2$ resp. $B^2$ zu Scheitelkreisen hat, da $a$ und $b$ die Axen desselben sind, und in den Endpunkten dieser die doppelte Berührung von $K^2$ und $K^{*2}$ erfolgt.

Nach Vorausschickung dieses erhalten wir nun:

„Ellipse und Hyperbel ergeben sich auch als Ort der Berüh-„rungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen Scheitelkreis, „und die Kreise, welche die Asymptoten berühren, und deren Mittel-„punkte auf der Axe liegen, über welcher der Scheitelkreis beschrieben „wurde."

Man erhält daher durch Benutzung beider Scheitelkreise, sowie beider Systeme der Kreise, die die Aymptoten berühren, in zweifacher Weise die Kegelschnitte in der angegebenen Art, und:

„Die Scheitelkreise der Kegelschnitte sind die Einhüllenden der „Tangenten an die, die Asymptoten derselben berührenden Kreise in „ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte."

Der letztere Satz lässt auch folgende Fassung zu:

„Die Tangenten an die, die Aymptoten eines Kegelschnittes be-„rührenden Kreise in ihren Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte „haben constante Entfernung vom Centrum des Kegelschnittes und „ist diese Entfernung gleich der Grösse der einen oder andern Halb-„axe, je nach der Lage des Mittelpunktes des Kreises auf der einen „oder andern Axe."

Ferner ergibt sich analog den in 3) gegebenen Zusätzen und der in 4) gemachten Schlussbemerkung:

a) Jeder die Asymptoten berührende Kreis schneidet den entsprechenden Scheitelkreis noch in 2 Punkten einer Secante. Sucht man den Pol derselben in Bezug auf den Scheitelkreis (er ist auch der Pol in Bezug auf den Kegelschnitt) und legt aus diesem die Tangenten an den Kreis, so berühren diese auch den Kegelschnitt, und liegen die Berungspunkte auf jener Secante.

Und:

b) Ellipse und Hyperbel ergeben sich auch als Einhüllende der noch möglichen gemeinsamen Tangenten der die Asymptoten berührenden Kreispaare, welche sich in denselben zwei Punkten des Scheitelkreises schneiden, deren Berührungspunkte mit den Asymptoten auf diesen eine Involution bilden, für welche die Doppelpunkte auf dem dem Kreissysteme entsprechenden Scheitelkreise liegen.

Die Mittelpunkte der Kreise, welche in jenen Punkten, wo der Scheitelkreis die Asymptoten schneidet, berühren, geben (wie bekannt) die Brennpunkte des Kegelschnittes; denn hier fallen beide Kreise des Paares zusammen, ihre mit dem Scheitelkreis gemeinsame Secante ist die Gerade, welche die auf den beiden Asymptoten gelegenen Doppelpunkte verbindet; aus dem Pole dieser Geraden, d. i. dem Mittelpunkte der beiden zusammen fallenden Kreise hat man an diese die Tangenten zu legen, die nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der Ebene gehen, und weil diese auch den Kegelschnitt berühren, so ist dieser Punkt Brennpunkt für den Kegelschnitt.

Wir begnügen uns mit der Anführung dieser Sätze und bemerken, dass auch die andern Fassungen des allgemeinen Satzes sich leicht weiter ausführen lassen. Aus dem über die Ellipse und Hyperbel Gesagten ergeben sich nun leicht Constructionen, die wir aber erst später zusammenhangend behandeln wollen, nachdem wir die Sätze noch auf einem andern directen Wege uns zurecht gelegt haben, weil daraus sich noch einiges Bemerkenswerte und für die Constructionen Brauchbare ergibt.

7) Dass die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten eines festen Kreises und der Kreise, die zwei feste durch das Centrum des gegebenen Kreises gehende Gerade berühren (im System betrachtet) einen Kegelschnitt geben, der den festen Kreis als Scheitelkreis, die Geraden zu Asymptoten hat, können wir einfach und direct nachweisen, indem wir von gewissen Beziehungen zwischen

zwei Kreisen ausgehen, die wir im Nachstehenden anführen, und soweit sie nicht allgemein bekannt sind, auch beweisen wollen.

*α*) Sind Fig. 3. $K_1$ und $K_2$ zwei Kreise, und legen wir aus dem Mittelpunkt $O_1$ von $K_1$ an $K_2$ und aus $O_2$ an $K_1$ die Tangenten, so schneiden diese Tangenten aus dem Kreise, durch deren Mittelpunkt sie gehen, gleich grosse Sehnen aus, d. h. es ist

$$2s_1 = 2s_2$$

Aus Fig. 3. ist nämlich

$$\left.\begin{array}{l} s_1 : r_2 = r_1 \,.\, e \\ s_2 : r_2 = r_1 : e \end{array}\right\}$$

$$s_1 = s_2 = \frac{r_1 \cdot r_2}{e}$$

also

$$2s_1 = 2s_2$$

*β*) Die Grösse dieser Sehnen ist auch gleich der Länge der Tangente an den betreffenden Kreis senkrecht zur gemeinsamen Centralen zwischen jenen Geraden, die von dem Mittelpunkte des einen Kreises nach den Endpunkten des zur Centralen senkrechten Durchmessers des zweiten Kreises gehen. Es ist nämlich Fig. 4.

$$\left.\begin{array}{l} s_2 : r_2 = r_1 : e \\ \tau_2 : r_2 = r_1 : e \end{array}\right\} s_2 = \tau_2 = \frac{r_1 r_2}{e} = s_1 = \tau_1$$

Diese in *β*) gemachte Bemerkung ist insofern von Belang, als in jenen Fällen, wo von dem Centrum des einen Kreises (wie in Fig. 4) an den zweiten Kreis keine reellen Tangenten gelegt werden können, hiedurch ein Ersatz für die durch die Tangenten sonst aus dem Kreise geschnittene Sehne gegeben ist.

*γ*) Legt man Fig. 3. an die beiden Kreise $K_1$ und $K_2$ die möglichen gemeinsamen Tangenten, so sind die Berührungssehnen, die senkrecht zu der gemeinsamen Centrale stehen, von der gemeinsamen Cordalen paarweise gleich weit abstehend, d. h. sie bilden Zonen von gleicher Breite[1]). Für unsere Zwecke ist wichtig zu zeigen, dass diese Zonenbreite gleich $2s_1 = 2\tau_1 = \ldots$ ist.

---

1) Steiner, Ueber einige neue Bestimmungsarten etc. — Steiner'sche Werke Bd. II. p. 450; vergl. auch Fiedler, Cyclographie p. 90.

Aus Fig. 3. ergibt sich leicht:

$$m = \frac{r_1^2}{e}; \quad n = \frac{r_1^2}{p}$$

Ist $O_1J = p$, so folgt:

$$p : e - p = r_1 : r_2$$

oder

$$p = \frac{e r_1}{r_1 + r_2}$$

und damit:

$$n - m = \frac{r_1 r_2}{e} = s_1 = s_2 = \tau_1 = \ldots$$

$n - m$ ist nämlich die halbe Zonenbreite, denn die Polare des Mittelpunktes $O_2$ von $K_2$ in Bezug auf $K_1$ fällt aus leicht zu ersehenden Gründen in die Mitte zwischen den Polaren der beiden Aehnlichkeitspunkte der Kreise.

Dass diese Relation auch richtig ist, wenn die beiden reell vorausgesetzten Kreise nicht 4 reelle gemeinsame Tangenten zulassen, ist leicht zu ersehen. Für den Fall, dass beide Kreise imaginär sind, wird im wesentlichen nichts verändert, und der Fall, wo einer der Kreise imaginär, der zweite reell ist, hat für unsere Betrachtungen, die wir hier verfolgen, keinen Belang und kann übergangen werden.

$\delta$) Im Falle, dass von dem Mittelpunkte des einen Kreises an den zweiten reelle Tangenten gelegt werden können, ist noch zu bemerken, dass die Zonenbreite auf einer solchen Tangente gemessen werden kann, und dass sie da gleich ist dem Stück der Tangente an $K_2$ senkrecht zur Centralen, welches durch die aus $O_2$ an $K_1$ gehenden Tangenten begrenzt wird; es ist nämlich in Fig. 3.:

$$t : s_2 = r_2 : w$$

wo $w$ den Abstand des Punktes $O_2$ von $s_2$ bedeutet. Es ist aber auch

$$b : s_2 = r_2 : w$$

woraus $b = t$ folgt; es ist daher $b$ gleich der halben, längs einer aus dem Mittelpunkte von $O_2$ an $K_1$ gezogenen Tangente gemessenen Zonenbreite der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise.

8) Betrachten wir jetzt zwei feste und zwar zunächst reelle Gerade $t_1$ und $t_2$ Fig. 5., die durch den Mittelpunkt $S$ eines Kreises

$A^2$ gehen, und alle die Kreise, die diese Geraden berühren und ihre Mittelpunkte auf der Geraden $a$ haben. In diesem Falle ist $s$ oder $DG = \frac{1}{2}DD$ für alle Kreise des Systemes constant, und die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an $A^2$ und jeden Kreis des Systemes bilden auf jedem der letzteren Zonen von constanter Breite $= 2s$.

Betrachten wir $t_1 t_2$ als die Projectionen der Umrisserzeugenden eines schiefen Kreiskegels, $S$ als die Projection der Spitze, so sind die Kreise des Systemes aufzufassen als die Projectionen von zur Basis parallelen Schnitten. Eine Ebene parallel der die Contourerzeugenden verbindenden Ebene schneidet den Kegel nach einem Kegelschnitte, dessen Projection die Contourgeraden zu Asymptoten hat.

Man findet nun Punkte der Projection des Schnittes, indem man die zur Basis parallelen Ebenen mit der schneidenden Ebene zum Schnitt bringt, und die Projectionen bestimmt. Diese Schnittlinien projiciren sich als Parallelen zu den Berührungssehnen der Kreise mit $t_1$ und $t_2$ und zwar in gleichen Abständen und nach derselben Seite von diesen genommen.

Trägt man also von den Berührungspunkten auf $t_1$ nach einer Seite ein constantes Stück $b$ (oder parallel zu $a$ das Stück $DG = s$) auf, legt die Senkrechten zu $a$, so erhält man in den Schnittpunkten dieser mit den entsprechenden Kreisen die Punkte der Hyperbel, für welche $b = AB$ die absolute Grösse der Nebenaxe ist.

Dass $b$ die Grösse der Nebenaxe ist, ist zu ersehen, indem man sich auch jenen Kreis $K_a$ Fig. 5. parallel der Basisebene gezeichnet denkt, der von der ihm zukommenden Schnittlinie mit der schneidenden Ebene berührt wird, wo dann $BN = BA$, und $A$ der Scheitel wird. Trägt man dieselbe Grösse $b$ (oder $s$ resp.) nach entgegengesetzter Richtung auf, so erhält man wieder eine Hyperbel, die mit der frühern dieselbe Nebenaxe (mit Hilfe des Kreises $K_a'$ leicht zu sehen) und Asymptoten hat, also mit ihr identisch ist. Es ist daher gezeigt, dass tatsächlich der Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an $A^2$ und die Kreise, welche die Geraden $t_1$ und $t_2$ berühren und ihre Mittelpunkte auf $a$ haben, eine Hyperbel von den früher angegebenen Eigenschaften ist [1]).

Auch aus der bekannten Eigenschaft der Hyperbel, dass, siehe Fig. 6.

---

1) Ganz analog lässt sich für den Fall der Ellipsen, wo die Geraden imaginär sind, der Beweis führen.

$$\overline{R_1 P_1} \cdot \overline{R_2 P_1} = \overline{R_2 P_2} \cdot \overline{R_1 P_2} = b^2$$

ist, ist sofort mit Berücksichtigung des in 7), 8) Gesagten der Nachweis, dass der Ort der Berührungspunkte diese Hyperbel sein muss, zu erbringen.

9) Aus dem aus dem allgemeinen Satze Gefolgerten und aus dem in 7) und 8) Erörterten ergeben sich nun einige Constructionen für die Hyperbel, die wir, wenn sie auch in Betreff der Einfachheit nicht gerade hervorragend sind, doch zur Erläuterung der gewonnenen Sätze und Eigenschaften, als Beiträge zur Theorie der Hyperbel hier anführen wollen.

a) Eine punktweise Construction der Hyperbel (und der Ellipse) ergibt sich, siehe Fig. 5. aus der in 6) angegebenen Definition (die in 8) neuerdings bewiesen wurde), die keiner weitern Erläuterung mehr bedarf.

b) Man bringt, wie aus dem in 8) gegebenen Beweise hervorgeht, die Kreise, welche eine Gerade berühren (Fig. 7.) und ihre Mittelpunkte auf einer zweiten Geraden haben, mit den zur letzteren Senkrechten zum Schnitte, welche Senkrechten von den Berührungspunkten der Kreise und der ersten Geraden constanten Abstand haben und zwar nach beiden Seiten.

c) Ist Fig. 8 von einer Hyperbel die Hauptaxe und ein Punkt gegeben, so lassen sich die Asymptoten der Hyperbel dadurch finden, dass man aus dem gegebenen Punkte $P$ an den über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebenen Kreis $A^2$ eine Tangente $t$ legt, zu dieser $PM$ senkrecht errichtet und mit $M$ auf der Axe $a$ als Mittelpunkt den Kreis durch $P$ legt. Die Tangenten aus dem Mittelpunkt der Hyperbel an diesen Kreis sind die gesuchten Asymptoten.

Aus $P$ geht noch eine zweite Tangente an $A^2$, und diese ebenso verwendet, liefert einen zweiten Kreis, und die gemeinsamen Tangenten an diesen und den Frühern geben ebenfalls die Asymptoten.

d) Ist (Fig. 12.) die Grösse und Lage der Nebenaxe gegeben und ein Punkt $P$ einer Hyperbel, so kann man auf Grund der erörterten Eigenschaften die Asymptoten finden, indem man $OT$ senkrecht auf $OP$ macht, wo $\overline{PT}^2$ die Potenz von $P$ bezüglich des imaginären Scheitelkreises $B^2$ ist.

Zieht man durch $P$ die $p_1 \parallel a$ und sucht $P_1$ den Pol von $p_1$ bezüglich $B^2$ (er ist auch der Pol von $P_1$ bezüglich der Hyperbel), so ist $P_1P$ die Tangente $t$ an die Hyperbel im Punkte $P$. Trägt man auf $t$ die Strecken

$$PT_1 = PT_2 = PT$$

ab, und zeichnet einen der Kreise, die ihren Mittelpunkt auf $b$ haben. und $t$ in $T_1$ oder $T_2$ berühren, so gehen die Asymptoten berührend an diesen aus $O$, (oder man zeichnet beide Kreise und die gemeinsamen Tangenten an diese).

f) Für die in c) und d) gegebene Aufgabe: Gegeben eine Axe und ein Punkt einer Hyperbel, die Asymptoten zu construiren — kann man die Construction einfacher durchführen auf Grund folgender Betrachtungen.

In Fig. $12^a$. ist:

$$\triangle\, O_1BD \text{ ähnlich } O_2O_1F$$

woraus:

$$r_1 : e = BD : O_1F$$

oder, wenn man

$$BC = O_1F = AB$$

macht:

$$O_1E : O_1O_2 = BD : BC$$

d. h., dass

$$BC \parallel EO_2 \text{ wird.}$$

Da aber, wenn $O_1E$ und $A^2$ unverändert bleiben, die Punkte $B$, wie wir gezeigt haben, auf einer Hyperbel liegen, so finden wir für die Hyperbel:

Das Stück auf einer Parallelen zu einer Asymptote zwischen der reellen Axe und dem Punkt der Hyperbel ist gleich der Länge der Tangente aus dem Punkte an den Scheitelkreis über der reellen Axe.

Man erhält daher die Asymptotenrichtungen [1]), indem man Fig. $12^d$. aus $P$ eine Tangente $PV$ an den Scheitelkreis legt, $PT = PT_1 = PV$ macht, wo dann zufolge des Vorbemerkten $PT$ und $PT_1$ die Asymptotenrichtungen sind; aus $O$ die Parallelen hiezu gezogen, gibt die Asymptoten selbst.

---

Siehe Nouvelles Annales 1875, p. 239. wo diese Construction von L.-A. Levat angegeben wird. Uebrigens gilt die Construction verallgemeinert auch für den zweiten, imaginären Scheitelkreis, indem man allgemeiner statt der Länge

g) Soll der Schnitt einer zu $a$ senkrechten Geraden $g$ mit der durch $A^2$ und die Asymptoten gegebenen Hyperbel bestimmt werden, so trägt man Fig. 9. vom Schnitte der $g$

---

der Tangente des Hyperbelpunktes an einen Scheitelkreis die Quadratwurzel aus der absoluten Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis einführt. Durch eine einfache Rechnung, die hier weggelassen werden kann, findet man nämlich (siehe Fig. 12b.), wenn $PTS$ und $PT_1S_1$ zu den beiden Asymptoten der Hyperbel durch den Hyperbelpunkt parallel gezogen werden,

$$PT = PT_1 = PV$$

wenn $V$ der Berührungspunkt einer der beiden aus $P$ an den Scheitelkreis gehenden Tangenten ist (ist bereits oben in f) bewiesen worden), und wenn $OZ$ senkrecht auf $OP$, und $Z$ auf dem Scheitelkreis $B^2$ liegt, $OZ$ also gleich der absoluten Grösse der Nebenaxe ist, so ist $\overline{LP^2}$ die Potenz von $P$ in Bezug auf den imaginären Scheitelkreis über der Nebenaxe, und es ist

$$PZ = PS = PS_1$$

Man findet daher aus der Nebenaxe, und einem Punkte $P$ der Hyperbel die Asymptote, indem man Fig. 12e. $OZ$ senkrecht auf $PO$ legt und

$$PS = PS_1 = PZ$$

macht, wodurch man in $PS$ und $PS_1$ die Asymptotenrichtungen erhält.

Man hat hiedurch:

Auf jeder zu einer Asymptote durch einen Hyperbelpunkt gezogenen Parallelen wird durch diesen und die eine Axe eine Strecke abgeschnitten gleich der Quadratwurzel aus der Potenz des Punktes in Bezug auf den über diese Axe beschriebenen Scheitelkreis. Daher:

Auf jeder durch einen Hyperbelpunkt zu einer Asymptote gezogenen Parallelen schneiden die beiden Axen eine Strecke ab gleich der Differenz (oder Summe) der Wurzeln aus den Potenzen des Punktes bezüglich der beiden Scheitelkreise, und dieselbe Strecke wird durch die Parallelen aus dem Punkte der Hyperbel zu den beiden Axen auf jeder Asymptote bestimmt u. s. w.

Man kann die in den Figuren 12c. und 12d. zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen verwendeten Punkte $TT_1$ und $S$ und $S_1$ noch anders finden, indem sich durch eine leichte Rechnung ergibt, dass $Q$ und $R$ Fig. 12b die Fusspunkte der aus $P$ zu den Axen gefällten Senkrechten sind, und wenn man aus $Q$ die eine Tangente $QU$ an den Scheitelkreis $A^2$ legt,

$$QU = QT = QT_1$$

ist. Bestimmt man von $R$ in Bezug auf den imaginären Scheitelkreis $B^2$ die die Potenz $\overline{RW^2}$, so ist

$$RW = RS = RS_1$$

wie sich leicht ergibt. Mit Hilfe dieser Bemerkung sind in den Figuren 12c. und 12d. ebenfalls die Punkte $SS_1$ und $TT_1$, welche mit $P$ verbunden die Asymptotenrichtungen geben, bestimmt worden, und bedarf dieses keiner weiteren Erörterung.

und $t$ auf letzterer $b$ nach einer oder der andern Seite auf (oder $s$ auf $a$ von $g$ weg und zieht die Parallelen zu $g$ bis diese $t$ schneiden). Dann ist nur nötig, einen der beiden Kreise zu construiren, welcher $t$ in einem der so erhaltenen Punkte berührt und seinen Mittelpunkt auf $a$ hat, welcher dann $g$ in den gesuchten Punkten $I$ und $II$ schneidet.

h) Man kann stets vier Punkte, einer wie oben gegebenen Hyperbel zugleich finden, wenn man 2 parallele Gerade $g$ und $g'$ Fig. 9. senkrecht zu $a$ zieht, deren senkrechter Abstand $= 2s$, oder deren Abstand auf einer Asymptote gemessen $= 2b$ ist. Der Kreis, dessen Mittelpunkt auf $a$ liegt, und der die Asymptote im Mittelpunkt der durch $g$ und $g'$ begrenzten Strecke berührt, gibt zufolge des Früheren die gesuchten Punkte der Hyperbel auf $g$ und $g'$. (Hiervon können auch 2, oder alle 4 imaginär werden).

i) Entsprechend den in 6) gegebenen Zusätzen kann man den Schnitt einer zu $a$ senkrechten Geraden $g$ mit der Hyperbel auch finden unter gleichzeitiger Bestimmung der Tangenten in diesen Punkten. In Fig. 10. sucht man zu $g$ den Pol $G$ bezüglich $A^2$, legt $JT$ tangirend an $A^2$ und macht

$$JT_1 = JT$$

Legt man an den mit $MT_1$ beschriebenen Kreis aus $G$ die Tangenten $t_1$ und $t_2$, so hat man in den Schnittpunkten $I$ und $II$ dieser mit $g$ die Punkte der Hyperbel gefunden, und $t_1$ und $t_2$ sind die Tangenten in ihnen.

Oder, wie in Fig. 11., man macht

$$JT_1 = JT_2 = JT$$

beschreibt die zwei Kreise mit $M_1 T_1$ und $M_2 T_2$ als Halbmesser, und legt die noch möglichen gemeinsamen Tangenten an diese Kreise, und die Aufgabe ist gelöst, wobei hier die Construction des Poles $G$ der Geraden $g$ entfällt.

k) Ist eine Gerade $\gamma$ parallel zur Hauptaxe gegeben, und ihr Schnitt mit der durch $B^2$ und die Asymptoten gegebenen Hyperbel zu finden, so kann unter gleichzeitiger Ermittlung der Tangenten in den Schnittpunkten diese Aufgabe gelöst werden, indem wie in Fig. 10. $OV$ senkrecht auf $OK$ gemacht wird, und

$$KV_1 = KV_2 = KV$$

aufgetragen wird; an die 2 Kreise, welche die Asymptote in $V_1$ resp. $V_2$ berühren, und ihre Centren auf $b$ haben, sind die gemeinsamen Tangenten zu legen, die auch die Hyperbel berühren; und deren Berührungspunkte auf $\gamma$ liegen. (Oder, man zeichnet nur einen der Kreise, und an diesen aus dem Pole von $\gamma$ bezüglich $B^2$ die Tangenten).

10) Der Uebergang von zwei reellen Geraden auf zwei imaginäre wird gegeben durch eine Gerade und einen auf ihr befindlichen Punkt, als Berührungspunkt für die Kreise des Systemes. Hiedurch erhält man ein System von Kreisen, die sich in einem Punkte berühren, und findet hiefür, dass die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen beliebigen mit dem gemeinsamen Berührungspunkte concentrischen Kreis und die Kreise des Systemes auf 2 zur Centralen senkrechten den angenommenen Kreis berührenden Geraden liegen, und umgekehrt, schneidet man ein System von Kreisen, die sich in einem Punkte berühren, durch 2 zur Tangente im gemeinsamen Berührungspunkte in gleichen Abständen von dieser parallelen Geraden, so umhüllen die Tangenten an die Kreise in den Schnittpunkten mit den Geraden jenen Kreis, welcher über der von den parallelen Geraden auf der gemeinsamen Centralen abgeschnittenen Strecke als Durchmesser beschrieben wird. (Dieses Ergebniss gilt offenbar auch für eine solche Gerade allein).

In Fig. 13. ist dargetan, wie sich dieses Resultat auch direct höchst einfach zeigen lässt. Es ist nämlich

$$\triangle\, O_1AC \cong O_1BF$$

und wegen

$$O_1B = O_1A$$

folgt auch

$$\triangle\, BDC \cong AEF$$

so dass also

$$BD = AE = r$$

ist, und da sich dasselbe für jeden Kreis des Systemes ergibt, ist ersichtlich, dass der Abstand $BD$ des Berührungspunktes $B$ von der gemeinsamen Tangente in $A$ constant und gleich $r$ ist. Ist die Gerade gegeben, so ergibt sich ebenso aus

$$BD = AE$$

dass jedesmal $AE$ constant ist, also die Tangenten an die Kreise in den Punkten der Geraden den Kreis vom Halbmesser $BD$ oder $AE$ umhüllen.

11) Sind die beiden Geraden imaginär, so erhalten wir als Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an die Kreise des einen Systemes (welche ihre Mittelpunkte auf der einen der beiden Axen des elliptischen Strahlensystemes haben, dessen imaginäre Doppelstrahlen die gegebenen Geraden sind) und an einen mit dem Schnittpunkt der Geraden concentrischen Kreis $B^2$ eine Ellipse, wie sich aus dem allgemeinen Satze ergibt, wie wir aber auch analog, wie in 8) mit Hilfe des Kegels dartun könnten, was aber hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Auch die Ellipse kann als Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an den zweiten Scheitelkreis (über der grossen Axe) und die Kreise des zweiten Systemes, welch letztere imaginär [1]) sind, definirt werden, und umgekehrt ergibt sich jeder der Scheitelkreise als Einhüllende der Tangenten, $B^2$ als jener an die Kreise des reellen Systemes in den Schnittpunkten der Ellipse, $A^2$ als Einhüllende der (imaginären) Tangenten in den (ebenfalls imaginären) Schnittpunkten des Systemes der imäginären Kreise mit der Ellipse an diese Kreise.

Die constructive Verwertung der genannten Eigenschaften und der weiter aus dem Allgemeinen für diesen Fall noch herauszulesenden ist für die Ellipse von noch geringerer Bedeutung als für die Hyperbel, und kann aus dem Vorausgehenden leicht selbst gefolgert werden, daher sie hier übergangen werden soll. Jedoch soll hier noch einiges bemerkt werden, was zur raschen und einfachen Verzeichnung der die Asymptoten der Ellipse berührenden Kreise führt.

Alle Kreise $O_1 O_2$ ... Fig. 14. mit $r_1 r_2$ ... als Halbmesser haben $S$ als gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und berühren, wenn der Winkel $\varphi$, den die Gerade $l$ mit $b$ einschliesst, grösser als 45° ist, dieselben 2 durch $S$ gehenden imaginären Geraden. Die Senkrechte $a$ in $S$ zu $b$ trifft die Kreise in Punkten derart, dass der Winkel $\psi$, unter welchem die nach diesen Punkten gehenden Radien zu $b$ geneigt sind, constant ist. Die Grösse der auf $a$ gelegenen halben Sehnen ist, nebenbei bemerkt, gleich der Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der jeweiligen Quadrantensehne

---

1) Dass die Kreise des zweiten Systemes imaginär sein müssen, ergibt sich, indem wir aus einem Punkte eines Strahles $x$ eine Senkrechte $s$ zur Axe $b$ und eine senkrechte Gerade $\sigma$ zur Axe $a$ legen; $x$ und der conjugirte Strahl $x_1$ bilden mit $s$ ein Dreieck und ebenso mit $\sigma$. Ist das eine stumpfwinklig, so muss das andere spitzwinklig sein, und während für das erstere ein Polarkreis mit reellem Radius sich ergibt, folgt dann für das zweite ein solcher mit imaginärem Radius.

und dessen andere Kathete dem jeweiligen $l$ gleich ist. Durch $P_1 P_2 \ldots$ gehen die Polaren von $S$ bezüglich der Kreise, und von diesen hätte man zu beiden Seiten das constante Stück $s$ (siehe 7 $\beta$, $\gamma$)) abzutragen und die zu $b$ daselbst senkrechten Geraden mit den entsprechenden Kreisen zum Schnitt zu bringen, wodurch punktweise die in Rede stehende Ellipse erhalten würde.

Das constante Stück $s$ ist bei angenommenem $l$ offenbar nur mehr von der Annahme des Kreises $B^2$ abhängig, gleich dem Stück der zu $b$ senkrechten Tangente an $B^2$, welches zwischen $b$ und $l$ liegt (7) $\beta$, $\gamma$)).

Zur vollständigen Bestimmung der imaginären Asymptoten suchen wir den conjugirten Strahl $l_1$ zu $l$ in der Involution, indem wir z. B. Fig. 15. zu $l$ bezüglich eines Kreises den Pol suchen und mit $S$ verbinden.

Wir suchen den Pol für den Kreis, dessen Mittelpunkt $B$ ist, und haben aus $B$ die Normale zu $l$ zu legen, diese mit der zu $b$ parallelen Tangente an diesen Kreis zu schneiden und erhalten den Pol von $l$.

In Fig. 15. ist

$$BC : CD = BS : BC$$
$$= b : s$$

und

$$EF : CD = b : s$$

daher

$$BC = EF = s$$

d. h. $l$ und die conjugirte Gerade $l_1$ schneiden aus der zu $b$ parallelen Tangente an $B^2$ das constante Stück $s$ ab, ein anderes Mittel um $l_1$ zu finden [1]).

Dass $E$ ein Punkt der Ellipse ist, ist sofort zu sehen, wenn man einen jener 2 Kreise des Systemes zeichnet, die denselben Radius wie $B^2$ haben. Man findet daher $l$ im Falle dass die Ellipse gezeichnet vorliegt, indem man die zur Axe $b$ parallelen Tangenten an $B^2$ mit der Ellipse schneidet, und einen der Schnittpunkte mit dem Mittelpunkte verbindet.

1) Ist die Involution durch die Axen und ein beliebiges Paar $xx_1$ gegeben, so ist es leicht, die Gerade $l$ zu finden (oder $\lambda$ die symmetrische, in Bezug auf die Axen), indem man für $xx_1$ und einer zu $b$ senkrechten Geraden $s$ den Polarkreis ausmittelt, und die Endpunkte des zu $b$ senkrechten Durchmessers desselben mit dem Punkte $S$ verbindet.

Es folgt damit auch

$$s : b = b : SG$$

und

$$s = \frac{b^2}{SG}$$

Da aber

$$SG = \frac{eb}{a}$$

ist, wobei $a$ die halbe grosse Axe, $e$ die halbe Excentricität der Ellipse bedeutet, so ist

$$s = \frac{ab}{e}$$

und hieraus auch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{b}{e}$$

wodurch wieder ein einfaches Mittel gegeben ist, die Gerade $l$ zu zeichnen, wenn die Ellipse durch die Halbaxen gegeben ist; man trägt Fig. 16. auf der Scheiteltangente in $A$ die halbe Excentricität $e = OF = AH$ auf, oder man macht $OF' = OF$ und zieht $l$ parallel mit $AF'$.

Gehen wir auf die imaginären Kreise über, welche die Asymptoten der Ellipse berühren, so sind, wenn $s$ die Polare von $S$ bezüglich eines Kreises des reellen Systemes, und $\sigma$ die Polare bezüglich eines der imaginären Kreise ist, und $s$ und $\sigma$ sich in demselben Punkte von $l$ treffen, Fig. 17. $H$ und $H_i$ die Höhenschnittpunkte der Dreiecke $sll_1$ und $\sigma ll_1$; für das letztere ist der Halbmesser $\varrho$ des Polarkreises imaginär und die absolute Grösse desselben $MH_i$. Wegen

$$BS : SH = \Sigma H_i : SH_i$$

sind die rechtwinkligen Dreiecke $BNH$ und $\Sigma MS$ ähnlich, und in Folge dessen $SM \parallel BN$ oder $SM$ senkrecht auf $HN$, d. h. Wkl. $\alpha$ ist $= 90^0 - \psi$, also constant. Die Bedeutung von $i$ ist die, dass uns die Gerade sofort die absolute Grösse der Halbmesser der imaginären Kreise liefert auf den zu $a$ Senkrechten zwischen $a$ und $i$.

Es ist demnach

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{e}{b}$$

d. h. $i$ geht (Fig. 16.) durch $O$ parallel mit $BF$, oder man erhält auch $t$ (oder die zu den Axen symmetrisch gelegene Gerade $j$, welcher dieselbe Bedeutung zukommt), indem man in $F$ die Senkrechte zu $a$ mit $A^2$ zum Schnitt bringt und den Schnitt mit $O$ verbindet, oder den Schnittpunkt der zu $a$ parallelen Tangente mit $O$ verbindet.

Wegen

$$AK : a = b : e$$

Fig. 17., folgt

$$AK = \frac{ab}{e} = s$$

d. h. man kann $i$ auch erhalten, indem man auf der Scheiteltangente in $A$ an $A^2$ das constante Stück $s = AK$ (Fig. 16). aufträgt, und den Endpunkt mit $O$ verbindet.

Die Ableitung der Relationen für die Lage von $i$ galt ganz allgemein für irgend eine beliebige Lage von $s$ resp. $\sigma$. Ist $s$ wie in Fig. 17. zusammenfallend mit der Tangente an $B^2$, so folgt

$$SN = b \operatorname{tg} \alpha = e$$

d. h. der Kreis des reellen Systemes, dessen Mittelpunkt mit einem der Endpunkte der kleinen Axe zusammenfällt, geht durch die Brennpunkte der Ellipse. Macht man hingegen

$$SD = s = \frac{ab}{e}$$

so wird

$$SA : SN = b : s$$

$$SA : e = \frac{ab}{e} : b$$

und damit $SA = a$ d. h.:

Man erhält den Mittelpunkt eines Kreises des reellen Systemes der durch die Endpunkte der grossen Axe geht, wenn man aus einem der auf $a$ gelegenen Punkte von $B^2$ die Senkrechte zu $l_1$ legt. Die Grösse des Halbmessers des Kreises ist die Ordinate im Mittelpunkte, bis $l$ natürlich.

Diese und noch andere Relationen ermöglichen es leicht, die Geraden $l$ und $l_1$, sowie $i$ anzugeben, welche geeignet sind, beliebig viele Kreise einfach zu legen (reell oder imaginär), welche die Asymptoten einer gegebenen Ellipse berühren. Von der Wahl der $l$ resp. $i$ hängt aber offenbar auch die Form der Ellipse ab. Die angegebenen Relationen gestatten auch den Schnitt der zu $b$ parallelen Tangenten an $B^2$ mit der Ellipse auf leichte Art zu finden, wenn diese durch die Axen (eventuell Excentricität) gegeben ist. Auf die, den bei der Hyperbel gegebenen, analogen Constructionen der Schnitte einer zu einer Axe parallelen Geraden etc. wollen wir hier nicht weiter eingehen.

12) Machen wir jetzt die Uebertragung von einigen der gewonnenen Ergebnisse auf den Raum.

Sind $t_1 t_2$ Fig. 5. die in der Ebene der Zeichnung gelegenen Erzeugenden eines Rotationskegels, $a$ die Axe und $S$ die Spitze, so stellen uns $E_1$, $E_2$, $E_3$ ... die Hauptaxen (grosse Axe der Ellipse [1]) oder die reelle Axe im Falle der Hyperbel) von Schnitten des Rotationskegels vor, deren Ebenen senkrecht zur Zeichnungsfläche stehen, und die dieselbe Entfernung $a$ von der Spitze des Rotationskegels besitzen. Die Berührungspunkte dieser Geraden mit den Kreisen des $t_1$ und $t_2$ berührenden Systemes sind aber nach einem bekannten Satze [2]) die Brennpunkte der oben genannten Schnitte und liegen, wie wir ausführlich dargetan haben, auf der bestimmten Hyperbel, die $A^2$ zum Scheitelkreis über der reellen Axe und $t_1$ und $t_2$ zu Asymptoten hat. Die Brennpunkte aller zu einer Hauptebene senkrechten Schnitte dieses Rotationskegels, die denselben Abstand vom Scheitel haben, liegen auf jener Hyperbel. Man erhält:

„Der Ort der reellen Brennpunkte aller ebenen Schnitte eines „Rotationskegels, die dieselbe mit dem Kegel concentrische Kugel „berühren, ist ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid, welches den „gegebenen Kegel als Asymptotenkegel hat und die Kugel in den auf „ihr gelegenen Punkten der Rotationsaxe berührt."

Den Parameter irgend eines Schnittes, z. B. für $E_3$ Fig. 15.) finden wir als $\sqrt{QF_3 . F_3 Q'}$, welcher Wert aber einer bekannten Hyperbeleigenschaft zu Folge gleich $2b$ ist, d. h. alle diese Schnitte haben gleich grosse Parameter.

Uebrigens kann man die Richtigkeit des soeben Gesagten auch aus Fig. 6. ableiten. $2 P_1 P_0$ ist der Parameter eines Schnittes des Rotationskegels, für welchen Schnitt $P_1$ ein Brennpunkt ist. $P_0 P_1$ ist aber gleich dem Abstande der zur Zeichnungsebene parallelen Ebene, die den Kegel nach einer Hyperbel schneidet, deren orthogonale Projection auf die Zeichnungsfläche die Hyperbel der Punkte $P_1 P_2$ ... ist, von der Zeichnungsfläche, und ist dieser Abstand $P_0 P_1$, weil der Kegel ein Rotationskegel ist, gleich $b$, d. i. gleich der halben Länge der Scheiteltangente der Hyperbel zwischen den Asymptoten; jeder Schnitt, der einen Punkt dieser Hyperbel zum Brennpunkt hat, hat $2 P_0 P_1$ als Grösse des Parameters, und somit haben wir auch die Richtigkeit eines von Jacob Bernoulli [3]) angegebenen Satzes dargetan:

---

1) Siehe Gugler, Theorie der Kreisprojectionen.

2) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, pag. 289.

3) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch v. Sohnke, pag. 16.

„Der Parameter eines ebenen Schnittes eines Rotationskegels „ist gleich dem Durchmesser jenes Kreisschnittes desselben, welcher „von der Kegelspitze ebensoweit absteht wie die schneidende Ebene.“

Als Folge des Satzes von Bernoulli hat man dann auch:

Alle Ebenen, die dieselbe mit einem geraden Kreiskegel concentrische Kugel berühren, schneiden diesen nach Kegelschnitten mit gleichen Parametern — und damit und im Zusammenhange mit dem Vorigen:

„Der Ort der reellen Brennpunkte aller ebenen Schnitte eines „Rotationskegels, die gleiche Parameter haben, ist ein zweischaliges „Rotationshyperboloid, das den Rotationskegel zum Asymptoten-„kegel hat [1]).“

Dieser zuletzt ausgesprochene Satz gilt allgemein für Rotationsflächen zweiten Grades in folgender Form:

„Der Ort der reellen Brennpunkte sämtlicher ebenen Schnitte „einer Rotationsfläche zweiten Grades, die gleiche Parameter haben, „ist eine mit der gegebenen concentrische, ähnlich und ähnlich ge-„legene Rotationsfläche zweiten Grades.“

Es lässt sich das soeben Gesagte auch durch folgende Betrachtungen beweisen.

Wenn wir in dem Abstande $p$ gleich dem halben Parameter von einer Meridianebene eine parallele zu dieser legen, so schneidet diese die Rotationsfläche nach einem mit dem Meridiane ähnlichen Kegelschnitte, dessen orthogonale Projection auf diese Meridianebene eine mit der Meridiancurve ähnliche, ähnlich und concentrich gelegene Curve ist. Ein Schnitt senkrecht zu dieser Meridianebene, der den Parameter $2p$ haben soll, muss seine Brennpunkte auf der zuletzt erhaltenen Curve haben. Umgekehrt wird auch jeder Punkt dieser Curve Brennpunkt für einen oder den andern durch ihn gehenden zur Meridianebene senkrechten Schnitt sein.

Durch Rotation um die Axe erzeugt nun diese Curve die früher angegebene Fläche, und der Satz ist bewiesen, weil ja jeder beliebig gewählte Schnitt auf einer durch die Rotationsaxe gehenden Ebene senkrecht stehen wird, und die bezüglich der zu einer durch die Rotationsaxe gehenden Ebene senkrechten Schnitte angestellten Betrachtungen allgemein gelten.

---

1) Für den imaginären Kegel ein Ellipsoid.

II.

# Die Lemniskate.

Von

**Emil Oekinghaus.**

(Fortsetzung von T. VII. Nr. XIV.)

---

Aus den, Seite 367, gewonnenen Relationen

$$\tau + \alpha + 90^0 = \sigma; \qquad \tau + \alpha' + 90^0 = \sigma'$$
$$\sigma + \sigma' = 360^0 + 2\tau$$

folgt:

$$\alpha + \alpha' = 180^0 \tag{86}$$

und somit der Satz:

Die entsprechenden Kreisradien $\varrho$ und $\varrho'$ nach dem Mittelpunkte der Lemniskate sind in dem Falle gegen die Achse gleich geneigt, wenn die Schnittpunkte beider Kreise und der Lemniskate in gerader Linie liegen. Dieser Satz gilt allgemein für die 3 Kreispaare, welche, wie oben abgeleitet wurde, hinsichtlich ihrer Radien durch die Beziehung $\varrho\varrho' = c^2$ verknüpft sind.

Eine allgemeinere Gleichung, welche das gesamte Kreissystem mit einander verbindet, geht aus der Cosinusresolvente der Geraden hervor. Für diese

$$\cos(2\sigma - 2\tau)^3 - \left(\frac{2h^2}{c^2} + \cos 2\tau\right)\cos(2\sigma - 2\tau)^2 + \frac{2h^2}{c^2} = 0$$

entwickeln wir aus

$$\frac{\sin(\sigma-2\tau)}{\sin\sigma}=\frac{c^2}{\varrho^2}$$

den Wert

$$\operatorname{tg}\sigma=-\frac{\varrho^2\sin 2\tau}{c^2-\varrho^2\cos 2\tau}$$

und eliminiren mit ihrer Hülfe aus der ersten $\sigma$, was auf eine reciproke Gleichung führt. Man findet schliesslich

$$87)\quad \left(\frac{\varrho^2}{c^2}+\frac{c^2}{\varrho^2}\right)^3-\cos 2\tau\left(\frac{c^2}{h^2}\cos 2\tau+2\right)\left(\frac{\varrho^2}{c^2}+\frac{c^2}{\varrho^2}\right)^2$$
$$+4\left(\frac{c^2}{h^2}\cos\tau-1\right)\left(\frac{\varrho^2}{c^2}+\frac{c^2}{\varrho^2}\right)-4\left(\frac{c^2}{h^2}-2\cos 2\tau\right)=0$$

Diese Gleichung zeigt den Zusammenhang der Radien jener Kreise an, welche sowol durch entsprechende Schnittpunkte der Geraden, als auch durch den Mittelpunkt $O$ gehen.

Eine allgemeinere Betrachtung kann nun auf folgendem Wege geschehen.

Ein Kreis schneide die Lemniskate in 4 Punkten. Durch je zwei derselben legen wir eine Gerade, deren Neigung gegen die Achse bez. $\tau$ und $\tau'$ sei. Vermöge der Formeln

$$\cos\delta=\frac{\sin\sigma}{\sin 2(\sigma-\tau)},\quad \cos\delta'=\frac{\sin\sigma'}{\sin 2(\sigma'-\tau')},\quad \frac{\cos\delta}{\cos\delta'}=-\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'}$$

folgt hieraus

$$\sin 2(\sigma-\tau)=-\sin 2(\sigma'-\tau')$$

also

$$88)\qquad \sigma+\sigma'=180^0+\tau+\tau'=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4$$

wo die $\varphi$ die Polarwinkel der Schnittpunkte von Kreis und Lemniskate sind.

Daher ist die Summe der Winkel $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4$ um $180^0$ grösser als die Summe $\tau$ und $\tau'$ der Winkel der beiden Geraden oder Kreissehnen gegen die Achse. Nun haben wir aber nachgewiesen, dass, wenn die Strecke vom Mittelpunkt der Lemniskate nach der Mitte der Sehne mit dieser einen Winkel $S$ bildet, die Formel

$$2\sigma=90^0+2\tau+S$$

besteht. Für die 2. Sehne ist

$$2\sigma'=90^0+2\tau'+S'$$

also resultirt

$$\sigma+\sigma'=90^0+\tau+\tau'+\tfrac{1}{2}(S+S')$$

Da aber

$$\sigma+\sigma' = 180^0+\tau+\tau'$$

so folgt

89) $$S+S' = 180^0$$

Oder: Verbindet man die Mitten der gegenüber liegenden Seiten oder Diagonalen eines durch den Schnitt von Lemniskate und Kreis gebildeten Vierecks mit dem Mittelpunkt $O$ der Lemniskate durch Strecken, so haben diese gegen die Sehnen gleiche Neigung.

Dieser Satz ist, wie man sofort bemerkt, eine Erweiterung des vorhin über die Gerade abgeleiteten Satzes, die letztere als Kreis von unendlich grossem Radius betrachtet werden kann.

Wir bezeichnen mit $h$ den spitzen Winkel, den die entsprechenden Sehnen mit einander bilden, so dass

$$\tau'-\tau = 180^0-h^0$$

Die Winkel $S$, $S'$ wählen wir ebenfalls spitz, so ist unter diesen Annahmen

$$\begin{aligned} 2\sigma &= 90^0+2\tau+S+180^0 \\ 2\sigma' &= 90^0+2\tau-S \\ \hline 2(\sigma'-\sigma) &= -2h-2S+180^0 \end{aligned}$$

$$S+\sigma'-\sigma = 90^0-h$$

$$\sigma-\sigma' = S+h-90^0 = 2\sigma-U$$

$$\sigma-\sigma' = T-90^0$$

wo $T$ der Winkel ist, den die erste Strecke verlängert mit der 2. Geraden einschliesst, und da

$$\frac{s^2}{q^2}\frac{\sin\sigma}{\cos\delta} = \sin(\sigma-\sigma') = \sin(2\sigma-U)$$

$$\cos S = \frac{\sin\sigma}{\cos\delta}$$

so folgt

90) $$\frac{s^2}{q^2}\cos S = \cos T$$

woraus neue Beziehungen gefolgert werden können, wenn $s = q$ ist.

Aus der Formel

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 = 180^0+\tau+\tau'$$

lassen sich ebenfalls manche neue Sätze ableiten, wenn man die Winkel zwischen den Geraden und Radienvectoren einführt.

Aus dem Vorstehenden lässt sich noch ein Tangentenproblem lösen. Berührt ein Kreis die Lemniskate, so wird die eine Sehne zur Tangente, und der zugehörige Winkel $S$ ist dem Winkel zwischen dieser Tangente und dem Radiusvector gleich, also $= 90^0 - 2\varphi$. Der Winkel $S'$ der 2. Sehne ist also $= 90^0 - 2\varphi$. Hierauf beruht die allgemeine Auflösung der Aufgabe, durch 2 gegebene Punkte der Lemniskate einen Berührungskreis hindurch zu legen.

Da $S'$ als Winkel zwischen der die beiden Punkte verbindenden Sehne und ihrer Mittellinie nach $O$ bekannt ist, so ist auch der Polarwinkel $\varphi = \frac{1}{2}(90^0 - S')$ des Berührungspunktes bestimmt, was auch ohne Rechnung klar ist, da die verlängerte Mittellinie den Berührungspunkt treffen muss.

Wir wollen hier die Relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^0 + \tau + \tau'$$

noch einmal discutiren. Die $\varphi$ sind die Polarwinkel der Schnittpunkte von Lemniskate und Kreis, $\tau$ und $\tau'$ die Neigung zweier gegenüber stehenden Sehnen oder auch Diagonalen gegen die Achse. Jede dieser Sehnen schneidet aber die Lemniskate in noch je 2 Punkten, welche durch die Winkel $\psi_3\,\psi_4$, $\chi_1\,\chi_2$ bezeichnet sein mögen.

Bei Berücksichtigung der Lage ist für beide Sehnen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 + \varphi_2 + \psi_3 + \psi_4 &= 360^0 + 2\tau \\
\varphi_3 + \varphi_4 + \chi_1 + \chi_2 &= 2\tau' \\
\hline
\Sigma\varphi + \psi_3 + \psi_4 + \chi_1 + \chi_2 &= 360^0 + 2\tau + 2\tau' \\
\Sigma\varphi \qquad\qquad &= 180^0 + \tau + \tau' \\
\hline
\end{aligned}$$

$$\psi_3 + \psi_4 + \chi_1 + \chi_2 = 180^0 + \tau + \tau' \tag{91}$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem in 88) abgeleiteten überein. Hieraus folgt, dass durch die Punkte $\chi_1\,\chi_2$, $\psi_3\,\psi_4$ ebenfalls ein Kreis hindurchgelegt werden kann. Und weil

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \chi_1 + \chi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

so folgt vermöge der Formel

$$\mathrm{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{c^2 - R^2 \cos 2\alpha}$$

dass der Mittelpunkt dieses Kreises durch $R(180^0 + \alpha)$ bestimmt ist.

Auch diese Ableitung steht mit schon früher Vorgetragenem in directer Verbindung, wie man leicht finden wird.

Ebenso leicht ergibt sich vermöge der Formel

$$\frac{s^2}{s'^2} = -\frac{\sin(2\sigma - U)}{\sin(2\sigma' - U)}$$

und der Cosinusresolvente des Kreises vermittelst Elimination $2\sigma - U$ und $2\sigma' - U$ eine Relation zwischen den Kreisradien $s$, $s'$, die auf eine Gleichung 9. Grades führt.

Vergleicht man die Gleichungen für den Kreis und die Gerade etwa in der Form

$$\cos\varphi^4 - 2\cos 2\tau \cos\varphi^3 \quad \text{etc.} \quad (R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha + c^4)\cos 2\varphi^4 - \quad \text{etc.}$$

und untersucht, ob es möglich sei, die Wurzeln beider identisch zu machen, so findet man folgende Bedingungen

$$92)\quad \begin{aligned} c^2 - R^2\cos 2\alpha &= s^2\cos 2\tau \\ R^2\sin 2\alpha &= s^2\sin 2\tau \\ s^2 - R^2 &= \pm 2hs \end{aligned}$$

woraus

$$\operatorname{tg} 2\tau = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = -\frac{R^2\sin 2\alpha}{c^2 - R^2\cos 2\alpha}$$

$$R^4 - 2c^2R^2\cos 2\alpha + c^4 = s^4$$

Genügen die $R$ und $s$ diesen Bedingungen, so sind die Wurzeln identisch. Man bemerke, dass die letzte Relation für constante $s^4 = q^4$ eine Cassinische Curve repräsentirt.

Besonders einfach ist der Fall $q = c$. Die Parallelität der Geraden durch entsprechende Punkte möge noch bemerkt werden. Vergl. 90).

Andere Sätze ergeben sich von selbst.

Als Speciallfall führen wir noch an, dass, wenn zwei concentrische Kreise, deren gemeinsame Centra auf der $Y$-Achse liegen, die Lemniskate tangiren, die Halbmesser dieser Kreise sich verhalten wie die entsprechenden Radienvectoren ihrer Berührungspunkte.

## § 9.

### Die Lemniskate und die Parabel.

Eine gewisse sich auf eine Gleichung beziehende Verwandtschaft zwischen Lemniskate und Parabel lässt sich noch wie folgt nachweisen.

Ein Kreis, dessen Centrum die Polarcoordinaten $R(\alpha)$ habe, gehe durch den Brennpunkt der Parabel, welchen wir als Anfangspunkt annehmen.

Die Brennstrahlen $r$ mögen mit $R$ Winkel $2\varphi$ einschliessen.

Aus

$$r = 2R\cos 2\varphi, \quad r = \frac{q}{\sin\frac{1}{2}(2\varphi+\alpha)^2}$$

$$\frac{q}{2R} = \sin\tfrac{1}{2}(2\varphi+\alpha)^2\cos 2\varphi$$

folgt für $\cos 2\varphi$ eine biquadratische Gleichung

$$93)\quad \cos 2\varphi^4 - 2\cos\alpha\cos 2\varphi^3 + \left(\frac{2q}{R}\cos\alpha + \cos\alpha^2\right)\cos 2\varphi^2 - \frac{2q}{R}\cos 2\varphi + \frac{q^2}{R^2} = 0$$

welche mit der Gleichung zwischen Lemniskate und Geraden übereinstimmt, wenn

$$\frac{q}{R} = \frac{h^2}{c^2}, \quad \alpha = 2\tau$$

angenommen wird. Diese Uebereinstimmung der Constanten beider Curven genügt, um die Polarwinkel der einen durch die der anderen darzustellen.

Die Cosinusresolvente der Parabel ist in diesem Fall

$$94)\quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma^3 + \left(\frac{2q}{R} + \cos\alpha\right)\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \frac{2q}{R} = 0$$

worin die $\gamma$ die Winkel zwischen den gegenüber liegenden Seiten und Diagonalen bedeuten.

Noch allgemeiner würden diese Relationen ausfallen, wenn der Kreis durch einen Brennpunkt eines beliebigen Kegelschnitts hindurch geht. Die Resolvente wird dann

$$95)\quad \cos\tfrac{1}{2}\gamma^3 - \left(\frac{p}{eR} + \cos\alpha\right)\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1-e^2}{e^2}\cos\gamma - \cos\alpha\frac{1-e^2}{e^2} + \frac{p}{eR} = 0$$

und ein kurzer Vergleich dieser mit der Lemniskatenresolvente 85) lässt die Identität beider erkennen, wenn

$$\alpha = U, \quad e = \frac{q^2}{s^2}, \quad \frac{p}{R} = \frac{(R-s^2)^2}{a^2 s^2}$$

eingeführt wird. Die weitere Untersuchung dieser Verhältnisse bietet manches Interesse, z. B. wenn der Kreis die Curve berührt. Ueber eine Anwendung der Parabel hinsichtlich des Tangentenproblems der Lemniskate haben wir schon früher berichtet.

Es existiren noch andere Beziehungen zwischen der Lemniskate und den Kegelschnitten, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen wollen. Wir werden später in der Theorie der letzteren darauf zurückkommen.

§ 10.

## Die Lemniskate und die gleichseitige Hyperbel.

Da das Entstehungsgesetz der Lemniskate durch polarische Beziehung mit der gleichseitigen Hyperbel verknüpft ist, so lässt sich im Voraus schliessen, dass die gemeinsame Betrachtung beider Curven auf interessante Relationen führen werde. Einige davon verdienen bemerkt zu werden.

Die gleichseitige Hyperbel und ihre Fusspunktcurve werde von einem Kreise, dessen Centrum $R(\alpha)$ und dessen Radius $= s$ sei, in 4 Punkten geschnitten.

Aus

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \varphi)$$
$$a^2 = r^2 \cos 2\varphi$$

folgt

$$96)\quad \operatorname{tg}\varphi^4((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2a^2\sin\alpha^2) + 4R^2a^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3 + (2a^4 - 2(R^2 - s^2)^2 + 4R^2a^2\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\varphi^2 - 4R^2a^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2a^2\cos\alpha^2 = 0$$

Vergleicht man sie mit der analogen für die Lemniskate und den Kreis

$$97)\quad \operatorname{tg}\varphi^4((R^2 - s^2 - a^2)^2 + 4R^2a^2\sin\alpha^2) + 4R^2a^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3 + (2(R^2 - s^2)^2 - 2a^4 + 4R^2a^2\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\varphi^2 - 4R^2a^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\varphi + (R^2 - s^2 + a^2)^2 - 4R^2a^2\cos\alpha^2 = 0$$

so erkennt man die Identität beider, wenn

$$R^2 - s^2 = \pm a^2$$

gesetzt wird. Daraus folgt der Satz:

Wenn der Radius $s$ eines Kreises, der mit der Lemniskate

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

die Centrale $R$ hat, der Bedingung

$$s^2 = R^2 \pm a^2$$

genügt, so gehen die nach den Schnittpunkten beider Curven gezogenen Radienvectoren $r$ rückwärts verlängert durch die Schnittpunkte des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel.

Umgekehrt schneiden diese Radienvectoren der Hyperbel rückwärts verlängert die Lemniskate in 4 Kreispunkten.

Bei den folgenden Darstellungen wolle man die Relation

$$Rr = a^2$$

beachten, welche aus den Polargleichungen

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad R^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

hervorgeht. Diese beiden correspondirenden Punkte $r(\varphi)$, $R(\varphi)$ bezeichnen wir mit $P$ und $P'$.

Von den Brennpunkten der Hyperbel ziehen wir Gerade nach dem Lemniskatenpunkte $P$, welche den Winkel $E$ bilden, und ferner von den Brennpunkten der Lemniskate nach dem Hyperbelpunkte $P'$ Gerade, welche den Winkel $E'$ einschliessen.

Vermöge der Formeln

$$\operatorname{tg} E = \frac{4rc \sin\varphi}{r^2 - 4c^2}, \quad \operatorname{tg} E' = \frac{2Rc \sin\varphi}{R^2 - c^2}$$

und der Polargleichungen erhält man nach Einführung dieser die Relation

$$E + E' = 180^0 \tag{98}$$

und damit den Satz:

Die Leitstrahlen der Lemniskate nach einem Hyperbelpunkte $P'$ und die Leitstrahlen der Hyperbel nach dem correspondirenden Lemniskatenpunkte $P$ schliessen ein Kreisviereck ein.

Eine weitere Verbindung beider Curven findet sich wie folgt.

Wir bezeichnen die Winkel, welche die Scheitelstrahlen von den Endpunkten $\pm a$ der Achse mit $P$ und $P'$ einschliessen, bezüglich mit $\gamma$ und $\gamma_1$, dann findet man wie oben

$$\cos\gamma = -\operatorname{tg}\varphi$$
$$\cos\gamma' = \operatorname{tg}\varphi$$

also

99) $$\gamma + \gamma' = 180^0$$

Oder: Die Scheitelstrahlen zweier correspondirender Punkte der Lemniskate und Hyperbel schliessen ein Kreisviereck ein.

Für dritte Ableitung ergibt sich aus der Polargleichung der Hyperbel

$$\varrho' = \frac{a}{1+\sqrt{2}\cos\psi'}$$

Eliminirt man aus dieser und

$$R^2 = \varrho'^2 + 4c^2 - 4c\varrho'\cos\psi'$$

den Winkel $\psi'$, so folgt für den einen Leitstrahl

$$\varrho' = \sqrt{a^2+R^2} - a = \frac{a}{r}(\sqrt{a^2+r^2} - r)$$

für den andern

$$\varrho'' = \sqrt{a^2+R^2} + a = \frac{a}{r}(\sqrt{a^2+r^2} + r)$$

woraus zunächst

$$\varrho'\varrho'' = R^2$$

folgt und ferner, wenn die Leitstrahlen $m n$ der Lemniskate durch

$$\sqrt{2}m = \sqrt{a^2+r^2} - r$$
$$\sqrt{2}n = \sqrt{a^2+r^2} + r$$

definirt sind, dass

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{m}{n}$$

ist, wonach das Verhältniss correspondirender Leitstrahlen für beide Curven das nämliche bleibt.

Wir bezeichnen nun die Winkel, welche diese Leitstrahlen mit einander bilden, durch $\Theta$, $\Theta'$, dann besteht zunächst für die Hyperbel die Formel

$$16c^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho''\cos\Theta$$

aus welcher leicht

$$R\sin\tfrac{1}{2}\Theta' = a$$

folgt. Weil aber

$$Rr = a^2 \quad \text{und} \quad r = a\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

ist, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta' = \cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

oder

100) $$\Theta + \Theta' = 180^0$$

woraus der Satz:

Die Leitstrahlen der Lemniskate und Hyperbel nach correspondirenden Punkten ihrer Curve schliessen ein Kreisviereck ein.

Daran knüpft sich ein 4. Satz, den wir noch mitteilen wollen.

Wir haben oben die Focalwinkel der Hyperbel $\psi'$ und $\psi''$ eingeführt. Dieselben stehen mit 2 andern in der Lemniskate in merkwürdiger Verbindung. Diese Winkel $\psi$ sind nämlich denen gleich, welche der Radiusvector $r$ der Lemniskate mit den Brennstrahlen $m\, n$ bezüglich einschliesst, und die wie wir schon früher gefunden, durch $\frac{1}{2}\Theta + \varphi$ und $\frac{1}{2}\Theta - \varphi$ definirt sind. Bei Betrachtung der Figur ergibt sich dann leicht der Satz:

Die beiden correspondirenden Punkte auf Lemniskate und Hyperbel bilden mit je zwei ihrer zusammen gehörigen Brennpunkte entsprechende Kreisvierecke.

Die Tangente des Hyperbelpunktes $P'$ schneide die $X$-Achse in $M$, die $Y$-Achse in $N$; nennen wir dann noch ihren zweiten Schnittpunkt mit der Lemniskate $P''$, so sind $MNP'P''$ einander zugeordnete harmonische Punkte, wie leicht zu beweisen ist.

Ferner möge der Focalkreis, der durch die Brennpunkte $\pm c$ geht, die $Y$-Achse in 2 Punkten $F$ und $F'$ schneiden; ziehen wir nun durch die Lemniskate eine der $X$-Achse parallele Gerade, für welche die leicht abzuleitenden Relationen

$$r_1^2 + r_2^2 = a^2, \quad \Theta' + \Theta'' = 180^0$$

bestehen, und halbiren die Focalwinkel $\Theta_1$ und $\Theta_2$ durch Geraden, welche die $Y$-Achse in $G$ und $G'$ schneiden, so sind $FF'GG'$ einander zugeordnete harmonische Punkte.

## § 11.

### Die Linie gleicher Producte.

Das Absolutglied in der Gleichung der Geraden 18) wird durch

$$1) \qquad R^4 - a^2 R^2 \cos 2\varphi = x_1 x_2 x_3 x_4$$

definirt. Es ist von der Richtung der Geraden oder vom Winkel $\delta$ unabhängig und drückt aus, dass das Product der vier von $R(\varphi)$ an gerechneten Secanten ähnlich wie beim Kreise constant ist, wie auch die Geraden durch jenen festen Punkt gezogen werden mögen.

Wie aus der Formel hervorgeht, ist die Curve gleicher Producte eine Cassinische Linie.

Wir beschreiben um den Lemniskatenmittelpunkt $O$ einen Kreis vom Halbmesser $h$, ziehen von $R(\varphi)$ an diesen eine Tangente $= t$ und setzen fest, dass das Product gleich sein soll der 4. Potenz dieser Tangente, also dass

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = t^4$$

ist. Da aber

$$t^2 = R^2 - h^2$$

ist, so geht aus dieser Einführung die Beziehung

$$R^4 - a^2 R^2 \cos 2\varphi = (R^2 - h^2)^2$$

hervor, welche auf eine Kegelschnittsgleichung

$$2)\qquad \frac{x^2}{\frac{h^4}{2(h^2-c^2)}} + \frac{y^2}{\frac{h^4}{2(h^2+c^2)}} = 1$$

als geometrischen Ort der Punkte gleicher Potenzen führt. Sie stellt eine Ellipse dar, wenn $h > c$, eine Hyperbel, wenn $h < c$, eine Gerade $y = \frac{1}{2}c$, wenn $h = c$ ist.

Legt man allgemein die Gleichung der Cassinischen Curven anstatt der Schleifenlemniskate zu Grunde, so modificiren sich die Formeln etwas, die Kegelschnittsgleichungen aber sind analog den obigen.

Die Untersuchung kann auf 2 Lemniskaten ausgedehnt werden in dem Sinne, dass das Product oder die Potenz für beide gleich sei. Der Untersuchung legen wir demnach 2 Lemniskaten

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad r^2 = a'^2 \cos 2\varphi$$

zu Grunde. Die Centrale beider sei $R$ und ihre Neigung zur $a$-Achse $= \beta$. Die beiden Achsen mögen noch den Winkel $\alpha$ einschliessen.

Die Ausführung der Rechnungen ergibt die Curvengleichung

$$\begin{aligned}
3)\quad & a^2(x^2-y^2) - 2(x^2+y^2)(2Rx\cos\alpha + 2Ry\sin\alpha - R^2) \\
& + (2Rx\cos\alpha + 2Ry\sin\alpha - R^2)^2 \\
& = a'^2\cos 2\beta(x^2 - y^2 - 2Rx\cos\alpha + 2Ry\sin\alpha + R^2\cos 2\alpha) \\
& + a^2\sin 2\beta(2xy - 2Rx\sin\alpha - 2Ry\cos\alpha + R^2\sin 2\alpha)
\end{aligned}$$

welche dem 3. Grad angehört. Für $R = 0$, also für concentrische Lemniskaten reducirt sie sich auf ein System zweier senkrecht auf einander stehenden Geraden

$$4)\qquad x^2 - y^2 = \frac{2a'^2\sin 2\alpha}{a^2 - a'^2\cos 2\alpha}\, xy$$

Die Linie gleicher Producte wird sehr einfach und führt auf den 2. Grad, wenn die Achsen beider Curven in einer Geraden liegen, $\alpha$ und $\beta$, also $= 0$ sind.

Man findet zunächst, wenn die Centrale mit $g$ bezeichnet wird:

$$y^2 = \frac{4gx^3 - (a^2 - a'^2 + 6g^2)x^2 + 2g(2g^2 - a'^2)x - g^2(g^2 - a'^2)}{-4gx + 2g^2 + 1'^2 - a^2}$$

Wir führen die Division durch und setzen das Restglied $= 0$, man erhält die Gleichung eines Kreises

$$5) \quad x^2 + y^2 - \frac{a^2 - a'^2 + 2g^2}{2g}x + \frac{(a^2 - a'^2)^2 + 4g^2(g^2 - a'^2)}{8g^2} = 0$$

mit der Bedingung

$$6) \quad g^4 - \tfrac{1}{2}(a^2 + a'^2)g^2 + \tfrac{1}{4}(a^2 - a'^2)^2 = 0$$

Benutzt man sie, um die Kreisgleichung zu transformiren, so wird letztere

$$7) \quad \left(x - \frac{a^2 - a'^2 + 2g^2}{4g}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{8}(a^2 + a'^2)$$

und stellt die Linie gleicher Producte in einfachster Form dar. Da die Gleichung für $g^2$ quadratisch ist, so ergibt sich aus ihrer Auflösung

$$8) \quad 4g^2 = a^2 + a'^2 \pm \sqrt{(3a^2 - a'^2)(3a'^2 - a^2)}$$

dass 2 Centralen existiren, so dass die zweite Lemniskate 2 verschiedene Lagen annehmen kann. Wie aus einer weiteren geometrischen Betrachtung hervorgeht, geht die Linie gleicher Producte durch die gemeinsamen Schnittpunkte der entsprechenden Lemniskaten.

Aus dem Bau der Gleichungen folgen noch gewisse Determinationen, welche zu berücksichtigen sind, womit wir uns aber hier nicht weiter beschäftigen wollen. Wir wollen nur andeuten, dass diese speciellen Sätze hinsichtlich der Cassinischen Curven einer Erweiterung fähig sind.

Es möge hier noch erwähnt werden, dass, wenn $xy$ Lemniskatencoordinaten darstellen, die daraus combinirten

$$X = x + ny$$
$$Y = y - nx$$

Coordinaten $XY$ einer Gleichung

$$R^2 = a^2(1 + n^2)\cos 2(\Theta + h), \quad \operatorname{tg} h = n$$

genügen, die wieder durch eine Lemniskate repräsentirt ist und bei variabelem $n$ verschiedene Lagen- und Grössenverhältnisse annimmt.

Wird die Gleichung nach $n$ differentiirt um die einhüllende Curve aller Lemniskaten zu finden, so resultirt als solche die durch

$$R^2 \cos 2\Theta = a^2$$

dargestellte gleichseitige Hyperbel.

Betrachtet man endlich noch die aus den obigen Ausdrücken hervorgehenden

$$x = \frac{X - nY}{1+n^2}, \qquad y = \frac{nX + Y}{1+n^2}$$

Coordinaten $xy$ als die einer gesuchten Curve, während $XY$ der Lemniskate angehören, so resultirt die Curve

$$R^2 = a^2 \cos h^2 \cos 2(\Theta - h)$$

und die Einhüllende aller für $n = \operatorname{tg} h$ veränderlichen Lemniskaten führt auf die Fusspunktgleichung der Lemniskate

$$\varrho = a \cos \tfrac{2}{3}\Theta^{\frac{3}{2}}$$

Die Untersuchung der reciproken Polare dieser Curve ist deshalb bemerkenswert, weil sie mit der gleichseitigen Hyperbel in Verbindung tritt. Auch die Annahme, dass die Lemniskate hinsichtlich ihrer Brennpunkte oder auch ihres Mittelpunktes als Katakaustik oder Brennlinie einer Curve aufgefasst werden kann, verdient wegen der daraus sich ergebenden Resultate Beachtung.

## § 12.

## Die Rectification der Cassini'schen Linien.

Die folgenden Entwickelungen über die Rectification der Lemniskaten werden vielleicht aus dem Grunde bemerkenswert erscheinen, weil wir eine Variabele einführen, die man bisher übersehen hat, aber als sehr geeignet erscheint, die Integration auf einen einfachen Ausdruck zurückzuführen.

Ausserdem ist derselbe noch einer geometrischen Discussion zugänglich, welche manches Anregende bietet.

Anstatt der wenig geeigneten Variabelen $x$ oder $r$ oder $\varphi$ wählen wir als Variabele den schon häufig benutzten Focalwinkel der Leit-

strahlen eines Punktes der Curve, der uns auch später noch wichtige Dienste leisten wird.

Er hängt mit dem Radiusvector $r$ der Curve

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\varphi + c^4 = q^4$$

durch die Relation

$$r^2 = c^2 + q^2\cos\Theta$$

zusammen. Die Beziehung zwischen $\varphi$ und $\Theta$ findet sich aus

$$\sin\varphi = \frac{q^2}{2c}\,\frac{\sin\Theta}{\sqrt{c^2+q^2\cos\Theta}}$$

Unter Beachtung dieser Formeln erhält man vermittelst bekannter Methoden schliesslich das Integral

$$9)\quad s = q\int\sqrt{\frac{h^2+\cos\Theta}{(h^2+\cos\tfrac{1}{2}\Theta^2)(h^2-\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2)}}\,d\tfrac{1}{2}\Theta,\quad h = \frac{c}{q}$$

Dies Integral werden wir nachher in Reihen entwickeln, vorher aber die interessanten Eigenschaften discutiren, welche damit verknüpft sind.

Zunächst bemerken wir, dass die Grenzen der Integration davon abhangen, ob die Curve aus 2 Ovalen oder aus einem ungeteilten Ganzen besteht. Ausserdem ist das Verhältniss $h = \frac{c}{q}$ für beide Fälle zu beachten, welches entsprechend $\gtrless 1$ oder auch $= 1$ sein kann.

Zugleich bestimmt

$$\frac{c}{q} = \sin E$$

für die aus einem Zuge bestehenden Curve, für welche $q > c$ ist, die obere Grenze, während bei den Ovalen das Integral 0 bis $\pi$ genommen werden kann.

Nun möge das Integral

$$10)\quad s = \frac{q^2}{c}\int\limits_0^\Theta\sqrt{\frac{1-\dfrac{2}{1+\dfrac{c^2}{q^2}}\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2}{\left(1-\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2}{\dfrac{c^2}{q^2}}\right)\left(1-\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2}{1+\dfrac{c^2}{q^2}}\right)}}\,d\tfrac{1}{2}\Theta$$

sich auf ein Oval und

$$11)\quad s' = \frac{q'^2}{c'} \int_0^{\Theta'} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{1+\frac{c'^2}{q'^2}} \sin \tfrac{1}{2}\Theta'^2}{\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta'^2}{\frac{c'^2}{q'^2}}\right)\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta'^2}{1+\frac{c'^2}{q'^2}}\right)}}\, d\tfrac{1}{2}\Theta'$$

auf eine ungeteilte Lemniskate beziehen, deren Constanten ausserdem noch von der ersten verschieden sein sollen. Die Grenzen sind in beiden verschieden. Daher substituiren wir im zweiten Integral

$$12)\quad \sin \tfrac{1}{2}\Theta' = \frac{c'}{q'} \sin \tfrac{1}{2}\Theta$$

und erhalten nach einigen Umformungen das Integral

$$13)\quad s' = q' \int_0^{\Theta} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{1+\frac{q'^2}{c'^2}} \sin \tfrac{1}{2}\Theta^2}{\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta^2}{\frac{q'^2}{c'^2}}\right)\left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta^2}{1+\frac{q'^2}{c'^2}}\right)}}\, d\tfrac{1}{2}\Theta$$

welches nun auch von 0 bis $\pi$ genommen werden kann. Man bemerke aber wol, dass trotz der Transformation der Bau des Integrals derselbe geblieben ist, indem nur die Glieder $\frac{c'}{q'}$ sich in ihre reciproken Werte umgesetzt haben. Daher ist das erste und dritte Integral überhaupt identisch, wenn

$$\frac{c}{q} = \frac{q'}{c'}$$

gesetzt wird, woraus

$$14)\quad cc' = qq'$$

als Bedingung resultirt, wenn die nach 12) entsprechenden Lemniskaten bogen in einfachem Verhältniss zu einander stehen sollen.

Nehmen wir der Einfachheit wegen confocale Lemniskaten an, so ist

$$15)\quad c^2 = qq'$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\Theta' = \frac{c}{q'} \sin \tfrac{1}{2}\Theta$$

welche Formel, wenn

$$\frac{c}{q'} = \sin E'$$

eingeführt wird, auch in

16) $$\sin \tfrac{1}{2}\Theta' = \sin E' \sin \tfrac{1}{2}\Theta$$

übergeht.

Für die Bogen bestehen nun folgende allgemeine Ausdrücke, wenn das Integral $= J$ gesetzt wird:

17) $$s = \frac{q^2}{c} \,.\, J$$

$$s' = q' \,.\, J$$

woraus

18) $$\frac{s}{s'} = \frac{q^2}{cq'}$$

oder in dem zunächst betrachteten Falle von confocalen Curven

19) $$\frac{s}{s'} = \frac{q^3}{c^3} = \frac{c^3}{q'^3}$$

d. i.

$$\frac{s}{s'} = \sin E'^3$$

In confocalen Lemniskaten, deren Parameter $q$ und $q' = \frac{c^2}{q}$ sind, entspricht vermittelst 12) jedem Bogen $s$ der einen Curve ein analoger $s'$ der zweiten, welche beide in dem unveränderlichen Verhältniss $\frac{q^3}{c^3}$ zu einander stehen. Daher besteht auch zwischen den Umfängen beider Curven das nämliche Verhältniss $\sin E'^3$. (Vergl. Holzmüller, Lemniskatische Geometrie S. 351 und s. Schlussnote).

Wir fügen noch einige Bemerkungen bei.

Aus

$$\sin E' = \frac{\sin \frac{1}{2}\Theta'}{\sin \frac{1}{2}\Theta}$$

folgt

$$\sin E'^2 = \frac{1 - \cos \Theta'}{1 - \cos \Theta}$$

Hierin drücken wir vermittelst der Formel

$$r^2 = c^2 + q^2 \cos \Theta$$

$\Theta$ durch $r$ aus, und finden zunächst

$$\sin E'^2 = \frac{q^2}{q'^2} \, \frac{q'^2 - r'^2 + c^2}{q^2 - r^2 + c^2}$$

und weil

$$\sin E' = \frac{c}{q},$$

so folgt schliesslich der einfache Ausdruck

$$\frac{r}{r'} = \frac{c}{q}$$

also auch

$$\sin E' = \frac{r}{r'}$$

so dass $r$ oder $r'$ mit Leichtigkeit gefunden werden kann, wodurch auch der eine Bogen durch den andern bestimmt ist.

Daher ist auch

20) $$\frac{s}{s'} = \frac{r^3}{r'^3}$$

oder die entsprechenden Bogen verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Radienvectoren.

Oder: Bestimmt man in zwei Lemniskaten, welche die Parameter $q$ und $q' = \frac{c^2}{q}$ haben, 2 Punkte derart, dass ihre Radienvectoren in constantem Verhältniss

$$\frac{r}{r'} = \sin E$$

zu einander stehen, so verhalten sich die entsprechenden Bogen $s$ und $s'$ wie die dritten Potenzen dieser Radien.

Der allgemeinere Fall nicht confocaler Lemniskaten möge noch kurz erledigt werden. Die Gleichungen sind jetzt:

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + c^4 = q^4$$
$$r'^4 - 2c'^2 r'^2 \cos 2\varphi' + c'^4 = q'^4$$

die Brennpunkte sind $\pm c$ und $\pm c'$, die Parameter $q$ und $q'$.

Aus der Hauptformel

$$cc' = qq'$$

oder

$$\frac{c}{q} = \frac{q'}{c'}$$

folgt schon, dass die erste Curve zwei Ovale, die zweite ein Ganzes bildet. Die betreffenden Bogen haben jetzt das Verhältniss

21) $$\frac{s}{s'} = \frac{c}{c'} \sin E'^3$$

wo wie früher

$$\sin\tfrac{1}{2}E' = \frac{\sin\frac{1}{2}\Theta'}{\sin\frac{1}{2}\Theta}$$

ist. Ebenso entwickelt sich leicht das folgende Verhältniss

22) $$\frac{r}{r'} = \frac{c}{c'}\sin E'$$

Wollte man annehmen, dass etwa der Bogen $s'$ das $n$-fache von $s$ sei, so würde zunächst

$$s' = ns$$

$$\frac{c'}{c} = n\sin E'^3$$

bestehen. Ist die äussere Curve als bekannt oder gezeichnet vorausgesetzt, so würden die Elemente der innern zu bestimmen sein.

Man findet leicht

23) $$c = \frac{q'^3}{n\,c'^2}, \qquad q = \frac{q'^2}{nc'}$$

und ist aus diesen Data die Ovale gezeichnet, so entspricht jedem Punkt $\Theta'$ der äussern ein durch

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta\sin E' = \sin\tfrac{1}{2}\Theta'$$

bestimmter Punkt der innern Curve, deren Bogen sich wie $n:1$ verhalten. Die Umfänge haben ebenfalls das nämliche Verhältniss.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass die Lemniskatenbogen in ähnlicher Weise mit einander verglichen werden können, wie dies bei den Kegelschnitten der Fall ist.

## § 13.

Wir gehen jetzt zu den Reihenentwickelungen über, welche wir zunächst auf das Integral für die Ovale

$$s = \frac{q}{h}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\frac{2}{1+h^2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{\left(1-\frac{\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{h^2}\right)\left(1-\frac{\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{1+h^2}\right)}}\,d\tfrac{1}{2}\Theta;\quad h = \frac{c}{q}$$

beziehen. Der Abkürzung wegen schreiben wir es

$$\frac{h}{q}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-2\beta\sin\frac{1}{2}\Theta^2}{(1-\alpha\sin\frac{1}{2}\Theta^2)(1-\beta\sin\frac{1}{2}\Theta^2)}}\, d\tfrac{1}{2}\Theta$$

und entwickeln die einzelnen Ausdrücke in Reihen. Man findet

$$\begin{aligned}\frac{h}{q}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} & \left(1+\tfrac{1}{2}\alpha\sin\frac{\Theta^2}{2}+\tfrac{3}{8}\alpha^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^4+\tfrac{5}{16}\alpha^3\sin\tfrac{1}{2}\Theta^6+\tfrac{35}{128}\alpha^4\sin\tfrac{1}{2}\Theta^8\ldots\right)\\ & \cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\beta\sin\frac{\Theta^2}{2}+\tfrac{3}{8}\beta^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^4+\tfrac{5}{16}\beta^3\sin\tfrac{1}{2}\Theta^6+\tfrac{35}{128}\beta^4\sin\tfrac{1}{2}\Theta^8\ldots\right)\\ & \cdot\left(1-\beta\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2-\tfrac{1}{2}\beta^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta^4-\tfrac{1}{2}\beta^3\sin\tfrac{1}{2}\Theta^6-\tfrac{5}{8}\beta^4\sin\tfrac{1}{2}\Theta^8\ldots\right)d\tfrac{1}{2}\Theta\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\begin{aligned} & 1+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}\Theta^2+\tfrac{1}{8}(3\alpha^2-2\alpha\beta-5\beta^2)\sin\tfrac{1}{2}\Theta^4\\ & +\tfrac{1}{16}(5\alpha^4-3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2-13\beta^3)\sin\tfrac{1}{2}\Theta^6\\ & +\tfrac{1}{128}(35\alpha^4-20\alpha^3\beta-30\alpha^2\beta^2-52\alpha\beta^3-141\beta^4)\sin\tfrac{1}{2}\Theta^8\end{aligned}\right)d\tfrac{1}{2}\Theta$$

Die Integrationsgrenzen erstrecken sich von $O$ bis $\frac{\pi}{2}$.

Hinsichtlich der Bestimmung von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{2}\Theta^{2n}\,d\Theta$ verweisen wir auf bekannte Formeln und geben hier das Schlussresultat, indem wir den echten Bruch $\frac{q^2}{c^2}$ mit $k$ bezeichnen, da das Ergebniss zunächst für Ovale gilt.

$$24)\quad s = kc\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}\frac{k^2}{1+k}+\frac{3}{64}\frac{k^2(3k^2+4k-4)}{(1+k)^2} + \frac{5}{256}\frac{k^3(5k^3+12k^2+4k-16)}{(1+k)^3}\ldots\right)$$

Die Rectification der ungeteilten Lemniskaten führt, wie wir oben nachgewiesen, auf ein analoges Integral mit reciprokem Parameter.

Bezeichnen wir auch jetzt wieder mit $k$ den Ausdruck $\frac{c^2}{q^2}$, welcher ein echter Bruch ist, so wird der Bogen $s'$ durch

$$25)\quad s' = q\frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{4}\frac{k^2}{1+k} + \frac{3}{64}\frac{k^2(3k^2+4k-4)}{(1+k)^2} + \frac{5}{256}\frac{k^3(5k^3+12k^2+4k-16)}{(1+k)^3}\dots\right)$$

Erwähnenswert ist noch die folgende Transformation.

Die Schnittpunkte $\pm a$ der grossen Achse der Cassinischen Curven, also ihre Scheitelpunkte verbinden wir mit einem beliebigen Curvenpunkte, welcher den Focalwinkel $\Theta$ hat, durch Scheitelgeraden. Dieselben mögen den (spitzen) Scheitelwinkel $\gamma$ einschliessen.

Man findet vermöge der Formel

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2ra\sin\varphi}{r^2 - a^2} \quad \text{etc.} \quad a = \sqrt{c^2+q^2}$$

schliesslich die einfache Relation

$$26)\qquad \cot\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2+q^2}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$$

Daher lässt sich anstatt $\Theta$ $\gamma$ in das Integral einführen, und man findet

$$27)\qquad s = \frac{q^2}{c^2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\frac{q^2}{c^2}\cos\gamma^2}{\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\gamma^2\right)\left(1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma^2\right)}}\,d\gamma \;{}^{*)}$$

welches noch einfacher gebaut ist, als die vorhergehenden und sich auf den Fall der Ovalen bezieht, wo $\frac{q}{c} < 1$ ist. Das Integral ist von $O$ bis $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Die Entwickelungen in Reihen führen auf

---

*) S. Schlussnote.

$$s = ka\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{array}{l} 1-k(1-\frac{1}{2}k)\cos\gamma^2+k^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2\right)\cos\gamma^4 \\ -k^3(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2-\frac{5}{16}k^3)\cos\gamma^6 \\ +k^4\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}k+\frac{3}{16}k^2-\frac{5}{16}k^3+\frac{35}{128}k^4\right)\cos\gamma^8 \end{array}\right)d\gamma$$

woraus schliesslich unter Benutzung bekannter Formeln

$$28)\quad s = ka\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}k+\frac{7}{16}k^2-\frac{11}{32}k^3+\frac{329}{1024}k^4-\ldots\right)$$

als die gesuchte Reihe für den Bogen $s$ hervorgeht. Darin bedeutet

$$k = \frac{q^2}{c^2}$$

und $a$ ist die Länge der grossen Achse.

## § 14.

## Die geometrische Construction des Additionstheorems der elliptischen Integrale 1. Gattung vermittelst der Lemniskate.

Die von Jacobi gegebene Auflösung dieses Problems gründet sich auf die Eigenschaften des Kreises. Dass die Kegelschnitte ebenfalls mit Erfolg verwertet werden können, haben wir schon früher mehrfach bewiesen. Wegen der Verwandtschaft der Lemniskaten mit den Kegelschnitten ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass auch die Lemniskate einen Beitrag zur Auflösung bringen wird. Es kommt nur darauf an, unter den mannigfachen Verhältnissen diejenigen zu treffen, welche sich den Bedingungen der Aufgabe am natürlichsten und ungezwungensten anschmiegen.

Wir legen durch die Mitte der Lemniskate einen Kreis, dessen Centrum die Coordinaten $R(\alpha)$ hat. Eine Gleichung für die beiden den Schnittpunkten entsprechenden Focalwinkel $\Theta$ und $\Theta'$, welche bekanntlich von den Leitstrahlen gebildet werden, ist nun leicht aufzustellen.

Sie ist

$$29)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2\cos 2\alpha+\frac{2c}{R}\sin\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta+2\cos\alpha^2-\frac{c^2}{R^2}=0$$

Wir führen darin eine andere Variabele ein, hervorgehend aus

$$\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\Theta = \sqrt{2}$$

und erinnern daran, dass $\gamma$ der (spitze) Scheitelwinkel ist, den 2 von den Endpunkten der Achse $\pm a$ nach dem genannten Punkte der Curve einschliessen.

Die erste Gleichung geht dann in

$$30)\qquad \operatorname{tg}\gamma^2\left(2\cos\alpha^2 - \frac{c^2}{R^2}\right) + \frac{2a}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\gamma + 2\cos 2\alpha = 0$$

über. Daran schliessen sich

$$31)\quad \begin{aligned} &\sin\gamma^4\left(\frac{c^2}{2R^2}+\sin\alpha^2\right)^2 - 2\left(\frac{c^2}{2R^2} - \sin\alpha^2\cos 2\alpha\right)\sin\gamma^2 + \cos 2\alpha^2 = 0 \\ &\cos\gamma^4\left(\frac{c^2}{2R^2}+\sin\alpha^2\right)^2 - 2\left(\frac{c^4}{4R^4} + \sin\alpha^2\cos\alpha^2 - \frac{c^2}{2R^2}\cos 2\alpha\right)\cos\gamma^2 \\ &\qquad + \left(\frac{c^2}{2R^2} - \cos\alpha^2\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Diese bilden die Basis der nachfolgenden Aufstellungen.

Die Fundamentalformel des Additionstheorems

$$F(\gamma_1) + F(\gamma_2) = F(\gamma)$$

ist bekanntlich

$$\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2 \Delta(\gamma) = \cos\gamma$$

Die constituirenden Werte sind nun aus den Gleichungen 30) und 31) bekannt, und wir haben

$$\frac{c^2}{2R^2} - \cos\alpha^2 \mp \cos 2\alpha\,\Delta(\gamma) = \cos\gamma\left(\frac{c^2}{2R^2} + \sin\alpha^2\right)$$

Wir führen

$$R\cos\alpha = x,\quad R\sin\alpha = y$$

ein und ordnen die Formel demgemäss. Man findet:

$$32)\qquad x^2(1\pm\Delta) + y^2(\cos\gamma \mp \Delta) = c^2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

Damit haben wir einen Kegelschnitt erhalten, der die Bedingungen des Theorems erfüllt.

Der geometrische Ort der Centra der durch den Mittelpunkt der Lemniskate gehenden Kreise, welche in ihren Schnittpunkten

die Scheitel-Winkel $\gamma$ als Amplituden der elliptischen Integrale 1 Gattung bestimmen und damit das Additionstheorem lösen, ist eine Ellipse

$$33) \qquad \frac{x^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 - \Delta(\gamma)}} + \frac{y^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\Delta(\gamma) + \cos\gamma}} = 1$$

oder eine Hyperbel

$$34) \qquad \frac{x^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 + \Delta(\gamma)}} - \frac{y^2}{\frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\Delta\gamma - \cos\gamma}} = 1$$

Betrachten wir den Fall der Ellipse näher.

Ihre Achsen sind

$$A^2 = \frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{1 - \Delta}, \quad B^2 = \frac{c^2 \sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\Delta + \cos\gamma}$$

Führen wir

$$\operatorname{tg} E = \frac{B}{A}$$

ein, so erhält man aus

$$\Delta = \cos E^2 - \cos\gamma \sin E^2$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin E \cos E}{\sqrt{k^2 - \sin E^4}}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin E \cos E}{\sqrt{k^2 - \sin E^2}}$$

so dass bei bestimmten $E$ und $k$ der Modulus $\gamma$ bekannt ist.

Derselbe folgt auch aus

$$35) \qquad c^2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2A^2B^2}{A^2 + B^2}$$

welche Formel geometrische Bedeutung besitzt. Es ist nämlich der rechtsstehende Ausdruck das Quadrat des Radiusvectors $\varrho$, der mit der Achse den Winkel von 45° einschliesst und also mit der Asymptote der Lemniskate (Hyperbel) zusammenfällt und eine Grenzlage des Kreises bezeichnet. Daher besteht die einfache Relation

$$36) \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{c}$$

Die Auflösung des Theorems beruht zunächst auf der Construction der Achsen der Ellipse, hervorgehend aus

$$37) \qquad \frac{2A^2}{c^2} = \frac{1 - \cos\gamma}{1 - \Delta}, \quad \frac{2B^2}{c^2} = \frac{1 - \cos\gamma}{\Delta - \cos\gamma}$$

und der Ellipse selbst. Da die Amplituden $\gamma$ und $\gamma_1$ bekannt sind, so ist der dem Scheitelwinkel $\gamma_1$ entsprechende Punkt der Lemniskate

leicht gefunden, ebenso der Mittelpunkt des Kreises, dessen zweiter Schnittpunkt den gesuchten Scheitelwinkel $\gamma_2$ als Amplitude des entsprechenden Integrals bestimmt.

Man bemerke, dass bei gegebener Ellipse der Modulus durch

$$k^2 = \frac{c^2 + 2B^2}{2(A^2 + B^2)}$$

gegeben, ist und es ist bemerkenswert, dass, wenn beide Curven confocal sind, $k^2$ gleich $\frac{1}{2}$ wird. Alsdann drückt das Integral

$$c\int \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\gamma^2}}$$

den entsprechenden Lemniskatenbogen $u$ aus, und das Additionstheorem wird zu $u_1 + u_2 = u$, worin $u_1 + u_2$ bei allen Lagen des Kreises die unveränderliche Summe oder Bogenlänge $u$ erhält.

Für die Hyperbel gelten die analogen Formeln

$$38)\qquad A'^2 = \frac{c^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{1 + \Delta}, \quad B'^2 = \frac{c^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2}{\Delta - \cos\gamma}$$

$$c^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{A'^2 B'^2}{B'^2 - A'^2}$$

$$39)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c}{\varrho'}, \quad k^2 = \frac{2B'^2 - c^2}{2(B'^2 - A^2)}$$

worin $\varrho'$ die Bedeutung wie bei der Ellipse hat, u. s. w.

Bei confocalen Hyperbeln folgt wieder $k^2 = \frac{1}{2}$ und die Integrale geben in Lemniskatenbogen über.

Aus den Entwickelungen geht hervor, dass das Theorem

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin\gamma^2}} - \int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin\gamma_1^2}} = \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin\gamma_2^2}}$$

in welchem $\gamma$ und $\gamma'$ als gegebene Grössen construirt werden können, hinsichtlich der gesuchten Amplitude $\gamma_2$ durch die Lemniskate gelöst ist, wodurch sich die Bedeutung der Lemniskate auch nach dieser Richtung offenbart.

Die zu Anfang aufgestellte Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta$ wollen wir noch kurz betrachten. Wie wir früher gezeigt, ist durch

$$u = \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2}}$$

ein Lemniskatenbogen definirt. Für zwei solcher Bogen wählen wir die Relation

$$u_1 + u_2 = K$$

worin $K$ als vollständiges Integral einen Lemniskatenquadranten ausdrückt. Die Bedingung hierfür ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\theta_2 = \sqrt{2}$$

Beachtet man das Absolutglied der genannten Gleichung, so geht daraus die Formel

$$\frac{c^2}{R^2} - 2\cos\alpha^2 = \pm \sqrt{2}\cos 2\alpha$$

oder

$$c^2 - 2x^2 = \pm \sqrt{2}(x^2 - y^2)$$

hervor, welche auf eine Ellipse

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{2-\sqrt{2}}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{\sqrt{2}}} = 1$$

und auf eine Hyperbel

$$\frac{x^2}{\frac{c^2}{2+\sqrt{2}}} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{\sqrt{2}}} = 1$$

führt, welche beide mit der Lemniskate confocal sind. Beide schneiden sich auf dem Focalkreise vom Radius $c$ in der Asymptote der Lemniskate (gleichseitigen Hyperbel). Sie sind der geometrische Ort der Centra aller durch $O$ hindurch gehenden Kreise, welche auf der Lemniskate Bogen constanter Summe begrenzen.

### § 15.

### Die elliptischen Integralfunctionen der Lemniskate.

Wir werden hier die Formeln benutzen, welche wir in unserer Abhandlung über diese Functionen entwickelt haben.

Die nachstehende werden wir besonders benutzen, da sie die einfachste ist.

Es liege vor die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi^4 - a\operatorname{tg}\varphi^3 + b\operatorname{tg}\varphi^2 - c\operatorname{tg}\varphi + d = 0$$

mit derselben ist verbunden die Function

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}=2K$$

$$k^2=\frac{A^2+2(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}{C^2+2D(1-B+D\pm\sqrt{(A-C)^2+(1-B+D)^2})}$$

Wir wenden sie an auf die Gleichung der Geraden für $\operatorname{tg}\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi^4(h^2+2c^2\cos\tau^2)-2c^2\sin2\tau\operatorname{tg}\varphi^3+2(h^2-c^2\cos2\tau)\operatorname{tg}\varphi^2$$
$$+2c^2\sin2\tau\operatorname{tg}\varphi+h^2-2c^2\sin\tau^2=0$$

und finden

$$k^2=\frac{-2c^2}{\pm\frac{1}{2}c^2-\frac{c^2}{2}+h^2-c^2\sin\tau^2}$$

Geht die Gerade durch einen Brennpunkt, so ist

$$h=c\sin\tau$$

und für das untere Zeichen wird $k^2=2$, also die Integralfunction zu

$$\Sigma\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}=2K$$

welche Lemniskatenbogen darstellt. Aus der Relation

$$u_1+u_2+u_3+u_4=2K \tag{40}$$

ergibt sich demnach der Satz, dass jede Gerade durch den Brennpunkt einer Lemniskate vier Bogen abschneidet, deren Summe der halben Lemniskate gleich ist.

$u_1$ und $u_2$ müssen von dem einen Scheitel $+a$, $u_3$ und $u_4$ von dem andern $-a$ an gerechnet werden.

Wir können diesem Satze eine weitere Ausdehnung auf den Kreis und die Lemniskate geben.

Die entsprechende Gleichung haben wir schon früher aufgestellt, sie ist

41) $$((R^2-s^2-a^2)^2+4R^2a^2\sin\alpha^2)\operatorname{tg}\varphi^4+4R^2a^2\sin2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3$$
$$+(2(R^2-s^2)-2a^4+4R^2a^2\cos2a)\operatorname{tg}\varphi^2-4R^2a^2\sin2\alpha\operatorname{tg}\varphi$$
$$+(R^2-s^2+a^2)^2-4R^2a^2\cos\alpha^2=0$$

Die Rechnung wird dadurch sehr erleichtert, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen des Modulus ein vollständiges Quadrat ist. Wir setzen wieder

$$k^2 = 2 \quad \text{also} \quad k'^2 = -1$$

und erhalten die Bedingung

$$R^4 a^4 \sin 2\alpha^2 = (R^2 - s^2)^2((R^2 - s^2)^2 + a^4 - 2a^2 R^2 \cos 2\alpha)$$

oder

$$42) \quad \frac{(R^2 - s^2)^2}{a^2} = 2\, R^2 \cos 2\alpha - c^2 + \sqrt{R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4}$$

Schreiben wir wie früher

$$R^4 - 2c^2 R^2 \cos 2\alpha + c^4 = q^4$$

als Gleichung einer Cassinischen Curve, so wird das letzte Resultat in

$$43) \qquad (R^2 - s^2)^2 = R^4 - (c^2 - q^2)^2$$

umgewandelt.

Mit jeder beliebigen Lage des Kreiscentrums ist also ein bestimmter Radius $s$ verknüpft, und der Kreis schneidet die Lemniskate in Punkten, deren entsprechende Bogen in der Relation

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2K$$

zu einander stehen. Die Bogen sind wieder zu zweien von den entsprechenden Scheiteln an gerechnet. Rechnet man sie vom Mittelpunkt der Lemniskate aus, so ist der grösste Bogen gleich der Summe der übrigen oder $u_1 = u_2 + u_3 + u_2$, wo die Zahlen auch die Quadranten bezeichnen. Der geometrische Ort aller Kreiscentra kann auch eine Cassinische Curve sein, und man bemerke wol, dass der Ausdruck $c^2 - q^2$ oder $q^2 - c^2$ für solche eine geometrische Bedeutung hat.

Demnach folgt für

$$c^2 - q^2 = \pm b^2$$

aus

$$(R^2 - s^2)^2 = R^4 - b^4$$

die Relation

$$44) \qquad s^2 = R^2 \pm \sqrt{R^4 - b^4}$$

Sehr einfach wird die Formel für $s^2$, wenn der geometrische Ort der Kreiscentra die Lemniskate selbst ist, alsdann ist $c = q$ und demnach $b = 0$. Daher ist

$$s^2 = 2R^2$$

und sehr leicht zu construiren.

Daher erhält man den Satz:

Jeder Kreis, dessen Centrum $r(\varphi)$ auf der Lemniskate liegt und einen Halbmesser

$$s = r\sqrt{2}$$

hat, schneidet die Curve in 4 Punkten, welchen Bogen entsprechen, deren grösster, vom Mittelpunkt der Lemniskate an gerechneter gleich der Summe der übrigen ist, nämlich

$$u_1 = u_2 + u_3 + u_4$$

wobei wieder die Indices die entsprechenden Quadranten bezeichnen.

Es verdient bemerkt zu werden, dass noch eine Relation zwischen den Radienvectoren $r$ der bezüglichen durch den Kreis getroffenen Lemniskatenpunkte besteht, welche genau derjenigen entspricht, welche wir für die Gerade durch den Brennpunkt schon früher entwickelt haben.

Wie wir bewiesen, ist mit jeder Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Relation

$$\Sigma\sqrt{x - h} = 0$$

verknüpft, so dass

$$\Sigma\sqrt{x} = 0$$

ist, wenn $h = 0$ wird. Die Bedingung ist nun hierfür

$$\left(\frac{a^2}{4} - b\right)^2 = 4d$$

Wir wenden nun diese Relation auf die in 83) gegebene Cosinusgleichung an, in welcher

$$\cos 2\varphi = \frac{r^2}{a^2}$$

ist, aber in dem Sinne, dass wir die reciproken Wurzeln als $x$ in obige Formel einführen. Die Relation

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0$$

führt nun zu derselben Bedingungsgleichung 42), welche ausdrückt, dass

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

ist. Die Rechnungen übergehen wir, da dieselben keine Schwierigkeiten verursachen.

Auch die auf die Additionstheoreme gegründeten Formeln

$$\frac{\Delta\varphi_1 \pm \Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_3 \pm \Delta\varphi_4} = \frac{\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)}$$

lassen eine Anwendung zu. Da nämlich

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - 2\sin\varphi^2} = \frac{r}{a}$$

ist, so gehen aus der Relation die neuen

$$\frac{r_1 \mp r_2}{r_3 \pm r_4} = -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 \pm \varphi_4)}$$

$$45)\qquad \frac{r_1 \mp r_3}{r_2 \mp r_4} = -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_3)}{\sin(\varphi_2 \pm \varphi_4)}$$

$$\frac{r_1 \mp r_4}{r_2 \pm r_3} = -\frac{\sin(\varphi_1 \mp \varphi_4)}{\sin(\varphi_2 \pm \varphi_3)}$$

hervor. Diese Formeln gelten für die Lage des Kreises, in welchem 2 Schnittpunkte $r_1 r_4$ im 1. und 4. Quadranten ($r_1 > r_4$) sich befinden, $r_3$ und $r_2$ bez. im 3. und 2. Quadranten liegen. Für eine veränderte Lage muss auf die Vorzeichen von $\varphi$ Rücksicht genommen werden.

Für die Brennpunktsgerade bestehen analoge Ausdrücke, deren Untersuchung sehr interessant ist.

Auch die übrigen Integralfunctionen können erfolgreich auf analoge Verhältnisse übertragen werden.

## § 16.

Die Gleichung des Kreises für $\operatorname{tg}\varphi$ kann auch zur Bildung einer neuen Integralfunction verwandt werden, wenn wir die $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ als Variabele betrachten und nach früher gegebenen Methoden operiren. Die Rechnungen führen zunächst auf das Differential

$$\frac{A\,d\operatorname{tg}\varphi}{2a^2R^2(A\operatorname{tg}\varphi^2 + \frac{1}{2}B\sqrt{2A^2 - \frac{1}{4}B^2 - AB\operatorname{tg}\varphi^2 - (2A + A^2)\operatorname{tg}\varphi^4}}$$

worin

$$A = \frac{(R^2 - s^2 - a^2)^2}{2a^2R^2}, \qquad B = \frac{(R^2 - s^2 + a^2)^2}{2a^2R^2}, \qquad C = \frac{(R^2 - s^2)^2 - a^4}{a^2R^2}$$

$$4AB = C^2$$

Auf die geeignete Form gebracht, resultirt bei Weglassung des Factors

46)

$$\Sigma \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{\left(\frac{4a^2Rs+(R^2-s^2)^2-a^4}{(R^2-s^2-a^2)^2+4a^2R^2}+\mathrm{tg}\varphi^2\right)\left(\frac{4a^2Rs-(R^2-s^2)^2+a^4}{(R^2-s^2-a^2)^2+4a^2R^2}-\mathrm{tg}\varphi^2\right)}}$$

Um dies Integral auf die Normalform zu bringen, führen wir

$$\cos\gamma = \sqrt{\frac{(R^2-s^2-a^2)^2+4a^2R^2}{4a^2Rs-(R^2-s^2)^2+a^4}}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$k^2 = \frac{4a^2Rs-(R^2-s^2)^2+a^4}{8a^2Rs}$$

ein, und man erhält die Function

$$47)\quad \int\frac{d\gamma_1}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma_1{}^2}}+\int\frac{d\gamma_2}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma_2{}^2}}+\int\frac{d\gamma_3}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma_3{}^2}}$$
$$+\int\frac{d\gamma_4}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma_4{}^2}} = \int\frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin\gamma^2}}$$

in welcher die Constante ein Integral ist.

Zu bemerken ist der Fall $R = s$, wonach der Kreis durch den Anfangspunkt $O$ geht. Es wird

$$\cos\gamma = \mathrm{tg}\,\varphi$$

und jetzt wird $\gamma$ zum Scheitelwinkel, der dem Punkte $r(\varphi)$ entspricht.

$$k^2 = \tfrac{1}{2}+\frac{c^2}{4R^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{R}{c}$$

welche Formeln man mit früheren vergleichen möge.

Werden in dem Hauptintegral noch gewisse Grössen gleich null gesetzt, so resultiren entsprechende Integrale, die in einfachern Fällen integrirt werden können und neue Beziehungen zu Tage fördern.

Analoge Functionen lassen sich aus der Gleichung für $\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Theta$ gewinnen. Sie ist

$$48)\quad g^2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4+2gR\sin\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3+(2g(g-c)-R^2\cos2\alpha)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2$$
$$+2R(g-c)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\Theta+(g-c)^2-2R^2\cos\alpha^2 = 0$$

$$g = \frac{s^2-R^2}{2c}$$

Hierin betrachten wir $\sin\alpha$ als variabel und erhalten

$$49)\quad \Sigma \int \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta\, d\tfrac{1}{2}\Theta}{\sqrt{-(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2+2)\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2+\frac{g^2-cg-R^2-Rs}{g^2}\right)\times \left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2+\frac{g^2-cg-R^2+Rs}{g^2}\right)}} = C$$

Substituiren wir

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2+\frac{2g^2-(R-s)^2}{2g^2}=\frac{2Rs}{g^2}\cos\psi$$

$$k^2=\frac{4Rs}{g^2+(R+s)^2}$$

so erscheint die Normalform

$$50)\quad \int\frac{d\psi_1}{\sqrt{1-k^2\sin\psi_1^2}}+\int\frac{d\psi_2}{\sqrt{1-k^2\sin\psi_2^2}}+\int\frac{d\psi_3}{\sqrt{1-k^2\sin\psi_3^2}}+\int\frac{d\psi_4}{\sqrt{1-k^2\sin\psi_4^2}}=C$$

$$\cos 2\varphi=\frac{2g^2}{R^2+s^2+2Rs\cos 2\psi}$$

Wie vorhin können für die Constanten des Hauptintegrals Modificationen eingeführt werden, welche neue Relationen hervorrufen.

Entwickelt man die Formel für die Winkelsumme, so erhält man

$$51)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4)=\frac{2cR\sin\alpha}{R^2-c^2}=\operatorname{tg}\Theta$$

Der Ausdruck zur rechten hat einen leicht angebbaren Wert, es ist nämlich $\Theta$ der Winkel, welchen die vom Kreiscentrum $R(\alpha)$ nach den Brennpunkten gezogenen Leitstrahlen mit einander einschliessen.

Daher ist

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4=2\Theta$$

welche Formel nicht nur für die Lemniskate, sondern auch, wie leicht zu beweisen ist, für alle Cassinischen Curven gilt. Die Summe $\Sigma\Theta$ ist überhaupt constant, wenn die Kreiscentra auf einem die Brennpunkte enthaltenden Kreise liegen.

Wir wollen noch für die Cassinischen Linien die Gerade durch den Brennpunkt einer Untersuchung unterwerfen. Ihre Neigung zur Achse sei $\tau$. Man hat

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^4-2\cot\tau\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3+\frac{q^2}{c^2}(1+\cot\tau^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^2-2\cot\tau\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta-1=0$$

Wir nehmen $\cot \tau$ als Variabele an und bestimmen die entsprechende Integralfunction

$$\Sigma \int \frac{d\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{\left(1-\frac{q^2}{c^2}\sin\frac{1}{2}\Theta^2\right)\left(1+\frac{q^2}{c^2}\cos\frac{1}{2}\Theta^2\right)}}$$

welche wir mittelst der Relation

$$\cot\tfrac{1}{2}\Theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+q^2}}\operatorname{tg}\gamma$$

transformiren. Hierin ist $\gamma$ der Scheitelwinkel, welcher uns aus früherem schon bekannt ist. Die Function vereinfacht sich dann zu

$$\text{52)} \quad \int \frac{d\gamma_1}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_1^2}} + \int \frac{d\gamma_2}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_2^2}} + \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{1-\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_3^2}} + \int \frac{d\gamma_4}{\sqrt{1+\frac{q^4}{c^4}\cos\gamma_4^2}} = C$$

Der eingeführte Scheitelwinkel $\gamma$ besitzt demnach für die Transformationen dieser Integrale bedeutenden Wert.

Hinsichtlich der weitern Anwendung der elliptischen Integralfunctionen erinnern wir daran, dass zwischen den Curven dritten und vierten Grades und der Lemniskate eine merkwürdige Verwandtschaft besteht, welche sich auf die Theorie der Invarianten dieser Curven gründet, und welche wir schon früher einer dynamischen Interpretation unterworfen haben.

## § 17.

## Conforme Abbildungen lemniskatischer Curven.

Die Lemniskate gibt Veranlassung zur Aufstellung einer merkwürdigen Curve, welche durch die Leichtigkeit, mit welcher sie sich in die Theorie der conformen Abbildungen einführt, einiger Aufmerksamkeit wert erscheint. Sie charakterisirt sich durch die Gleichung

$$\text{53)} \quad y = \log\left(\sqrt{1+\cos x^2}+\cos x\right)$$

oder auch durch

$$54)\quad \begin{aligned} e^{y} &= \sqrt{1+\cos x^2}+\cos x \\ e^{-y} &= \sqrt{1+\cos x^2}-\cos x \end{aligned}$$

von welcher wir zeigen wollen, dass sie für die Theorie der isogonalen Verwandtschaft eine gewisse Bedeutung besitzt. Die Curve, welche ungefähr einer Wellenlinie ähnlich ist, zeichnet sich durch besondere Eigenschaften aus.

Aus den letzten beiden Darstellungen folgen

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})$$
$$\sqrt{1+\cos x^2} = \tfrac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})$$

Da aber bekanntlich

$$\sin iy = i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

so erhalten wir eine einfache Relation

$$55)\quad \begin{aligned} \sin ix &= i\cos x \\ \cos iy &= \sqrt{1+\cos x^2} \end{aligned}$$

Der Differentialquotient ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x^2}}$$

und die Rectification der Curve führt auf

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin x^2}}$$

welcher Ausdruck mit dem Integral des Lemniskatenbogens übereinstimmt, wenn $x = \frac{1}{2}\Theta$ gesetzt wird.

$\Theta$ ist bekenntlich der Focalwinkel, welchen 2 Leitstrahlen $p$, $p'$ vom Punkte $r(\varphi)$ nach den Brennpunkten $\pm 1$ mit einander bilden.

Daher ist auch

$$56)\quad p = e^{y}, \qquad p' = e^{-y}, \qquad pp' = 1$$

Bevor wir nun die eigentliche Bedeutung der Curve entwickeln, halten wir es für nützlich, den oben gegebenen Relationen eine einfache physikalische Grundlage zu geben.

Wir nehmen an, in einem Bogen der Lemniskate befände sich eine leuchtende Materie, die nach bekanntem Gesetz eine kleine im

Mittelpunkt der Lemniskate sich befindende Kugel in einer gewissen Stärke beleuchtet. Um den Lichtbetrag oder die Stärke dieser Beleuchtung zu bestimmen, haben wir zunächst das Bogendifferential $ds$ durch $r^2$ zu dividiren und mit dem cos des Ausstrahlungswinkels $2\varphi$ zu multipliciren. Der Ausdruck würde sein, wenn

$$k = 2c = 2$$

gesetzt wird,

$$J = \int k \frac{ds}{r^2} \cos 2\varphi \quad \text{oder} \quad J = s \tag{57}$$

weil

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ist; daher folgt, dass die Stärke der Beleuchtung in proportionalem Verhältniss mit dem Bogen wächst.

Wir nehmen ferner an, dass im Mittelpunkt $O$ eine kleine in der $X$ Achse sich befindende Fläche von einem Bogen der Curve in obigem Sinne beleuchtet sei.

Jetzt tritt der Unterschied ein, dass das letzte Integral noch mit $\sin\varphi$ multiplicirt werden muss, so dass die Stärke der Beleuchtung durch

$$k \int \frac{ds}{r^2} \cos 2\varphi \sin\varphi$$

und wegen

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

durch

$$ak \int \frac{\cos 2\varphi}{r^2 \sqrt{\cos 2\varphi}} \sin\varphi\, d\varphi$$

definirt ist. Das Integral ist leicht zu erhalten, man findet

$$J = -\int \frac{k}{2c} \log(\sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x) + \text{Const.}$$

Wir setzen

$$k = 2c = 2$$

und beachten, dass $J$ für $x = 0$ verschwindet.

Unter Berücksichtigung der eingeführten Curve hat man also

$$J = h - y = y' \tag{58}$$

worin $h$ die Maximalordinate der Curve im Punkte $x = 0$ bezeichnet.

Die Beleuchtungsstärke wächst also jetzt proportional der entsprechenden Ordinate der lemniskatischen Curve

$$\sin ix = i \cos x$$

Endlich betrachten wir noch die Wirkung des leuchtenden Bogens auf eine kleine im Mittelpunkt der Lemniskate sich befindende und in der $Y$-Achse liegende Fläche.

Das Integral wird jetzt

$$J = k\int \frac{ds}{r^2}\cos 2\varphi \cos\varphi$$

wobei wir

$$\cos 2\varphi = \cos \tfrac{1}{2}\Theta^2$$

berücksichtigen müssen.

Das Endresultat ist

$$J = \frac{k}{2c}\,\Theta$$

oder

$$59) \qquad J = \tfrac{1}{2}\Theta$$

In diesem Falle wächst die Beleuchtung proportional mit der Abscisse der Curve

$$\sin ix = i\cos x$$

wobei wir hinsichtlich des 1. Falls daran erinnern, dass die Lemniskate mit der ihr verwandten gleiche Rectificationsverhältnisse bebesitzt, so dass die eine Curve für die andere genommen werden kann. Sie kann also als eine modificirte Lemniskate betrachtet werden, deren Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\, y = \cos x$$

ist. Umschreibt ein Punkt die Lemniskate in gleichförmiger Bewegung, so durchwandert in entsprechend constanter Bewegung der analoge Punkt die verwandte Curve in ununterbrochenem Zuge und befinden sich beide in periodischer Wiederkehr bald auf der positiven, bald auf der negativen Seite der Curve.

Da die Curve in unendlichem Zuge verläuft, könnte man sie Zuglinie oder Tractrix der Lemniskate, oder auch kurz Lemniskatrix nennen, wenn man letztere Benennung gelten lassen will.

Die Quadratur derselben ist leicht durchführbar, wenn man die Reihe

$$\log(\sqrt{1+\cos x^2}+\cos x) = \cos x - \tfrac{1}{2}\frac{\cos x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos x^5}{5} - \ldots$$

benutzt. Die Fläche ist demnach

$$\int y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos x^5}{5}\cdots\right)$$

und führt auf die interessante Reihe

$$60)\qquad \int y\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$$

Vergl. Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. XV. 229. Catalan.

## § 18.

### I.

Schon an der Form der Gleichung

$$\sin iy = i\cos x$$

ist unmittelbar zu erkennen, dass die Curve in einfachster Weise auf Abbildungsaufgaben, oder auf Functionen complexen Arguments anwendbar ist, daher wollen wir sie jetzt in diesem Sinne untersuchen.

In der Zahlenebene ist ein beliebiger Punkt $z$ durch $x + iy$ definirt. Bilden wir eine Function von $z$, so entspricht jedem Punkte $z$ ein von der Function abhängiger conformer Punkt in der Abbildungsebene $Z$. Beschreibt $z$ in der ersten Ebene eine gewisse Curve, so wird in der Functionalebene der entsprechende ebenfalls eine Curve beschreiben, deren Bildungsgesetz von der Art der Function und andern Verhältnissen abhängt. So führt bekanntlich die Abbildung von $\sin(x+iy)$, $\cos(x+iy)$ auf confocale Kegelschnitte, wenn $x$ oder $y$ als constant betrachtet wird. Wir werden in unserm Falle aber $x$ und $y$ als veränderlich ansehen und annehmen, dass sie Coordinaten der Lemniskatrix seien. Wir zeichnen also in der $z$ Ebene diese Curve ein und versuchen, die conformen Abbildungen derselben für alle möglichen Functionen darzustellen. Dabei bemerken wir, dass die beiden Relationen

$$\sin iy = i\cos x$$
$$\sin iy = \sqrt{1+\cos x^2}$$

für alle Fälle massgebend sind.

Als Function complexen Arguments wählen wir zuerst

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy + \sin x\ \sin iy$$

Die obigen Relationen hierin eingeführt, geben

$$X + iY = \cos x\sqrt{1+\cos x^2} + \sin x\cos x \,.\, i$$

also

$$X = \cos x\sqrt{1+\cos x^2}$$
$$Y = \sin x\cos x$$

Man findet

$$X^2 + Y^2 = 2\cos x^2$$
$$X^2 - Y^2 = 2\cos x^4$$

also

$$(X^2 + Y^2)^2 = 2(X^2 - Y^2) \tag{61}$$

woraus das interessante Resultat sich ergibt, dass für die eingeführte Function die Abbildung der Lemniskatrix die ursprüngliche Lemniskate mit den Brennpunkten $\pm 1$ ist.

Man kann sie mit den oben genannten Kegelschnitten in einfachen Zusammenhang bringen, indem wir an bekannte Sätze erinnern:

Den Linien

$$x = a \pm 2n\pi$$

in der $z$ Ebene entspricht in der $Z$ Ebene die Hyperbel

$$\frac{X^2}{\cos a^2} - \frac{Y^2}{\sin a^2} = 1$$

Daher sind die Halbachsen durch

$$A' = \cos\tfrac{1}{2}\Theta = \cos x, \quad B' = \sin x$$

und demnach $a$ durch $\frac{1}{2}\Theta$ oder den halben Focalwinkel der Lemniskate bezeichnet.

Ferner entspricht den Linien

$$y = \pm y$$

die Ellipse

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^y - e^{-y})^2} = 1$$

deren Halbachsen

$$A = \sqrt{1+\cos x^2}, \quad B = \cos x$$

sind. Beachten wir

$$\cos x = \cos\tfrac{1}{2}\Theta = \sqrt{\cos 2\varphi}$$

so sind die Curven durch

$$\frac{X^2}{2\cos\varphi^2} + \frac{Y^2}{\cos 2\varphi} = 1, \quad \frac{X^2}{\cos 2\varphi} - \frac{Y^2}{2\cos\varphi^2} = 1 \tag{62}$$

bestimmt. Daher folgt: Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der vorstehenden confocalen Kegelschnitte ist eine confocale Lemniskate, deren Schnittpunkte die Polarwinkel $\varphi$ und die Focalwinkel $\Theta$ haben.

Ferner: Bewegt sich der 0 Punkt eines rechtwinkeligen Achsenkreuzes in parallelen Lagen des letztern mit den Achsen auf der Lemniskatrix, so entspricht in der $Z$ Ebene dieser Bewegung unter Voraussetzung der obigen Function die Wanderung veränderlicher confocaler Kegelschnitte, deren Durchschnittspunkte eine Lemniskate beschreiben.

Wir entwickeln den Differentialquotienten

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\tau' = \frac{\cos 2x \sqrt{1+\cos x^2}}{\sin x (1+2\cos x^2)}$$

und da für die Lemniskate

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x^2}}$$

woraus

$$\operatorname{tg}\tau^2 = \frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}$$

so folgt

$$\operatorname{tg}\tau \operatorname{tg}\tau' = \frac{2\cos x^2 - 1}{2\cos x^2 + 1}$$

Die Elimination von $\cos x$ ergibt

$$\operatorname{tg}\tau' = \frac{1-3\operatorname{tg}\tau^2}{3\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\tau^3}$$

also ist

$$\cot\tau' = \operatorname{tg} 3\tau$$

$$\tau' = 90^0 - 3\tau$$

und weil

$$\tau' = 90^0 - 3\varphi$$

folgt

63) $$\tau = \varphi$$

Daher ist der Tangentenwinkel $\tau$ der Lemniskatrix gleich dem entsprechenden Polarwinkel der Functionalcurve in den Punkten, deren Bogen einander gleich sind. Hinsichtlich des Abgeleiteten bemerke man den Differentialquotienten von $Z = \cos z$, er ist

$$\frac{dZ}{dz} = \cos(90^0 - 2\varphi) + i\sin(90^0 - 2\varphi)$$

woraus unmittelbar das Vergrösserungsverhältniss = 1 beider Curven nebst der Lage der Tangenten ihrer conformen Punkte sich ergibt.

II.

Wir bilden jetzt die Function $\sin(x+iy)$ ab.

Die Entwickelungen geben für $Z = \sin z$

$$X+iY = \sin x\sqrt{1+\cos x^2}+\cos x^2 i$$
$$X = \sin x\sqrt{1+\cos x^2}$$
$$Y = \cos x^2$$

Daraus folgt

64)
$$X^2+Y^2 = 1$$

Daher ist die conforme Abbildung unserer Curve der Einheitskreis.

Der Differentialquotient ist

$$\frac{dZ}{dz} = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

wo $r(\varphi)$ die entsprechenden Polarcoordinaten des Lemniskatenpunktes sind, wonach das Vergrösserungsverhältniss $1:r$ ist.

Wir wollen dieses Ergebniss in dynamischem Sinne verwerten, indem wir die Bewegungsverhältnisse in beiden Curven discutiren. Dabei nehmen wir die Bewegung in der Lemniskate und verwandten Curve als gleichförmig an.

Wir differentiiren $X$ und $Y$ nach der Zeit $t$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{2\cos x^3}{\sqrt{1+\cos x^2}}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{2\cos x^2 \sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}}\frac{dx}{dt}$$

und setzen

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = v^2$$

worin $v$ die gesuchte Geschwindigkeit im Kreise $r=1$ ist, welche der gleichförmigen

$$v_0 = \frac{ds}{dt}$$

in der Lemniskate entspricht.

Nun ist aber

$$ds = \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{1+\cos x^2}}$$

also

$$\frac{ds}{dt} = v_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x^2}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Daher kann man $\frac{dx}{dt}$ durch

$$\frac{ds}{dt} = v_0$$

vermittelst

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos x^2}$$

in den obigen Formeln für $v^2$ ersetzen, und führt man diese Rechnungen durch, so erhält man

$$v = v_0 \sqrt{1 + \cos 2x} = v_0 \sqrt{2} \cos x$$

Erinnert man sich aber, dass

$$\cos x = \cos \tfrac{1}{2}\Theta = \frac{r}{a} = \frac{r}{c\sqrt{2}}$$

ist, so folgt wegen $c = 1$

65)
$$v = v_0 r$$

oder

$$\frac{v}{v_0} = r$$

wie es sein muss.

$r$ ist der Radiusvector des entsprechenden Lemniskatenpunktes.

Der gleichförmigen Bewegung in der Lemniskate entspricht also eine gewisse beschleunigende Bewegung im Focalkreise, welche dem Radiusvector $r$ in der erstern proportional ist.

Nun können wir aber nachweisen, dass diese Bewegung mit der eines schweren Punktes im Halbkreise $r = 1$ identisch ist.

Bezeichnen wir den Elongationswinkel mit $2\varphi$, so führen die mechanischen Principien auf das Zeitintegral

$$t = \int \frac{d\,2\varphi}{\sqrt{2g \cos 2\varphi}}$$

also auf

$$t = \frac{s}{\sqrt{g}}$$

während die Geschwindigkeit durch

$$v = \sqrt{2g \cos 2\varphi}$$

und also in Uebereinstimmung mit dem Obigen durch

$$v = \sqrt{g}\, r$$

ausgedrückt wird. Die constante Geschwindigkeit in der Lemniskate ist demnach $\sqrt{g}$.

Man bemerke noch die aus der Relation

$$Y = \cos x^2 = \cos 2\varphi$$

hervorgehende fernere Uebereinstimmung mit dem Abgeleiteten.

Vielleicht dürfte folgende Entwickelung als Beweis des eben Mitgeteilten nicht überflüssig sein:

Der Lemniskatenbogen wird durch das Integral

$$s = \int \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

dargestellt. Wir differentiiren es nach der Zeit $t$ und finden

$$v_0 = \frac{ds}{dt} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{d\varphi}{dt}$$

Eine nochmalige Differentiation führt auf das Resultat

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{v_0^2}{a^2}\sin 2\varphi = 0 \tag{66}$$

welches die bekannte Differentialgleichung der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis ist.

## III.

Wir legen jetzt die Function $\operatorname{tg}(x+iy)$ zu Grunde.

Hierfür besteht zunächst

$$X + iY = \frac{\sin 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} - e^{-2y})i}{\cos 2x + \frac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y})}$$

ferner

$$\tfrac{1}{2}(e^{2y} + e^{-2y}) = 1 + 2\cos x^2$$

u. s. w., also

$$X = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x, \qquad Y = \frac{\sqrt{1+\cos x^2}}{2\cos x}$$

$$Y^2 - X^2 = \tfrac{1}{2} \tag{57}$$

Die vorliegende Function bildet demnach die Lemniskatrix als gleichseitige Hyperbel mit den Brennpunkten $\pm 1$ ab.

Wenn also der Schnittpunkt zweier senkrecht auf einander stehenden, den Achsen bez. parallelen Geraden eine Lemniskatrix be-

schreibt, so wandern in der $Z$-Ebene die Durchschnitte der jenen Parallelen entsprechenden variabelen Kreise auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{v_0}{r^2}$$

Das letzte Resultat kann direct oder auch aus dem absoluten Betrage des Differentialquotienten hergeleitet werden.

Die Abbildung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + iy)$ führt auf den Kreis

$$X^2 + (Y + 1)^2 = 2 \tag{68}$$

Interessant ist die conforme Abbildung der Curve für die Function

$$\log \sin (x + iy) = \log (\sin x \sqrt{1 + \cos x^2} + \cos x^2 i)$$

Wir haben hier

$$L(u + iv) = \tfrac{1}{2} \log (u^2 + v^2) + i \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$$

anzuwenden. Das Resultat ist

$$X = 0$$

$$Y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x^2}{\sin x \sqrt{1 + \cos x^2}}$$

also

$$Y = \frac{\pi}{2} - 2\varphi \tag{69}$$

Da $X$ verschwindet, so entspricht der gleichmässigen Bewegung in der Lemniskatrix eine Art oscillirender Bewegung in der $Y$-Achse um eine Gleichgewichtslage $\frac{\pi}{2}$.

Um die Geschwindigkeit in den verschiedenen Phasen zu berechnen, differentiiren wir $Y$ nach $t$

$$\frac{dY}{dt} = v = -2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Da aber

$$v_0 = \frac{ds}{dt} = \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dt}$$

ist, so folgt

$$v = v_0 r$$

oder die Geschwindigkeit der oscillirenden Bewegung ist direct proportional dem Radiusvector der Lemniskate im conformen Punkte.

Die Abbildung $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + iy)$ ist bemerkenswert wegen der Congruenz beider Curven.

## IV.

Eine allgemeinere Betrachtung zeigt, dass die oben aufgestellten Relationen und Sätze nur specielle Resultate sind, die leicht auf alle Lemniskaten erweitert werden können.

Anstatt der einfachen Function $\cos(x+iy)$ führen wir jetzt ein

$$\cos(x+iy)^n = X+iY = R(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Man findet

$$\cos x\sqrt{1+\cos x^2} = R^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\psi}{n}$$

$$\sin x = R^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\psi}{n}$$

woraus

$$R^2 = 2^n\cos^n\frac{2\psi}{n} \tag{70}$$

folgt und eine Curve höherer Ordnung vorstellt, wenn $n>2$ ist.

Ist $n=1$, so erhalten wir eine Lemniskate. Für $n=2$ wird die Curve ein Kreis

$$R = 2\cos\psi$$

Setzen wir $\frac{2}{n}$ statt $n$, so folgt die Curve

$$R^n = 2\cos n\psi$$

welche für $n=\frac{2}{3}$ in die Fusspunktcurve der Lemniskate übergeht.

Wird $n$ negativ $-n$ gesetzt, so erscheint das Curvensystem

$$R^n\cos n\varphi = 2 \quad \text{(s. Schlussnote.)}$$

welches für $n=2$ in eine gleichseitige Hyperbel übergeht.

Die Abbildung der Curve für $\sin(x+iy)^n$ führt merkwürdiger Weise für alle $n$ auf den Einheitskreis, wie man leicht findet.

Die Uebertragung der durch $\operatorname{tg}(x+iy)^n$ vermittelteren Function führt auf die Curve

$$R^{\frac{2}{n}}\cos\frac{2\varphi}{n} = -\tfrac{1}{2}$$

von $\operatorname{tg}(x+iy)^{\frac{2}{n}}$ auf

$$R^n\cos n\varphi = -\tfrac{1}{2}$$

von $\operatorname{tg}(k+iy)^{-\frac{2}{n}}$ auf

$$R^n = -2\cos n\varphi$$

während die Abbildung $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+iy)^{\frac{1}{\pm n}}$ die Curve

71) $$R^n + 2\sin n\varphi = \frac{1}{R^n}$$

liefert, welche für $n = \pm 2$ in die Cassinische Linie übergeht.

Analog überträgt sich die Lemniskatrix bei Einführung der Function $\cos 2(x+iy)^{\frac{1}{2}}$ auf die Curve

$$R^{2n} - 2R^n \cos n\varphi = 3$$

und der Function $(x+iy)^{\frac{1}{n}}$ entspricht die Abbildung

72) $$\sin iR^n \sin n\varphi = iR^n \cos n\varphi$$

welche für $n = 1$ in die Lemniskatrix, für $n = 2$ in

$$\cos(x^2 - y^2) = \tfrac{1}{2}(e^{2xy} - e^{-2xy})$$

übergeht. In analoger Weise lassen sich die Functionen arc sin, cos, tang verwerten, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

Erwähnt möge noch werden, dass die allgemeinere Form

$$\sin iy = \frac{k}{k'} i \cos x$$

in ähnlicher Art wie vorhin diskutirt werden kann, und dass die Rectification dieser Curve

73) $$y = \log \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin x^2} + k\cos x}{k'}$$

auf das elliptische Integral

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin x^2}}$$

führt.

## V.

Die allgemeinste auf die Eigenschaften der Cassinischen Linien basirte Curve ist nun die, deren Gleichung durch

74) $$y = \log(\sqrt{h^2 + \cos x^2} + \sqrt{h^2 - \sin x^2})$$

charakterisirt ist und die Lemniskatrix als speciellen Fall enthält. Sie kann auch

$$\cos iy = \sqrt{h^2 + \cos x^2}$$

75)

$$\sin iy = \sqrt{h^2 - \sin x^2}\, i$$

geschrieben werden und hat die merkwürdige Eigenschaft, dass die Rectification dieser Curve genau auf dasselbe Integral führt, welches bei der Cassinischen Linie auftritt.

Daher sind die vorhin gegebenen Auseinandersetzungen bei der speciellen Curve einer Uebertragung auf die allgemeinere fähig. Der Differentialquotient der Curve ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{(h^2 + x^2)(h^2 - \sin x^2)}}$$

der Bogen

$$s = h \int \sqrt{\frac{h^2 + \cos 2x}{(h^2 + \cos x^2)(h^2 - \sin x^2)}}\, dx, \qquad h = \frac{c}{q}$$

Daher ist wieder $x = \frac{1}{2}\Theta$ oder dem halben Focalwinkel gleich.

Ist der entsprechende Bogen der Cassinischen Linie $S$, so folgt nach früherem

76)
$$\frac{S}{s} = \frac{q^2}{c}$$

Die bezüglichen Bogen beider Curven stehen in constantem Verhältniss.

Vermittelst der Function $\cos(x + iy)$ verwandelt sich die allgemeine Lemniskatrix in

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 + X^2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 - Y^2} = 1$$

d. i. in eine Cassinische Curve

77)
$$(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) = h^4 - 1$$

mit den Brennpunkten $\pm 1$. Wie früher ist nun leicht der Satz abzuleiten, dass der geometrische Ort der Schnittpunkte der conform veränderlichen confocalen Kegelschnitte

$$\frac{X^2}{h^2 + \cos x^2} + \frac{Y^2}{h^2 - \sin x^2} = 1$$

78)

$$\frac{X^2}{\cos x^2} - \frac{Y^2}{\sin x^2} = 1$$

eine Cassinische Linie ist.

Die Abbildung für $\sin(x + iy)^n$ führt wiederum auf einen Kreis

79) $$X^2 + Y^2 = h^{2n},\quad R = h^n,\quad v = v_0\sqrt{h^2 + \cos 2x}$$

und der gleichförmigen Bewegung $v_0$ entspricht die conforme

$$v = \frac{v_0}{q} r$$

Die Abbildung von $\operatorname{tg}(x+iy)$ gibt

80) $$R^4\left(1-\frac{1}{h^4}\right) + 2R^2\cos 2\varphi + 1 = 0$$

Allgemeiner ist die Uebertragung von $\cos(x+iy)^{-\frac{1}{n}}$ durch die Curve

81) $$(1-h^4)R^{4n} - 2R^{2n}\cos 2n\varphi - 1 = 0$$

vermittelt. Bei der Abbildung von

$$\log\sin(x+iy)$$

ergibt sich nach früherem analog

82) $$X = \operatorname{tg} h$$
$$Y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r^4-(q^2-c^2)}{(q^2+c^2)^2-r^4}}$$

so dass auch hier eine oscillirende oder periodische Bewegung auftritt, welche der gleichförmigen in der Lemniskate entspricht.

## § 19.

## Die Jonoiden.

Im Anschluss an das Vorhergehende wollen wir, aber unabhängig von der Methode des Imaginairen oder der conformen Abbildung, nachweisen, dass der Verwandtschaft der Curven eine solche der Bewegungen zur Seite steht. Man kann nämlich die Frage aufwerfen, ob es möglich sei, bestimmte Bewegungsverhältnisse der einen Curve auf eine verwandte andere derart zu übertragen, dass diese Verhältnisse sich in Ort, Zeit und Geschwindigkeit gegenseitig entsprechen. Diese Curven, welche wir Jonoiden nennen wollen, haben in so fern mit dem Hamilton'schen Hodographen einige Aehnlichkeit, als sie in ihren Radienvectoren die variabele Geschwindigkeit des Punktes nach Grösse, nicht aber nach Richtung graphisch darstellen.

Dagegen wird der Polarwinkel des bewegten Punktes als Focalwinkel auftreten, und die Aufgabe demnach dahin bestimmt sein, eine Relation zwischen Ort und Geschwindigkeit zu finden, welche der entsprechenden Uebertragung fähig ist.

Geometrisch verhält sich die Sache nun so:

Von den beiden Brennpunkten $\pm c$ einer noch zu suchenden Curve ziehen wir nach einem Curvenpunkt Leitstrahlen der Art, dass sie einen Winkel $\Theta$ einschliessen, welcher dem Polarwinkel $\Theta$ der Curve $r(\Theta)$, in welcher die Bewegung erfolgt, gleich ist. Zugleich soll der Radiusvector $R$, welcher den Scheitelpunkt des Winkels $\Theta$ mit dem Anfangspunkt verbindet, der Geschwindigkeit $v$ in der ersten Curve gleich sein. $R$ habe gegen die Achse die Neigung $\varphi$. Geometrisch ausgedrückt, heisst die Bedingung

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2Rc\sin\varphi}{R^2 - c^2}$$

83)

$$r(\Theta) = \text{Const.}$$

$$v = R = \mathfrak{f}(r)$$

Demnach hat man in den Bewegungsgleichungen stets die Geschwindigkeit $v = R$ zu setzen, ferner aus den beiden letzten Relationen den Vector $r$ zu eliminiren und den aus der Resultante erhaltenen Polarwinkel $\Theta$ in die erste Relation zu substituiren.

### 1. Die Centralbewegung $u = \frac{h^2}{r^2}$

Wir wollen unter diesen Voraussetzungen die Jonoiden der planetarischen Bewegungen oder allgemeiner die der Centralbewegung nach Newton'schen Gesetz $\frac{h^2}{r^2}$ zu bestimmen suchen.

Die Polargleichung derselben ist

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\Theta}$$

Die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2u}{r} - h}, \qquad h = \frac{u}{a}$$

Aus der letzten Relation folgt vermöge $v = R$

$$R^2 = \frac{2u}{p}(1 + e\cos\Theta) - h$$

Da aber

$$\cos\Theta = \frac{R^2 - c^2}{\sqrt{R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4}}$$

ist, so geht die vorletzte Gleichung über in

$$R^2 = \frac{2u}{p}\left(1 + \frac{e(R^2 - c^2)}{\sqrt{R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4}}\right) - h$$

oder in

$$R^2 - \left(\frac{2u}{p} - h\right) = \frac{2ue}{p}\,\frac{R^2 - c^2}{\sqrt{R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4}}$$

Wir führen ein

$$c^2 = \frac{2u}{p} - h, \quad q^2 = \frac{2ue}{p}$$

also

$$c = \sqrt{\frac{2u}{p} - h} = v(p)$$

so resultirt

$$84) \qquad R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 = \frac{4u^2e^2}{p^2}$$

und man kann schon jetzt das Resultat aussprechen, dass die Jonoiden der Centralbewegung Cassinische Curven sind.

Ferner wird sich zeigen, dass den drei Fällen dieser Bewegung in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln die aus getrennten Ovalen, bez. die Schleifenlemniskate und die aus einem Ganzen bestehenden Cassinischen Linien entsprechen.

Die Unterscheidung dieser Fälle beruht auf der Untersuchung des Ausdrucks $\frac{4u^2e^2}{p^2}$, der entweder $\lesseqgtr c^4$ sein kann.

In Folge der Bedeutung von $c$ haben wir also die Relation

$$\frac{2ue}{p} \lesseqgtr \frac{2u}{p} - h$$

geometrisch zu deuten.

Es ist zunächst

$$2ue \lesseqgtr 2u - hp$$

und da

$$h = \frac{u}{a}$$

so ist

$$\frac{p}{a} \lesseqgtr 2(1-\varepsilon)$$

und wegen

$$p = \frac{b^2}{a}$$

folgt schliesslich

$$c \lesseqgtr a$$

Diese Beziehung bezeichnet aber bekanntlich die Art des Kegelschnitts, und es gilt demnach der Satz, dass die Jonoide der planetarischen oder elliptischen Bewegung eine lemniskatische Ovale, die der kometarischen oder parabolischen Bewegung eine Schleifenlemniskate, die der hyperbolischen Bewegung eine aus einem Zuge bestehende Cassinische Curve ist.

Diese Curve hat also die Eigenschaft, dass, wenn der Polarwinkel oder die wahre Anomalie des Himmelskörpers als Focalwinkel $\Theta$ in sie eingezeichnet ist, der entsprechende Radiusvector $R$ die Grösse der Geschwindigkeit darstellt. Ist umgekehrt die Geschwindigkeit gegeben, so erhält man mit Leichtigkeit den zugehörigen Polarwinkel.

Welche Bedeutung $c$ hat, erkennt man sofort aus der Formel

$$c = v_{(p)}$$

Den Fall der Parabel wollen wir noch etwas näher betrachten.

In der $Y$-Achse der Lemniskate ziehen wir von einem Punkte $y = n$ eine Tangente an die Curve. Der Berührungspunkt habe den Polarwinkel $\varphi$, den Focalwinkel $\Theta$. Aus

$$\frac{n}{r} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 3\varphi}, \quad \cos 2\varphi = \cos \tfrac{1}{2}\Theta^2, \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ergibt sich leicht eine Gleichung für $\cos \frac{1}{2}\Theta^2$ nämlich

$$(\cos \tfrac{1}{2}\Theta^2)^3 - \frac{3}{4\left(1+\frac{c^2}{n^2}\right)}(\cos \tfrac{1}{2}\Theta^2) - \frac{1}{4\left(1+\frac{c^2}{n^2}\right)} = 0$$

Setzen wir

$$\frac{c}{n} = \frac{t}{c}$$

und entwickeln nach Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta$, so ergibt sich

85) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta^3 = 2\frac{t}{c}$$

als diejenige Gleichung, welche das Kometenproblem löst.

Die Excentricität ist $c = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k}$, wie aus der Theorie hervorgeht. Die Lemniskate bestimmt demnach noch mit Leichtigkeit vermöge der Formel

$$c^3 = nt$$

für jede Anomalie die Zeit und umgekehrt, wie wir dies schon früher nachgewiesen haben.

Die elliptische Bewegung bietet ebenfalls in ihrer lemniskatischen Uebertragung einiges Interessante.

Eine der $X$-Achse parallele Gerade schneide die Ovale in zwei Punkten, deren Focalwinkel $\Theta$, $\Theta'$ sein mögen. Für diese specielle Lage ist

$$\Theta + \Theta' = 180^0$$

Wir tragen diese Focalwinkel als Polarwinkel in die Ellipse ein; verbinden wir nun diese entsprechenden Ellipsenpunkte durch eine Sehne, so geht diese, sowie überhaupt alle analogen Sehnen durch einen festen Punkt der $X$-Achse, und die den entsprechenden Anomalien $\Theta$, $\Theta'$ zukommenden Zeiten $t$ $t'$ sind durch die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\pi t}{T}\operatorname{tg}\frac{\pi t'}{T} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1-e)\Theta}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1+e)\Theta}$$

miteinander verknüpft.

Wir ziehen ferner einen Radiusvector durch die Ovale, welcher sie in 2 Punkten schneidet. Aus der Formel

$$\sin\varphi = \frac{q^2}{2c}\,\frac{\sin\Theta}{\sqrt{c^2 + q^2\cos\Theta}}$$

folgt

$$\cos\Theta^2 + \frac{4c^2}{q^2}\sin\varphi^2 . \cos\Theta + \frac{4c^4}{q^4}\sin\varphi^2 - 1 = 0$$

woraus

$$\cos\Theta + \cos\Theta' = -\frac{4c^2}{q^2}\sin\varphi^2$$

$$\cos\Theta\cos\Theta' = \frac{4c^4}{q^4}\sin\varphi^2 - 1$$

Aus der Verbingung beider geht die Relation

$$1+\frac{c^2}{q^2}(\cos\Theta+\cos\Theta')+\cos\Theta\cos\Theta'=0$$

hervor. Analog hierzu ziehen wir durch die Ellipse eine der $X$-Achse parallele Gerade $y=y$, womit die Formel

$$\frac{p\sin\Theta}{1+e\cos\Theta}=\frac{p\sin\Theta'}{1+e\cos\Theta'}$$

verbunden ist. Aus ihr erhalten wir

$$1+\frac{1+e^2}{2e}(\cos\Theta+\cos\Theta')+\cos\Theta\cos\Theta'=0$$

welche mit der analogen obigen wegen

$$\frac{c^2}{q^2}=\frac{1+e^2}{2e}$$

identisch ist.

Den der $X$ Achse parallelen Geraden der Ellipse entsprechen also Anomalien oder Polarwinkel, welche den durch den Radiusvector der Ovalen bestimmten Focalwinkeln gleich sind, und die entsprechenden Bogen in beiden Curven werden von beiden Punkten in gleichen Zeiten durchlaufen.

## 2. Die Wurfbewegung.

Auch diese Bewegung lässt eine elegante Uebertragung zu.

Um die Jonoide der Begung eines geworfenen Körpers im luftleeren Raume zu finden, haben wir zunächst zu beachten, dass die Geschwindigkeit des Punktes in der Parabel derjenigen seiner Entfernung von der Directrix als Fallhöhe entspricht.

Die Parabelgleichung ist

$$r=\frac{q}{\sin\frac{1}{2}\Theta^2}$$

und $r$ ist die genannte Fallhöhe, woraus die Relation

$$v^2=2gr=\frac{2gq}{\sin\frac{1}{2}\Theta^2}=R^2$$

folgt. Da aber

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{2Rc\sin\varphi}{R^2-c^2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{1}{2}\Theta}{1-2\sin\frac{1}{2}\Theta^2}$$

so können wir

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta=\sqrt{\frac{pg}{R^2}}$$

darin einführen, und indem wir hinsichtlich der Constanten die Annahme

$$c^2 = 2pg = 2a^2$$

machen, erhalten wir als Curvengleichung die Jonoide

86) $$x^2 - y^2 = a^2$$

also eine gleichseitige Hyperbel, deren Brennpunkte $\pm c$ sind.

Im Anfangspunkt der Bewegung habe $v$ die horizontale Componente

$$v_x = v\cos\tau = v\sin\tfrac{1}{2}\Theta$$

Vermöge des Obigen findet man

$$v_x^2 = pg$$

also

$$v_x = a$$

Die grosse Halbachse der Hyperbel bezeichnet also die Grösse der horizontalen Componente im Beginn der Bewegung und überhaupt.

Indem also die Brennstrahlen der gleichseitigen Hyperbel den Polarwinkel der Parabel einschliessen, drückt der Radiusvector $R$ der erstern die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers aus.

Auch dieser Fall der freien Wurfbewegung kann erweitert werden, wenn wir die Bewegung als in einer festen Parabel vor sich gehend betrachten.

Ist dieselbe vertical nach oben gerichtet und die Wurfhöhe der Geschwindigkeit $v_0$ im Scheitelpunkt $= h$, so ist, wenn die $\Theta$ vom Scheitel an gerechnet werden

$$v^2 = 2g(h - q\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\Theta^2) = R^2$$

Die Polargleichung ist jetzt

$$r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}\Theta^2}$$

Aus der obigen Formel kann man $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Theta$ berechnen und in

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Theta}{1 - \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Theta^2} = \frac{2Rc\sin\varphi}{R^2 - c^2}$$

einsetzen. Führen wir dies aus und nehmen zwischen den Constanten die Bedingung

$$c^2 = 2g(h - q)$$

an, so erscheint die Curve

87)
$$\frac{x^2}{2gh} + \frac{y^2}{2gq} = 1$$

also eine Ellipse, welche die Jonoide der Parabelbewegung im jetzigen Fall ist. Da

$$2gh - 2gq = c^2$$

ist, so schliessen jetzt die Leitstrahlen der Ellipse den Polarwinkel der Parabel ein, und die Geschwindigkeit in letzterer ist dem entsprechenden Radiusvector der Ellipse gleich; mit demselben zu- und abnehmend. Die grosse Achse ist $= v_0$.

Die Parabel sei jetzt vertical nach unten gerichtet.

Man findet die Hyperbel

88)
$$\frac{x^2}{2gh} - \frac{y^2}{2gq} = 1$$

wenn

$$c^2 = 2g(h + q)$$

welche Curve für $h = q$ in die gleichseitige Hyperbel übergeht, da alsdann die Bewegung eine freie ist.

Die Brennstrahlen schliessen den Polarwinkel $180^0 - \Theta$ ein und die Geschwindigkeit wächst mit dem Vector ins Unendliche.

### 3. Die Bewegung auf der Cykloide.

Wie aus der Geometrie der Cykloide bekannt ist, sind die Coordinaten $xy$ Functionen des Wälzungswinkels $\Theta$, also, wenn $a$ Kreisradius, ist

$$x = a(\Theta - \sin\Theta)$$
$$y = a(1 - \cos\Theta)$$

Wir lassen einen schweren Punkt jetzt die verticalstehende Cykloide durchlaufen. Die Basis möge horizontal liegen, und die Curve ihre concave Seite nach oben kehren. Die Bewegung beginne in einer Spitze mit der Geschwindigkeit null.

Der Fallhöhe $y$ entspricht die Formel

$$v^2 = 2gy = R^2$$

so dass

$$R^2 = 2ga(1 - \cos\Theta)$$

Das hieraus entwickelte $\cos\Theta$ führen wir in die Relation

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2Rc\sin\varphi}{R^2 - c^2}$$

ein, setzen noch fest, dass $c^2 = 2ga$ ist und erhalten schliesslich

89) $$R^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$$

Hieraus folgt der Satz:

Die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes in der Cykloide ist eine Lemniskate mit den Brennpunkten $\pm c$.

$c$ bedeutet die Geschwindigkeit, welche der Fallhöhe $a$ entspricht.

Ferner bemerke man

$$\Theta = t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

was ausdrückt, dass der Focalwinkel $\Theta$ der Jonoide der Zeit proportional wächst, wie sich von selbst versteht.

Der betrachtete Fall ist wieder ein ganz specieller.

Eine Erweiterung tritt ein, wenn wir die den Cykloiden ähnlichen Trochoiden einführen. Es sind dies verflachte oder verkürzte Cykloiden, welche von Punkten beschrieben werden, die entweder innerhalb oder ausserhalb des auf einer Geraden rollenden Kreises liegen.

Die Lage der hier kurz betrachteten verflachten Cykloide sei analog der früheren. Die Geschwindigkeit für die Fallhöhe geht aus

$$v^2 = v_0^2 + 2gy$$

hervor. $v_0$ ist willkürlich.

Die Gleichungen der Curve sind

$$x = a\Theta - b\sin\Theta$$
$$y = a \quad - b\cos\Theta$$

Hierin bedeutet $a$ den Radius des rollenden Kreises, $b$ den Abstand des festen Punktes vom Centrum.

Man hat

$$R^2 = v_0^2 + 2g(a - b\cos\Theta)$$

$$\cos\Theta = \frac{a}{b} - \frac{R^2 - v_0^2}{2bg}, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{2Rc\sin\varphi}{R^2 - c^2}$$

Die Elimination von $\Theta$ führt unter Voraussetzung der Bedingung

$$v_0^2 + 2ag = c^2$$

auf die Curvengleichung

90) $$R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 = 4g^2b^2$$

woraus der Satz:

Die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes in einer Trochoide ist eine Cassinische Linie.

Der Parameter ist

$$q^2 = 2gb$$

und für eine verflachte Cykloide, wenn $v_0 = 0$, kleiner als $c^2$, da $b < a$ ist.

Wenn noch nicht bemerkt sein sollte, dass die Gleichungen der genannten Trochoide mit denjenigen der planetarischen Bewegung identificirt werden können, so wollen wir auf die entsprechenden Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \Theta - e\sin\Theta = k\frac{t\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = \sqrt{\frac{k^2(1+m)}{a}}\,.\,t = \sqrt{\frac{u}{a}}\,t = v_0 t$$

$$\frac{y}{a} = 1 - e\cos\Theta, \quad y = r$$

aufmerksam machen. $\Theta$ ist hierin der excentrische Winkel oder die mittlere Anomalie.

## 4. Die Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreise und in der Ellipse.

Wir bezeichnen mit $v_0$ die Geschwindigkeit des Punktes, welche der Elongation $\alpha$, mit $v_0$ die, welche der Elongation $\Theta$ im Kreise $r = a$ entspricht. Alsdann folgt

$$v^2 = v_0^2 + 2ga(\cos\Theta - \cos\alpha)$$

Führen wir den hieraus berechneten Wert von

$$2ga\cos\Theta = R^2 - (v_0^2 - 2ga\cos\alpha)$$

in die bekannte Relation ein und setzen

$$v_0^2 - 2ga\cos\alpha = c^2$$

so folgt schliesslich

91) $$R^4 - 2c^2R^2\cos 2\varphi + c^4 = 4g^2a^2$$

Also ist die Jonoide der Bewegung eines schweren Punktes im verticalen Kreis eine Cassinische Curve.

Ist speciell $c^2 = 2ga$ und $\alpha = 0$, wonach $v_0$ die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte bezeichnet, so ist die entsprechende Höhe $2a$. Daher entspricht die Lemniskate

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$$

der asymptotischen Bewegung. Ist die Geschwindigkeitshöhe grösser als der Durchmesser $2a$, so wird die Jonoide zur Ovale, deren Radienvectoren und bezügliche Focalwinkel bez. die Geschwindigkeit und den Ausschlagswinkel $\Theta$ bezeichnen. Die Pendelbewegung kann ebenfalls bis zu einer gewissen Grenze durch die aus einem Zuge bestehende Curve polarisch dargestellt werden.

Eine Anwendung auf die Ellipse ist noch leicht zu skizziren.

Die grosse Achse stehe vertical. Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte sei $v_0$ und der excentrische Winkel $= \Theta$, so dass

$$x = a\cos\Theta$$

Daher besteht die Formel

$$v^2 = v_0^2 - 2g(a - x)$$
$$R^2 = 2gh + 2ga\cos\Theta$$

wo $h$ die Geschwindigkeitshöhe des Punktes im Scheitel der kleinen Achse bezeichnet. Führen wir nun

$$c^2 = 2gh, \quad q^2 = 2ga$$

ein, so ergibt sich wieder vermöge der Gleichung

$$R^2 = c^2 + q^2 \cos\Theta \tag{92}$$

eine Cassinische Curve, deren Focalwinkel dem excentrischen Winkel der Ellipse gleich ist.

Wir wollen hieran noch eine Bemerkung knüpfen.

Entwickelt man das Zeitintegral der Bewegung eines schweren Punktes in der Ellipse, so erkennt man, dass es zu den hyperelliptischen gehört. Es scheint aber unbemerkt geblieben zu sein, dass dasselbe in einem speciellen Falle in ein elliptisches übergeht, und zwar findet sich dieses auf folgende Art:

Das Bogendifferential der Ellipse ist

$$ds = \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$$

Aus der Formel

$$t = \int \frac{ds}{v}$$

folgt also

$$t = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{(a^2 - x^2) v^2}}\, dx$$

Wir führen jetzt die Directrix ein, deren Abstand $h$ vom Mittelpunkt $= \frac{a}{e}$ ist, und wählen $h$ als Geschwindigkeitshöhe, was bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Punktes in jedem Orte der Ellipse gleich derjenigen ist, welche er erlangt, wenn er bis dahin von der Directrix ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgefallen wäre.

Der Punkt beschreibt also volle Umläufe. Wir rechnen die $\Theta$ vom obern Scheitelpunkte an. Es ist zunächst

$$v^2 = 2g(h - x)$$

also

$$t = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{(a^2 - x^2)\, 2g\,(h - x)}}\, dx, \quad x = a\cos\Theta, \quad h = \frac{a}{e}$$

demnach

$$t = \sqrt{\frac{c}{2g}} \int \sqrt{1 + e\cos\Theta}\, d\Theta \tag{93}$$

welches ausdrückt, dass die Zeit durch ein elliptisches Integral der 2. Art sich finden lässt, wenn die Geschwindigkeitsverhältnisse sich auf die Directrix der Ellipse beziehen.

Man kann das Integral schreiben

$$t = 2\sqrt{\frac{c}{2g}(1+e)} \int \sqrt{1 - \frac{2e}{1+e} \sin \tfrac{1}{2}\Theta^2}\, d\,\tfrac{1}{2}\Theta$$

Die halbe Umlaufszeit $T$ ergibt sich also aus

$$T = 2\sqrt{\frac{c}{2g}(1+e)}\, E$$

demnach ist

$$t = \frac{T}{E} E(u)$$

oder

$$t = \frac{T}{K} u + \frac{T}{E} \frac{2\pi}{K} \left( \frac{q}{1-q^2} \sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4} \sin\frac{2\pi u}{K} + \dots \right)$$

## 5. Elliptische Schwingungen.

Wir betrachten noch den Fall der Centralbewegung, nach welchem ein Punkt eine Ellipse beschreibt durch die Wirkung einer Kraft, deren Richtung durch das Centrum dieser Curve geht.

Der Ausdruck dieser Kraft ist durch

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2 b^2} r$$

definirt, so dass die Kraft, der Entfernung proportional, anziehend wirkt. Die Geschwindigkeit folgt aus

$$v^2 = v_0{}^2 - 2\int \varphi\, dr$$

und ist

$$v^2 = v_0{}^2 + \frac{c^2}{a^2 b^2} r_0{}^2 - \frac{c^2}{a^2 b^2} r^2$$

worin $v_0 r_0$ sich auf den Anfangszustand beziehen.

Nun ist

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos\Theta^2 + b^2 \sin\Theta^2}$$

indem wir $\Theta$ als Polarwinkel von der kleinen Achse an rechnen. Wir führen ein

$$A = v_0{}^2 + \frac{c^2}{a^2 b^2} r_0{}^2$$

und setzen $v = R$. Die Gleichung für $\operatorname{tg}\Theta$ ist dann

$$\operatorname{tg}\Theta^2 = \frac{c^2 - a^2(A - R^2)}{-c^2 + b^2(A - R^2)}$$

und da

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2RC\sin\varphi}{R^2 - C^2}$$

ist, so erhält man für die Bedingung

$$C^2 = \frac{Ab^2 - c^2}{b^2}$$

die Curve

$$94)\quad R^4 - R^2\frac{a^2A - c^2 + a^2C^2 - 4b^2C^2}{a^2} - 4\frac{b^2C^2}{a^2}R^2\cos\varphi^2 + \frac{C^2}{a^2}(a^2A - c^2) = 0$$

welche in einen Kreis übergeht, wenn noch die zweite Bedingung

$$a^2A - c^2 = C^2(a+2b)^2, \quad A = \frac{a+3b}{4b}\cdot\frac{c^2}{b^2}$$

erfüllt ist. Die Gleichung ist dann

$$95)\qquad \left(x - \frac{b}{a}C\right)^2 + y^2 = \varrho^2$$

$$\varrho^2 = \frac{c^4}{4a^2b^2}\,\frac{a+b}{b}$$

Die Constanten stehen in diesem speciellen Falle durch die Relation

$$r_0{}^2 + \frac{c^2}{a^2b^2}r_0{}^2 = \frac{a+3b}{4b}\cdot\frac{c^2}{b^2}$$

in Verbindung.

Ferner ist

$$\frac{C}{\varrho} = \frac{a}{a+b}$$

Der Anfangspunkt der Curve liegt innerhalb des Kreises und die Strecke $-C$ geht bis zur Peripherie, so dass $\Theta$ von 0 bis 90° wächst. Die Geschwindigkeit erreicht daher in der $b$-Achse ihr Maximum, in der $a$-Achse ihr Minimum.

Auch die allgemeinere Gleichung hat in sofern Interesse, als sie mit andern Disciplinen in Verbindung steht und in leicht anzugebenden Fällen reciprok wird.

---

Zu S. 39 dem Citate beizufügen:

oder pag. 139 der „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften" von Holzmüller, welcher Autor zuerst die Beziehungen lemniskatischer Linien zu einander entdeckt hat.

Zu S. 43: Führt man für ein zweites Integral, welches die Bezeichnungen $c'$, $q'$, $\gamma'$ hat, die Transformation $\cos\gamma = \frac{q'^2}{c'^2}\cos\gamma'$ durch, so ist dasselbe dem ersten ähnlich, und können beide wieder mit einander verglichen werden.

Zu S. 66: Curven dieser und ähnlicher Art nennt Herr Holzmüller „irreguläre Hyperbeln und Lemniskaten $n$ter Ordnung".

III.

# Ueber Raumcurven-Singularitäten.

Von

**C. F. E. Björling.**

---

§ 1. Die Punktcoordinaten $x$, $y$, $z$, $w$ einer algebraischen Raumcurve seien rational ausgedrückt in einem Parameter $\lambda$, also

$$(1)\qquad \frac{x}{\varphi(\lambda)} = \frac{y}{\psi(\lambda)} = \frac{z}{\chi(\lambda)} = \frac{w}{f(\lambda)}$$

wo $\varphi$, $\psi$, $\chi$, $f$ ganze Functionen sind. Jedem $\lambda$-Werte entspricht ein Curvenpunkt und umgekehrt; nur einem Doppelpunkte zwei verschiedene $\lambda$-Werte. Die $\lambda$-Werte, die den Schnittpunkten der Curve mit der Ebene

$$(2)\qquad Xx + Yy + Zz + Ww = 0$$

entsprechen, befriedigen die Gleichung

$$(3)\qquad X.\varphi(\lambda) + Y.\psi(\lambda) + Z.\chi(\lambda) + W.f(\lambda) = 0$$

Dieselbe hat eine Doppelwurzel, d. h. die Ebene hat an irgend einer Stelle zwei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemeinsam, insofern zugleich

$$(4)\qquad X.\varphi'(\lambda) + Y.\psi'(\lambda) + Z.\chi'(\lambda) + W.f'(\lambda) = 0$$

die Ebene berührt in solchem Falle die Curve an jener Stelle, wofern nicht

$$(5)\qquad \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(h)} = \frac{\psi'(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$$

Diese drei Gleichungen seien nämlich von $\lambda = \lambda_1$ befriedigt. Aus der Gleichung (3) folgt dann immer (4), welche $X$, $Y$, $Z$, $W$ auch sein mögen; d. h. jede durch den betreffenden Punkt ($\lambda_1$) gelegte Ebene hat daselbst zwei Punkte mit der Curve gemeinsam, und diese hat da folglich einen stationären Punkt oder Spitze ($\beta$)[1]. Jeder die drei Bedingungen (5) erfüllende $\lambda$-Wert ergiebt folglich eine solche Singularität.

Wenn, nebst (3) und (4) auch die Gleichung

$$X.\varphi''(\lambda)+Y.\psi''(\lambda)+Z.\chi''(\lambda)+W.f''(\lambda)=0 \tag{6}$$

von einem $\lambda$-Werte befriedigt ist, hat die Ebene (2) an einer Stelle drei aufeinanderfolgende Punkte mit der Curve gemeinsam; sie ist also Schmiegungsebene oder eine „Ebene des Systems". Wir betrachten (2) als „Zwischenform", d. h. $X$, $Y$, $Z$, $W$ als die Ebenencoordinaten der gegebenen Curve oder, was dasselbe ist, die Punktcoordinaten ihrer Reciproken. Aus (3), (4) und (6) erhält man

$$\frac{X}{\Phi(\lambda)}=\frac{Y}{\Psi(\lambda)}=\frac{Z}{X(\lambda)}=\frac{W}{F(\lambda)} \tag{7}$$

wo

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\begin{vmatrix}\psi, & \chi, & f\\ \psi', & \chi', & f'\\ \psi'', & \chi'', & f''\end{vmatrix}}=\frac{-\Psi(\lambda)}{\begin{vmatrix}\chi, & f, & \varphi\\ \chi', & f', & \varphi'\\ \chi'', & f'', & \varphi''\end{vmatrix}}=\frac{X(\lambda)}{\begin{vmatrix}f, & \varphi, & \psi\\ f', & \varphi', & \psi'\\ f'', & \varphi'', & \psi''\end{vmatrix}}=\frac{-F(\lambda)}{\begin{vmatrix}\varphi, & \psi, & \chi\\ \varphi', & \psi', & \chi'\\ \varphi'', & \psi'', & \chi''\end{vmatrix}} \tag{8}$$

gemeinsame Factoren der Nenner setzen wir weggenommen voraus. Das Princip der Dualität ergiebt sogleich, dass jedem $\lambda$-Werte in (7) eine Schmiegungscurve entspricht und umgekehrt, und speciell jedem die drei Gleichungen

$$\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)}=\frac{\Psi'(\lambda)}{\Psi(\lambda)}=\frac{X'(\lambda)}{X(\lambda)}=\frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} \tag{9}$$

erfüllendem $\lambda$-Werte eine stationäre Ebene ($\alpha$).

§ 2. Es seien nun

$$\varphi(\lambda)=L\lambda^l+L_1\lambda^{l+1}+L_2\lambda^{l+2}+\dots \tag{10}$$

$$\psi(\lambda)=M\lambda^m+M_1\lambda^{m+1}+M_2\lambda^{m+2}+\dots \tag{11}$$

---

1) Wir benutzen die gewöhnlichen Beziehungen $\alpha$, $\beta$, $\Theta$ für die Anzahlen der stationären Ebenen, Punkte und Tangenten der Raumcurven, aber auch, wenn kein Missverständniss möglich ist, um eine einzige Singularität der betreffenden Art ganz kurz zu bezeichnen.

(12) $\chi(\lambda) = N\lambda^n + N_1\lambda^{n+1} + N_2\lambda^{n+2} + \dots$
(13) $f(\lambda) = P + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \dots$

wo die rechten Membra endliche Reihen sind, und (wie immer im folgenden) $l < m < n$, und $L$, $M$, $N$, $P$ nicht null. Die Curve geht dann fur $\lambda = 0$ durch den Anfangspunkt $O$, hat daselbst mit ihrer Schmiegungsebene ($z = 0$) $n$, mit ihrer Tangente ($y = z = 0$) und jeder durch dieselbe gehenden Ebene $m$ Punkte gemeinsam, und schneidet jede andere durch $O$ gehende Ebene daselbst in $l$ Punkten. Einen solchen Punkt der Curve nennen wir einen ($l$, $m$, $n$)-Punkt; die Zahlen $l$, $m$, $n$ seine Indices. Ein (1, 2, 3)-Punkt ist also ein gewöhnlicher, nicht-singulärer[1]); ein (2, 3, 4) eine Spitze $\beta$; ein (1, 2, 4) der Berührungspunkt einer stationären Ebene ($\alpha$) oder, nach älterer Terminologie, eine „einfache Inflexion"; ein (1, 3, 4) eine „doppelte Inflexion", d. h. der Berührungspunkt einer stationären Tangente ($\Theta$).

Die Gleichungen (5) werden nun befriedigt von $l-1$ Werten $\lambda = 0$; die Singularität eines ($l$, $m$, $n$)-Punktes ist also mit $l-1$ stationären Punkten ($\beta$) aequivalent.

Aus (8) erhält man ferner, nach Verkürzen mit $\lambda^{l+m-3}$

(14) $\Phi(\lambda) = MNPmn(n-m)\lambda^{n-l} + L'\lambda^{n-l+1} + \dots$
(15) $\Psi(\lambda) = LNPln(l-n)\lambda^{n-m} + M'\lambda^{n-m+1} + \dots$
(16) $X(\lambda) = LMPlm(m-l) + N'\lambda + \dots$
(17) $F(\lambda) = LMN(n-m)(m-l)(l-n)\lambda^n + P'\lambda^{n+1} + \dots$

also, da die Coefficienten der niedrigsten Dignitäten in den rechten Gliedern nicht null sein können, ist ein ($l$, $m$, $n$)-Punkt immer zu einem ($n-m$, $n-l$, $n$)-Punkte reciprok.

Durch Anwendung des Dualitätsprincips auf das vorige ergiebt sich hierhaus:

Die Schmiegungsebene in einem ($l$, $m$, $n$)-Punkte $O$ gilt,

von einem beliebigen Punkte in derselben gezogen, als ($n-m$)-fache Ebene des Systems;

von einem beliebigen Punkte der Tangente in $O$ gezogen, als ($n-l$)-fache Ebene des Systems;

1) Womit natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass durch denselben Punkt des Raumes ein anderer Zweig der Curve, welchem ein anderer Parameterwert entspricht, gehen kann.

vom Punkte $O$ selber gezogen, als $n$-fache Ebene des Systems;

und ferner, da $\alpha$ und $\beta$ reciproke Singularitäten sind:

Die Singularität eines $(l, m, n)$-Punktes ist mit $n-m-1$ stationären Ebenen $(\alpha)$ aequivalent.

§ 3. Setzen wir nun $w=1$ und bezeichnen die veränderlichen Coordinaten der Tangente der Curve mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$, so werden

$$(18) \qquad \frac{\xi-x}{x'}=\frac{\eta-y}{y'}=\frac{\zeta-z}{z'} \qquad \left(\text{wo } x'=\frac{dx}{d\lambda} \text{ u. s. w.}\right)$$

die Gleichungen dieser Tangente oder, für $\lambda$ als veränderlich, die Gleichungen der von dieser Geraden erzeugten osculirenden Developpablen. Schneidet man diese Fläche mit einer Ebene $\xi=k$ (constant), so werden die Coordinaten der ebenen Schnittcurve

$$(19) \qquad \eta=y+\frac{k-x}{x'}\cdot y', \quad \zeta=z+\frac{k-x}{x'}\cdot z'$$

oder nach Einsetzung der Ausdrücke für $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$

$$(20) \qquad \eta=\frac{Mkm}{Ll}\lambda^{m-l}+M''\lambda^{m-l+1}+\ldots$$

$$\zeta=\frac{Nkn}{Ll}\lambda^{n-l}+N''\lambda^{n-l+1}+\ldots$$

Für $\lambda=0$, d. h. im Schnittpunkt der Ebene mit der Tangente der Raumcurve in $O$, hat diese ebene Curve einen $(m-l, n-l)$-Punkt, also eine Singularität, aequivalent mit $m-l-1$ Spitzen $(\varkappa)$[1]. Jede Spitze in der ebenen Schnittcurve einer Developpablen entspricht aber einem Schnittpunkte der Ebene mit entweder der Cuspidalcurve selbst oder einer ihrer stationären Tangente $(\Theta)$. Da das erste Alternativ hier nicht in Frage kommen kann, so folgt:

Die Singularität eines $(l, m, n)$-Punktes ist mit $m-l-1$ stationären Tangenten aequivalent.

Diese Eigenschaft ist offenbar zu sich selbst reciprok.

---

1) Der Begriff $(m, n)$-Punkt einer ebenen Curve ergiebt sich leicht als Specialfall des vorigen. Er ist vom Verf. ausführlich definirt und behandelt in „Entsprechende Singularitären in alg. ebenen Curven" (Nova Acta Soc. Sc. Ups. Ser. III. 1879). Dass die Singularität eines solchen $(m, n)$-Punktes mit $m-1$ Spitzen $(\varkappa)$ und $n-m-1$ Inflexionen $(\iota)$ aequivalent ist, ist unseres Wissens zuerst von Cayley („On the higher singularities of a plane curve". Quart. Journ. of Mathemat. VII) gefunden.

§ 4. Jenachdem ein Index (der erste, zweite, dritte) ungerade ($u$) oder gerade ($g$) ist, durchsetzt die Curve die entsprechende (arbitrāre, berührende, Schmiegungs-)Ebene oder nicht. Eine reelle Curve muss daher in $O$ irgend eine der folgenden acht Formen darbieten:

a) ($u$, $g$, $u$), d. h. der erste und dritte Index ungerade, der zweite gerade; die Curve durchsetzt die arbiträre und die Schmiegungs-Ebene, nicht aber die berührende. Einfachster Fall: (1, 2, 3), der gewöhnliche, nicht singuläre Punkt.

b) ($u$, $g$, $g$). Einf. Fall: (1, 2, 4), stationäre Ebene ($\alpha$).

c) ($u$, $u$, $g$). E. F.: (1, 3, 4), stationäre Tangente ($\Theta$).

d) ($u$, $u$, $u$). E. F.: (1, 3, 5), Vereinigung der beiden letzten Singularitäten.

e) ($g$, $u$, $g$). E. F.: (2, 3, 4), stationärer Punkt ($\beta$).

f) ($g$, $u$, $u$). E. F : (2, 3, 5), Vereinigung von $\alpha$ und $\beta$.

g) ($g$, $g$, $u$). E. F.: (2, 4, 5), Vereinigung von $\Theta$ und $\beta$.

h) ($g$, $g$, $g$). E. F.: (2, 4, 6), Vereinigung aller drei Singularitäten [1]).

Von diesen acht Formen ist offenbar b) reciprok zu e) und d) zu $g$), jede der übrigen aber zu sich selbst.

§ 5. Auf sämtliche hier gefundenen Resultate haben die Anzahlen der Glieder und die Grade der Functionen: $\varphi$, $\psi$, $\chi$, $f$ gar keinen Einfluss; jene Resultate behalten also ihre Gültigkeit, auch wenn diese Functionen unendliche convergirende Dignitätsreihen sind.

In solcher Form können die Coordinaten jeder algebraischen Raumcurve, wenigstens innerhalb eines endlichen Gebietes dargestellt werden. Es sei nämlich eine solche Curve $C$ gegeben; wir verlegen den Anfangspunkt in einen Punkt $O$ derselben; wenn mehrere Zweige der Curve dadurch gehen, behandeln wir jeden für sich.

---

1) Die Modelle des Hrn. Chr. Wiener (Brills Verlag, Elfte Serie) stellen sämtliche diese acht Formen dar. Kartonmodelle der Formen a), b), c) und d) sind ausgegeben im Werke: „Quatre modèles représentant des surfaces développables par V. Malthe-Bruun et C. Crone“. Auch vom Verf. sind Modelle der acht Formen ausgegeben.

Nimmt man die Tangente des Zweiges in $O$ zur $x$-Axe, und seine Schmiegungsebene zur $xy$-Ebene, so können bekanntlich die Coordinaten $y$ und $z$ der Projectionen $C_{xy}$ und $C_{xz}$ des Zweiges auf die $xy$- und $xz$-Ebene dargestellt werden durch zwei in endlicher Umgebung des Punktes $O$ gültige, Reihen von der Form

$$(21)\qquad y = M((x))^{\frac{m}{l}} + M_1((x))^{\frac{m+1}{l}} + M_2((x))^{\frac{m+2}{l}} + \dots$$

$$(22)\qquad z = N((x))^{\frac{n}{l_1}} + N_2((x))^{\frac{n+1}{l_1}} + N_2((x))^{\frac{n+2}{l_1}} + \dots$$

wo die Coefficienten völlig bestimmte Grössen sind, und $m > l$, $n > l_1$, da die beiden ebenen Curven die $x$-Axe berühren.

$l$ (resp. $l_1$) giebt die Anzahl der Punkte an, worin $C_{xy}(C_{xz})$ von einer in ihrer Ebene belegenen, durch $O$ gehenden, beliebigen, aber nicht berührenden Geraden, also auch von einer durch $O$ gehenden, beliebigen, aber nicht berührenden Ebene in $O$ geschnitten wird. Also ist $l = l_1$, denn jede ist der Anzahl der Punkte gleich, worin der betreffende $C$-Zweig selbst von der genannten Ebene in $O$ geschnitten wird.

Setzt man nun $x = \lambda^l$, so ergiebt sich aus (21) und (22)

$$(23)\qquad y = M\lambda^m + M_1\lambda^{m+1} + M_2\lambda^{m+2} + \dots$$

$$(24)\qquad z = N\lambda^n + N_1\lambda^{n+1} + N_2\lambda^{n+2} + \dots$$

die Coordinaten der $C$ sind also, wenigstens in endlicher Umgebung des Anfangspunktes, in der genannten Form ausgedrückt. $n$ ist $> m$, da $z = 0$ die Schmiegungsebene ist.

§ 6. Die Gleichungen (18) der osculirenden Developpablen werden nun, nach Einführung dieser Ausdrücke für $x$, $y$, $z$

$$(25)\qquad \frac{\xi - \lambda^l}{l} = \frac{\eta - M\lambda^m - M_1\lambda^{m+1} - \dots}{Mm\lambda^{m-l} + M_1(m+1)\lambda^{m-l+1} + \dots}$$
$$= \frac{\zeta - N\lambda^n - N_1\lambda^{n+1} - \dots}{Nn\lambda^{n-l} + N_1(n+1)\lambda^{n-l+1} + \dots}$$

wo jedem $\lambda$-Werte eine Generatrix entspricht und umgekehrt. Wir untersuchen ihre Schnittcurven mit den Coordinaten-Ebenen.

1) $\xi = 0$ giebt

$$(26)\qquad \begin{aligned} l\eta &= M(l-m)\lambda^m + M'\lambda^{m+1} + \dots \\ l\zeta &= N(l-n)\lambda^n + N'\lambda^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

die Coefficienten der niedrigsten $\lambda$-Dignitäten können nicht verschwinden; die Schnittcurve hat also einen $(m, n)$-Punkt in $O$.

2) $\eta = 0$ giebt nach Verkürzung mit $\lambda^{m-l}$

$$(27) \quad m\xi = (m-l)\lambda^l + L'\lambda^{l+1} + \dots$$
$$m\zeta = N(m-n)\lambda^n + N''\lambda^{n+1} + \dots$$

die Schnittebene enthält also die $C$-Tangente in $O$ $(m-l)$ mal und eine Curve mit $(l, n)$-Punkt in $O$.

3) $\zeta = 0$ giebt nach Verkürzung mit $\lambda^{n-l}$

$$(28) \quad n\xi = (n-l)\lambda^l + L''\lambda^{l+1} + \dots$$
$$n\eta = M(n-m)\lambda^m + M''\lambda^{m+1} + \dots$$

die Schnittebene enthält also die $C$-Tangente in $O$ $(n-l)$ mal und eine Curve mit $(l, m)$-Punkt in $O$.

§ 7. Wir bezeichnen die Plücker'schen Charaktere der Schnittcurve $S$, die gebildet wird durch den Schnitt der Developpablen mit einer beliebigen Ebene $P$, mit

$$\mu, \quad \delta, \quad \varkappa, \quad \nu, \quad \tau, \quad \iota$$

dagegen diejenigen der Schnittcurve $S'$, wenn die Schnittebene $P'$ die Tangente in einem $(l, m, n)$-Punkte $O$ enthält (ohne Schmiegungsebene zu sein), mit

$$\mu', \quad \delta', \quad \varkappa', \quad \nu', \quad \tau', \quad \iota'$$

und werden nun diese mittelst jener und der Indices $l$, $m$, $n$ ausdrücken.

a) Der Ebenenschnitt der $P'$ enthält die $C$-Tangente in $O$ $(m-l)$ mal; also ist

$$(29) \qquad \mu' = \mu - m + l$$

b) Die Spitzen $(\varkappa)$ der Schnittcurve entstehen bekanntlich in den Punkten, wo die Ebene entweder die Curve $C$ selbst oder eine stationäre Tangente $(\Theta)$ des Systems trifft. Wenn nun $P'$ die Ebene ist, gehen von diesen Punkten verloren

1) die $m$ Punkte, die $P'$ mit $C$ in $O$ gemeinsam hat,

2) der einzige Schnittpunkt der $P'$ mit der $C$-Tangente, welcher, wie oben (§ 3.) erwähnt ist, $m-l-1$ Spitzen repräsentirt.

Dagegen kommen hinzu die $l-1$ Spitzen, die $S'$ in ihrem $(l, n)$-Punkte in $O$ hat (§ 6., 2). Also wird

(30) $$\varkappa' = \varkappa - 2(m-l)$$

c) Die Inflexionstangenten ($\iota$) der Schnittcurve entstehen bekanntlich durch den Schnitt der Ebene mit den stationären Ebenen ($\alpha$) des Systems. Wenn $P'$ die Ebene ist, geht ihre einzige Schnittlinie mit der $C$-Ebene in $O$, welche, wie oben (§ 2.) erwähnt ist, $n-m-1$ stationäre Ebenen repräsentirt, verloren, dagegen aber kommen hinzu die $n-l-1$ Inflexionen, die $S'$ in ihrem $(l, n)$-Punkte in $O$ hat. Also wird

(31) $$\iota' = \iota + m - l$$

Infolge (29), (30) und (31) erhält man nun mittelst Plückers Formeln

(32) $$\nu' = \nu, \quad \delta' = \delta + \frac{(m-l)(m-l+7-2\mu)}{2}, \quad \tau' = \tau - m + l$$

§ 8. Hieraus folgt vermöge des Dualitätsprincips:

Sind $\mu$, $\delta$, $\varkappa$, $\nu$, $\tau$, $\iota$ die Charaktere des aus einem beliebigen Punkte zu $C$ gezogenen Perspectivkegels, und $\mu'$, $\delta'$, $\varkappa'$, $\nu'$, $\tau'$, $\iota'$ die Charaktere des Kegels, wenn der Punkt in einer Tangente eines $(l, m, n)$-Punktes $O$ (doch nicht in $O$ selbst) belegen ist, so ist

(33) $$\mu' = \mu, \quad \delta' = \delta - m + l, \quad \varkappa' = \varkappa + m - l, \quad \nu' = \nu - m + l$$

(34) $$\tau' = \tau + \frac{(m-l)(m-l+7-2\nu)}{2}, \quad \iota' = \iota - 2(m-l)$$

§ 9. In diesem § haben $S$, $P$, $\mu$, $\delta$, $\varkappa$ . . . dieselbe Bedeutung als in § 7.; $P'$ sei dagegen die Schmiegungsebene selbst in einem $(l, m, n)$-Punkte $O$, $S'$ ihre Schnittcurve mit der Developpablen und $\mu'$, $\delta'$, $\varkappa'$ . . . die Charaktere dieser Curve.

a) Der Ebenenschnitt der $P$ enthält die $C$-Tangente in $O$ $(n-l)$ mal; also ist

(35) $$\mu' = \mu - n + l$$

b) Von den Spitzen ($\varkappa$) der Schnittcurve gehen, wenn $P'$ die Schnittebene ist, verloren

1) die $n$ Punkte, die $P'$ mit $C$ in $O$ gemeinsam hat,

2) der einzige Schnittpunkt der $P'$ mit der $C$-Tangente, welcher $m-l-1$ Spitzen repräsentirt.

Dagegen kommen hinzu die $l-1$ Spitzen, die $S'$ in ihrem $(l, m)$-Punkte in $O$ hat (§ 6., 3). Also wird

(36) $$\varkappa' = \varkappa - n - m + 2l$$

c) Von den Inflexionen der Schnittcurve gehen, aus demselben Grunde wie oben, $n - m - 1$ verloren, dagegen kommen hinzu die $m - l - 1$, die $S'$ in ihrem $(l, m)$-Punkte in $O$ hat. Also wird

(37) $$\iota' = \iota - n + 2m - l$$

Infolge (35), (36) und (37) erhält man nun mittelst Plückers Formeln

(38) $$\nu' = \nu - n + m, \quad \delta' = \delta + \frac{(n-l)(n-l+5-2\mu)}{2} + m - l$$

(39) $$\tau' = \tau + \frac{(n-m)(n-m+5-2\nu)}{2} + l - m$$

§ 10. Hieraus folgt vermöge des Dualitätsprincips:

Sind $\mu$, $\delta$, $\varkappa$, $\nu$, $\tau$, $\iota$ die Charaktere des aus einem beliebigen Punkte zu $C$ gezogenen Perspectivkegels, und $\mu'$, $\delta'$, $\varkappa'$, $\nu'$, $\iota'$ die Charaktere des Kegels, wenn der Punkt ein $(l, m, n)$-Punkt der Curve ist, so ist

(40) $$\mu' = \mu - l, \quad \delta' = \delta + \frac{l(l+5-2\mu)}{2} + l - m, \quad \varkappa' = \varkappa + m - 2l$$

(41) $$\nu' = \nu - m, \quad \tau' = \tau + \frac{m(m+5-2\nu)}{2} + m - l, \quad \iota' = \iota + l - 2m$$

Aus diesen Formeln (29)—(41) geht hervor, dass das Geschlecht $p$ der Schnittcurve und des Perspectivkegels durch die betreffende Specialisirung der Schnittebene und des Kegelscheitels nicht geändert wird. Die Formeln enthalten als Specialfälle die bekannten Nr. 1—4. 7, 8, 11—14 in § 93. (S. 113) in Salmon-Fiedlers „Analytische Geometrie des Raumes", Th. II, 3^e^ Aufl.

# IV.

# Miscellen.

---

## 1.

### Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

Fortsetzung zu T. VII. Nr. XXIII. 5.

Aus der im citirten Aufsatze geführten Berechnung ergiebt sich, dass die Formel die Refractionen bis 87⁰ ganz gut darstellt. Die Differenzen würden vielleicht noch geringer ausfallen, wenn die Constanten noch schärfer bestimmt werden könnten.

Man kann aus der Formel leicht die Brechungsexponenten für beide Schichten berechnen. Man findet

$$u_1 = 1{,}000062, \qquad u_2 = 1{,}000218$$

Die Höhen dieser Schichten sind:

$$\frac{h_1}{a} = 0{,}00332, \qquad \frac{h_2}{a} = 0{,}000564$$

Demnach würde die Höhe $h'$ dieser Athmosphäre 2,68 Meilen betragen.

Die Annahme einer dreimaligen Brechung führt zu analogen Rechnungen, welche indessen sehr weitläufig ausfallen.

Jedenfalls aber würden sich hierdurch die mittleren Refractionen noch genauer und vielleicht schon bis 88⁰ Zenithdistanz darstellen lassen. Wir wollen indessen diese Rechnung nur theoretisch durchführen und legen also jetzt die folgende Refractionsformel zugrunde:

$$\delta z = \frac{x_1 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1+y_1 \operatorname{tg} z}} + \frac{x_2 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1+y_2 \operatorname{tg} z}} + \frac{x_3 \operatorname{tg} z}{\sqrt{1+y_3 \operatorname{tg} z}}$$

Aus der entwickelten Reihenform folgen nach Gleichsetzen der entsprechenden Coefficienten gleich hoher Potenzen mit der vorhin angeführten Reihe die Relationen

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= a \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 &= b \\ x_1y_1^2+x_2y_2^2+x_3y_3^2 &= c \\ x_1y_1^3+x_2y_2^3+x_3y_3^3 &= d \\ x_1y_1^4+x_2y_2^4+x_3y_3^4 &= e \\ x_1y_1^5+x_2y_2^5+x_3y_3^5 &= f \end{aligned}$$

Aus diesen 6 Gleichungen sind die 6 Unbekannten zu ermitteln.

Man findet der Reihe nach leicht folgende Werte:

$$x_1 = \frac{ay_1y_2-b(y_1+y_2)+c}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}, \quad x_1 = \frac{by_1y_2-c(y_1+y_2)+d}{y_1(y_1-y_2)(y_1-y_3)}$$

$$x_1 = \frac{cy_1y_2-d(y_1+y_2)+e}{y_1^2(y_1-x_2)(y_1-y_3)}, \quad x_1 = \frac{dy_1y_2-e(y_1+y_2)+f}{y_1^3(y_1-y_2)(y_1-y_3)}$$

Durch Gleichtetzen zweier aufeinander folgenden Ausdrücke ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} ay_1y_2y_3-b(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)+c(y_1+y_2+y_3)-d &= 0 \\ by_1y_2y_3-c(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)+d(y_1+y_2+y_3)-e &= 0 \\ cy_1y_2y_3-d(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)+e(y_1+y_2+y_3)-f &= 0 \end{aligned}$$

Hätten wir aus den Grundgleichungen die Werte $x_2$ oder $x_3$ abgeleitet, so würden wir in Folge des symmetrischen Baues der letzten 3 Gleichungen auf dasselbe Schlussresultat gekommen sein.

Dieses zeigt uns, dass die Lösung der Aufgabe von der Auflösung der kubischen Gleichung

$$y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y-y_1y_2y_3 = 0$$

abhängt, deren Coefficienten sich aus den vorhergehenden Relationen berechnen lassen. Führen wir die Rechnung durch, so erhalten wir die Gleichung 3. Grades

$$\begin{aligned} &(a(d^2-ce)+b(be-cd)+c(c^2-bd))y^3 \\ &-(d(c^2-bd)+e(ad-bc)+f(b^2-ac))y^2 \\ &+(d(cd-be)+e(ae-c^2)+f(bc-ad))y \\ &-d(d^2-ce)+e(be-cd)+f(c^2-bd) = 0 \end{aligned}$$

Hat man hiernach die Wurzeln $y_1y_2y_3$ berechnet, so sind auch damit nach dem Obigen die Werte $x_1x_2x_3$ bestimmt, womit die Aufgabe gelöst

ist. Wie man sieht, ist der Gang der Lösung für eine 4 oder $n$ malige Brechung dem vorstehenden analog und an eine Gleichung 4ten oder $n$ten Grades geknüpft.

Sind demnach die Coefficienten der Reihe bis zu dem entsprechenden Grade entwickelt, so stehen der Lösung ausser einigen etwas weitläufigen Rechnungsoperationen keine weitern Schwierigkeiten entgegen. E. Oekinghaus.

---

2.

**Ueber Gleichgewichtspunkte der Anziehung von Linien.**

Das Folgende gibt ausser einigen allgemeinen Sätzen nur Berechnungen der Gleichgewichtspunkte der Anziehung einer Anzahl specieller Gebilde.

### §. 1. Gleichgewichtspunkt der Anziehung zweier symmetrisch begrenzter Parallelen.

Ist $L$ eine begrenzte Linie (oder ein System solcher), und sind $M$, $N$ zwei Punkte auf $L$, deren gerade Verbindungslinie weder $L$ berührt noch in einem dritten Punkte (zwischen $M$ und $N$) trifft, so ist die Componente $X$ der Anziehung von $L$ auf einen Punkt $P$ der Geraden $MN$ in der Richtung von $M$ nach $N$ nahe bei $M$ negativ, nahe bei $N$ positiv, folglich gibt es eine ungerade Anzahl Punkte $P$, wo sie null ist.

Dieser Satz gilt im Raume wie in der Ebene. Wir machen davon Anwendung auf den Fall, wo $L$ aus 2 Parallelen

$$x = c; \quad -a \overset{=}{<} y \overset{=}{<} a$$

$$x = -c; \quad -b \overset{=}{<} y \overset{=}{<} b$$

besteht, und $M$, $N$ deren Mitten sind, und zwar seien $x$, 0 die Coordinaten von $P$.

Die Anziehung wirkt längs der $x$ Axe und ist

$$X = \frac{2a}{(c-x)\varrho} - \frac{2b}{(c+x)\sigma}$$

wo zur Abkürzung

$$\varrho = \sqrt{a^2 + (c-x)^2}; \qquad \sigma = \sqrt{b^2 + (c+x)^2}$$

gesetzt ist.

Die Differentiation ergibt:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2a}{(c-x)^2\varrho} + \frac{2a}{\varrho^3} + \frac{2b}{(c+x)^2\sigma} + \frac{2b}{\sigma^3} > 0$$

daher existirt zwischen $(c, 0)$ und $(-c, 0)$ immer ein und nur ein Gleichgewichtspunkt.

Dieser hat die Gleichung zu erfüllen:

$$a(c+x)\sigma = b(c-x)\varrho \tag{1}$$

daher auch die rationale 4. Grades:

$$a^2(c+x)^2\sigma^2 = b^2(c-x)^2\varrho^2 \tag{2}$$

und genügt jede Wurzel der letztern entweder der Gl. (1) oder der Gleichung

$$a(b+x)\sigma = -b(c-x)\varrho \tag{3}$$

Gl. (1) kann nur bei $x^2 < c^2$, Gl. (3) nur bei $x^2 > c^2$ erfüllt werden. Da nun Gl. (1) immer eine und nur eine reelle Wurzel hat, so ergibt sich:

Gl. (2) hat immer eine und nur eine reelle Wurzel zwischen $c$ und $-c$. Demnach kann sie nur 2 oder 4 reelle Wurzeln haben; im erstern Falle liegt eine, im letztern liegen 3 reelle Wurzeln ausserhalb des genannten Intervalls.

Sei $a < b$. In (2) geht für $x = \pm\infty$ das Zeichen $=$ über in $<$; für $x = \pm c$ beziehungsweise in $\gtrless$; folglich ist stets eine reelle Wurzel $> c$, die 2 übrigen sind entweder beide $> c$ oder beide $< -c$ oder imaginär.

Setzt man

$$\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} = m; \qquad \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} = nc^2; \qquad x = cu$$

so lautet Gl. (2) geordnet:

$$u^4 - 4mu^2 + 6u^3 - 4(m+n)u + 1 = 0$$

und reducirt sich durch Substitution

$$u = v + m$$

auf

$$v^4 - 6kv^2 - 4(2mk+n)v - 3k^2 - 4k - 4mn = 0 \tag{4}$$

wo zur Abkürzung

$$k^2 = m^2 - 1 = \left(\frac{2ab}{b^2 - a^2}\right)^2$$

gesetzt ist.

Sind die 4 Wurzeln dieser Gleichung

$$v = p \pm q, \quad -p \pm r$$

so genügt, wie ich T. LXIX. S. 111 gezeigt habe, $4p^2$ einer kubischen Gleichung, die sich besonders einfach gestaltet, wenn man

$$p^2 = \tfrac{1}{2}z + k$$

setzt, wodurch sie übergeht in

$$z^3 + 4(k + mn)z - 2n^2 = 0$$

Jetzt kann man nach Cardani'scher Formel

$$z = \sqrt[3]{n^2 + \sqrt{n^4 + \left(4\frac{k+mn}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{n^2 + \sqrt{n^4 + \left(4\frac{k+mn}{3}\right)^3}}$$

als bekannt zugrunde legen und findet:

$$p = \sqrt{\tfrac{1}{2}z + k} \tag{5}$$

$$q = \pm\sqrt{3k - p^2 + \frac{2km + n}{p}}; \quad r = \pm\sqrt{3k - p^2 - \frac{2km + n}{p}}$$

Wie sich die 4 Wurzeln verteilen, wird durch folgende Rechnung entschieden. Man hat:

$$q^2 r^2 = (3k - p^2)^2 - \frac{(2km + n)^2}{p^2}$$

und nach Gl. (5) in $z$ ausgedrückt:

$$\begin{aligned} p^2 q^2 r^2 &= (2k - \tfrac{1}{2}z)^2 (k + \tfrac{1}{2}z) - (2km + n)^2 \\ &= 2k^3 - \tfrac{3}{4}k^2 z - \tfrac{1}{8}z^3 - 4k^2(k+1) - 2kmn - n^2 \\ &= -\tfrac{3}{4}k^2 z - \tfrac{1}{8}z^3 - 2k^2(k+2) - 2kmn - n^2 < 0 \end{aligned}$$

folglich sind $q^2$ und $r^2$ von ungleichem Vorzeichen und ist $r^2$ als das kleinere negativ.

Jetzt hat Gl. (2) als einzige reelle Wurzeln:

$$x = c(p \pm q)$$

deren eine $> c$, die andre Mittel zwischen $c$ und $-c$ ist. Bezeichnet $q$ die positive Quadratwurzel, so ist hiernach der Gleichgewichtspunkt

$$x = c(p - q)$$

$$= c\sqrt{\tfrac{1}{2}z + k} - \sqrt{2k - \tfrac{1}{2}z + \frac{2km + n}{\sqrt{\tfrac{1}{2}z + k}}}$$

## §. 2. Gleichgewichtspunkte der Anziehung dreier Seiten eines Rechtecks.

Geht von einem Punkte $A$ einer begrenzten Linie $L$ eine unbegrenzte Gerade $AX$ aus, welche $L$ nicht berührt und nicht zum zweitenmale trifft, und wird ein Punkt $P$ auf $AX$ von $L$ nach Newton'schem Gesetze angezogen, so ist die einem von 0 bis $\infty$ wachsenden $AP$ entsprechende Componente nach $AX$ zu Anfang und später definitiv positiv in der Richtung nach $A$ hin. Denn für unendlich kleines $AP$ ist die Anziehung eines höchstens in 1. Ordnung unendlich kleinen angrenzenden Stücks von $L$ unendlich gross 1. Ordnung, und die des ganzen Restes von $L$ endlich. Sobald nachher $P$ die Grenze der Projection von $L$ auf $AX$ überschreitet, liegt die ganze Figur mit $A$ auf einer Seite von $P$, zieht also $P$ in allen ihren Teilen nach $A$ hin. Hieraus folgt der Satz:

„Die Componente der Anziehung einer begrenzten Linie in be-„liebiger nicht tangirender Richtung nach einem Punkte der Linie „kann nur eine gerade Anzahl von Gleichgewichtspunkten ausserhalb „der Linie haben, wofern man jeden Punkt, dem eine Componente „null und zugleich Maximum oder Minimum entspricht, doppelt „zählt."

Dieser Satz gilt ebensowol im Raume wie in der Ebene. Im Folgenden machen wir specielle Anwendung auf einen Fall der Ebene.

Die anziehende Linie $\Pi$ bestehe aus 3 Seiten eines Rechtecks. Sei $AB = CD = a$ und $BC = 2b$, der angezogene Punkt $P$ liege auf der Symmetrieaxe $MN$ innerhalb des Rechtecks, wo $M$ die Mitte von $BC$. Die Anziehung wird also repräsentirt durch ihre axiale Componente.

Diese Componente ist für jede der parallelen Seiten

$$= \frac{1}{AP} - \frac{1}{BP} = \frac{1}{\sqrt{(a-h)^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

die Anziehung von $BC$

$$= \frac{BC}{h\,BP} = \frac{2b}{h\sqrt{h^2 + b^2}}$$

wo $h = MB$; daher ist die Anziehung der Linie $\Pi$

$$= \frac{2}{\sqrt{(a-h)^2+b^2}} - 2\frac{h-b}{h\sqrt{h^2+b^2}}$$

in der Richtung von $P$ nach $M$, die Bedingung des Gleichgewichts:

$$h\sqrt{h^2+b^2} = (h-b)\sqrt{(a-h)^2+b^2} \tag{1}$$

woraus als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung hervorgeht:

$$h^2(h^2+b^2) = (h-b)^2[(a-h)^2+b^2]$$

d. i. nach Potenzen von $h$ entwickelt:

$$H(a, h) \equiv \tag{2}$$
$$2(a+b)h^3-(a^2+4ab+b^2)h^2+2(a^2+ab+b^2)bh-(a^2+b^2)b^2 = 0$$

und nach Potenzen von $a$:

$$a^2(h-b)^2-2ah(h-b)^2 = b(2h-b)(h^2+b^2).$$

was sich schreiben lässt:

$$(a-h)^2 = \frac{h^4+2b^3h-b^4}{(h-b)^2} \tag{3}$$

Die 3 Wurzeln $h$ von Gl. (2) teilen sich unter die 2 Gleichungen

$$h\sqrt{h^2+b^2} = (h-b)\sqrt{(a-h)^2+b^2} \tag{4}$$

$$h\sqrt{h^2+b^2} = -(h-b)\sqrt{(a-h)^2+b^2} \tag{5}$$

Dem vorangestellten Satze zufolge kann erstere nur keine oder zwei reelle Wurzeln haben. Gehen wir nun von dem Falle $a = b$ aus' so reducirt sich hier Gl. (2) auf

$$h^3+(h-b)^3 = 0$$

und hat eine reelle Wurzel $h = \frac{1}{2}b$, welche der Gl. (5), und 2 imaginäre $h_{1,2} = \frac{1}{2}b(1 \pm i\sqrt{3})$, welche der Gl. (4) genügen.

Andrerseits ist leicht zu ersehen, dass die Function

$$\frac{h\sqrt{h^2+b^2}}{h-b}$$

von irgend einem Werte an mit $h$ beständig und ins unendliche wächst. Nach Gl. (1) wächst dann auch das stets positive $a-h$, und umsomehr $a$ mit $h$, d. h. die Function $a$ von $h$ ist eindeutig umkehrbar, und jedem hinreichend grossen $a$ entspricht ein reelles $h$.

Lässt man nun $a$ von $a = b$ an bis zu diesem Werte stetig wachsen, so muss irgend einmal das anfänglich conjugirt complexe

Wertepar $h$ in ein reelles übergehen und an der Grenze zusammenfallen, wir wollen sagen in $h = h_0$ entsprechend $a = a_0$.

Ist ferner $a = a_1$ derjenige Wert, von welchem an $h$ mit $a$ wächst, und entspricht ihm $h = h_1$, so hat Gl. (4) für $a > a_1$ zwei reelle Wurzeln $h$, deren einer $> h_1$ ist, während der andre, weil $h$ eindeutig in $a$, $< h_1$ sein muss.

Gleichzeitig hat Gl (2) 3 reelle Wurzeln, deren einer der Gl. (5) angehört. Diese aber kann nur für $h < b$ erfüllt werden. Hiernach bilden $b$ und $h_1$ feste Grenzen für die 3 Wurzeln: die beiden grössten, unter sich durch $h_1$, gegen die dritte durch $b$ geschieden, bestimmen Gleichgewichtspunkte; da sie für $a = a_0$ in $h_0$ zusammenfallen, so muss $h_0 = h_1$ und $a_0 = a_1$ sein.

Das letztere Ergebniss $h_0 = h_1$ erhält man auch sofort bei Bestimmung beider Grössen. Denn $h = h_1$ entspricht dem Beginn des definitiven Wachsens von $a$ mit $h$; die Bedingung ist:

$$\frac{\partial H(a,h)}{\partial h} = 0; \quad H(a,h) = 0 \tag{6}$$

Bedingung für $h = h_0$ ist die Existenz einer doppelten Wurzel, also dieselben Gleichungen (6). Es bleibt nur in Frage, ob diese nach Elimination von $h$ durch mehrere Werte von $a$ erfüllt werden können.

Unmittelbar erhält man aus den Gl. (6):

$$3(a+b)h^2 - (a^2+4ab+b^2)h + (a^2+ab+b^2)b = 0$$
$$(a^2+4ab+b^2)h^2 - 4(a^2+ab+b^2)bh + 3(a^2+b^2)b^2 = 0$$

woraus zunächst: (7)

$$(a^4-4a^3b-6a^2b^2-16ab^3-11b^4)h = (a^4-4a^3b-3a^2b^2-4ab^3-8b^4)b$$
$$(a^4-4a^3b-3a^2b^2-4ab^3-8b^4)h = (a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)b$$

und schliesslich:

$$2a^6-12a^5b+3a^4b^2-40a^3b^3-24a^2b^4-12ab^5-25b^6 = 0$$

das ist:

$$2(a-b)^6 = 27(a^2+b^2)^2b^2$$

oder, da $a-b$ stets positiv:

$$\sqrt{2(a-b)^3} = 3\sqrt{3(a^2+b^2)b}$$

Setzt man hier

$$a = \alpha(\gamma+4); \quad b = \alpha(\gamma-2)$$

so kommt:

$$\gamma^3+6\gamma-4(5+3\sqrt{6}) = 0 \tag{8}$$

7*

$$\gamma = \sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{5+3\sqrt{6}+\sqrt{81+30\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{6}-\sqrt{81+30\sqrt{6}}}\right)$$

$$\gamma = 3,128\,5746$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma+4}{\gamma-2} = 6,316\,4420$$

Drückt man die Coefficienten der Gl. (7) in $\gamma$ aus, so kommt:

$$2(-\gamma^4+2\gamma^3+8\gamma+20)h = (-\gamma^4+2\gamma^3-6\gamma^2+32\gamma+32)b$$
$$(-\gamma^4+2\gamma^3-6\gamma^2+32\gamma+32)h = 72b$$

Reducirt man durch Gl. (8) $\gamma^4$ und $\gamma^3$ auf niedere Potenzen, so geben beide Gleichungen übereinstimmend:

$$(2+\sqrt{6}-\gamma)h = \sqrt{6}b$$

Demnach ist die kleinste Abscisse eines Gleichgewichtspunktes

$$h_0 = \frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\gamma}b = 1,854\,3855b$$

und das kleinste $a$, dem ein Gleichgewichtspunkt entspricht:

$$a_0 = \frac{\gamma+4}{\gamma-2}b = 6,316\,4420b$$

Um die Resultate zusammenzustellen, so existirt

für $a < a_0$ kein Gleichgewichtspunkt,
für $a = a_0$ einer, nämlich $h = h_0$,
für $a > a_0$ zwei, nämlich $h = h'$ und $h''$, von denen

$$h' > h_0, \quad h_0 > h'' > b$$

ist. Die dritte Wurzel von $H = 0$ ist $h''' < b$ und genügt der Gleichung (5).

Endlich ist es noch von Interesse die Lösungen für unendlich grosses $a$ zu untersuchen. Sei

$$\frac{b}{a} = \beta; \quad \frac{h}{a} = \eta$$

so dass Gl. (2) übergeht in

$$2(1+\beta)\eta^3-(1+4\beta+\beta^2)\eta^2+2(1+\beta+\beta^2)\beta\eta-(1+\beta^2)\beta^2 = 0 \quad (9)$$

Für $\beta = 0$ erhält man $(2\eta-1)\eta^2 = 0$, woraus als grösste Wurzel $\eta' = \frac{1}{2}$ hervorgeht, während die beiden andern verschwinden. Entwickelt man also $\eta$ nach Potenzen von $\beta$, so ergibt sich der Wert

von $\eta' = \frac{h'}{a}$. Die Entwickelung muss, damit sich $h''$ und $h'''$ scheiden, mindestens bis zur 4. Potenz getrieben werden, wo man findet:

$$\eta' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta - \beta^2 - 5\beta^3 - 17\beta^4$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (9) ein, subtrahirt die Gleichung in $\eta'$ von der in $\eta$ und dividirt durch $\eta - \eta'$, so erhält man die quadratische, für $\eta = \eta''$ und $\eta = \eta'''$ gültige Gleichung:

$$(1+\beta)\eta^2 - 2\beta(1+\beta+3\beta^2+11\beta^3)\eta + \beta^2(1+\beta+4\beta^2) = 0$$

oder nach Division durch $1+\beta$:

$$\eta^2 - 2\beta(1+3\beta^2+8\beta^3)\eta + \beta^2(1+4\beta^2) = 0$$

und nach Auflösung:

$$\eta = \beta \pm \sqrt{2}\,\beta^2$$

das ist:

$$h' = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b - \frac{b^2}{a}; \quad h'' = b + \sqrt{2}\frac{b^2}{a}; \quad h''' = b - \sqrt{2}\frac{b^2}{a}$$

Die 2 ersten Ausdrücke bestimmen für sehr grosse $a:b$ annähernd die Gleichgewichtspunkte.

### §. 3. Gleichgewichtspunkte der Anziehung einer symmetrischen dreiteiligen gebrochenen Linie.

Die gebrochene Linie $L$ sei $ABCD$, die Stücke $BA$ und $CD$ liegen symmetrisch zur $x$ Axe $MN$, und zwar sei $M$ Projection von $B$ und $C$ und Anfang der $xy$, $N$ Projection von $A$ und $D$ auf die $x$ Axe; $\beta$ sei Richtungswinkel von $BA$.

Der von $L$ angezogene Punkt auf der $x$ Axe sei $P$ mit den Coordinaten $x$, 0 und $AP = \varrho$, $BP = \sigma$. Das Lot $PQ$ von $P$ auf $AB$ sei $= h$. Dann sind die Coordinaten von $A$, $B$ bzhw.

$$(x) = MN = a, \qquad 0$$
$$(y) = AN = b + a\,\mathrm{tg}\,\beta, \qquad BM = b$$

und man hat:

$$\varrho^2 = (a-x)^2 + (b + a\,\mathrm{tg}\,\beta)^2; \quad \sigma^2 = x^2 + b^2$$
$$h = x\sin\beta + b\cos\beta$$

Die Componenten der Anziehung von $AB$ und $BM$ in der $x$ Richtung sind bzhw.:

$$X_1 = -\frac{b+a\,\mathrm{tg}\,\beta}{\varrho h} + \frac{b}{\sigma h}, \quad X_2 = -\frac{b}{\sigma x}$$

daher ist die Anziehung der ganzen Figur $L$

$$X = 2(X_1+X_2) = -2\left\{\frac{b+a\,\mathrm{tg}\,\beta}{\varrho h} + \frac{b}{\sigma}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)\right\}$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$G \equiv \varrho b(x-h) - \sigma(b+a\,\mathrm{tg}\,\beta)x = 0$$

während $G > 0$ die positive $x$ Richtung der Anziehung anzeigt.

Nach Multiplication mit

$$\varrho b(x-h) + \sigma(b+a\,\mathrm{tg}\,\beta)x$$

erhält man als notwendige Bedingung die rationale Gleichung 4. Grades:

$$\{(a-x)^2+(b+a\,\mathrm{tg}\,\beta)^2\}b^2(x-h)^2 - (x^2+b^2)(b+a\,\mathrm{tg}\,\beta)^2x^2 = 0 \qquad (1)$$

unter deren Wurzeln, solange $b+a\,\mathrm{tg}\,\beta > 0$ ist, diejenigen, welche $> h$ sind, auch die ausreichende Bedingung $G = 0$ erfüllen, mithin, soweit sie reell sind, Gleichgewichtspunkte bestimmen.

Da für $x > a$ die ganze Figur $L$ auf negativer Seite von $P$ liegt, so ist hier stets $G < 0$. Hat nun $G = 0$ reelle Wurzeln, und ist $x = x_1$ die grösste unter ihnen, so ist $x_1 < a$. Verlängert man dann $BA$ und $CD$ um gleiche Stücke, so ist die Componente der Anziehung der Verlängerungen positiv, also wird durch den Zuwachs von $a$ auch $G > 0$, muss aber für hinreichend grosses $x$ negativ werden, folglich für irgend ein $x > x_1$ verschwinden. Hieraus folgt der Satz:

Existirt für irgend ein $a$ ein Gleichgewichtspunkt, so existirt auch für jedes grössere $a$ ein solcher, und existirt für irgend ein $a$ keiner, so existirt auch für jedes kleinere $a$ keiner.

Demgemäss erhalten wir die äusserste Grenze der Existenz von Gleichgewichtspunkten, wenn wir $a = \infty$ setzen. Dann geht Gl. (1) über in

$$x^4\sin^2\beta + b^2x^2(2\sin\beta - 1) + 2b^3x\cos\beta(1-\sin\beta) - b^4\cos^2\beta = 0$$

oder, wenn man

$$x = bz\cos\beta; \quad \sin\beta = n$$

setzt, in

$$z^4n^2(1-n^2) + z^2(2n-1) + 2z(1-n) - 1 = 0$$

An den Grenzen zwischen zweien der Fälle, wo sie keine, zwei oder

vier reelle Wurzeln hat, müssen 2 Wurzeln zusammenfallen; hier ist also

$$2z^3n^2(1-n^2)+z(2n-1)+(1-n)=0$$

Eliminirt man $z$ zwischen beiden Gleichungen, so kommt:

$$n^2(11n^6-36n^5+19n^4+32n^3-19n^2-10n+2)=0$$

das ist:

$$n^2(11n^2-14n+2)(n^2-n-1)^2=0$$

woraus 5 verschiedene reelle Wurzeln hervorgehen. Da die Elimination der höhern Potenzen von $z$ zu linearen Gleichungen führt, so entspricht jedem $n$ nur ein $z$, und es ergeben sich die Werte:

$$n=0; \qquad z=1; \qquad \frac{x-h}{b\cos\beta}=0$$

$$n=\frac{7\pm3\sqrt{3}}{11}; \qquad z=2\mp\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \frac{x-h}{b\cos\beta}=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$n=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \qquad z=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}; \qquad \frac{x-h}{b\cos\beta}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$$

Der Fall $n=0$ ist in §. 2. behandelt. Unter den 4 übrigen sind die Werte mit obern Zeichen zu verwerfen, weil $n>1$ wird. Es bleiben nur die zwei:

1) Für positives $\beta$ hat man allein:

$$\sin\beta=\frac{7-3\sqrt{3}}{11}; \quad \beta=0{,}104\,8707\,\mathrm{R}$$

$$x=\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)b\cos\beta=2{,}542\,460\,b>h$$

2) für negatives $\beta$:

$$\sin\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \quad \beta=-0{,}424\,1412\,\mathrm{R}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b\cos\beta=1{,}272\,020\,b>h$$

Da nach §. 2. für $\beta=0$ und hinreichend grosses $a$, mithin auch für $a=\infty$ zwei Gleichgewichtspunkte existiren, so müssen sich an der eben bestimmten Grenze das reelle und imaginäre Wurzelpar so scheiden, dass das reelle im ganzen Intervall zwischen 0 und jeder der beiden Grenzen statthat. Es hat sich also ergeben:

Für $0<\beta<0{,}104\,8707\ldots\,\mathrm{R}$ existiren für hinreichend grosses $a$ zwei Gleichgewichtspunkte, für grösseres $\beta$ keiner, so gross immer $a$ sei.

Die negativen $\beta$ würden in Betreff des eventuellen Durchschnitts von $BA$ und $CD$ besondere Untersuchung erfordern, auf die ich hier nicht eingehe.

### §. 4. Minimum der Kreisbogen, deren Anziehung Gleichgewichtspunkte hat.

Wächst der Bogen $B$ eines constanten Kreises von 0 bis zum vollen Kreise, so hat (wie ich am Schlusse des Aufsatzes XVII. T. VII. S. 336 bewiesen habe) seine Anziehung im Anfang bis zu einer gewissen Grenze keinen, darüber hinaus zwei Gleichgewichtspunkte auf der Symmetrieaxe.

Im Folgenden will ich in der Kürze das Verfahren angeben, nach welchem ich diese Grenze

$$\tfrac{1}{2}B = 1,806\,9374\,\mathrm{R}$$

wo der Radius = 1 gesetzt ist, und R den Quadranten bedeutet, berechnet habe.

Da nur Punkte auf der Symmetrieaxe in Betracht gezogen sind, so ist vorher die Berechtigung zu begründen. In der Tat gibt es ein- und mehrfach symmetrisch gestaltete Linien mit Gleichgewichtspunkten, die auf keiner Axe liegen. Dass ein Kreisbogen nicht in diesem Falle ist, lässt sich leicht zeigen.

Wir nehmen an, $P$ sei ein Gleichgewichtspunkt für den Bogen $B$, ziehen durch $P$ den Durchmesser $D$ und durch beide Enden von $B$ Sehnen $KL$ und $MN$ normal zu $D$. Letztere teilen den vollen Kreis in 4 Stücke: Bog. $KL$ und $MN$, einzeln symmetrisch zu $D$, und zwischen beiden Bog. $KM$ und $LN$ (in besondern Fällen kann ein Stück null sein). Die zu $D$ normale Componente der Anziehung von $KL$ und $MN$, mögen sie zu $B$ gehören oder nicht, ist stets null. Von $KM$ und $LN$ aber ist stets eins Teil von $B$, das andre nicht; daher ist die transversale Componente der allein übrig bleibenden Anziehung stets positiv nach der Seite des erstern Bogens hin, und $P$ befindet sich nicht im Gleichgewichte, wenn nicht beide Sehnen zusammenfallen, mithin $D$ Symmetrieaxe von $B$ ist, w. z. b. w.

Sei also der vom Bogen $B$ angezogene Punkt $P$ auf der Symmetrieaxe $D$ gelegen. Wir nehmen den Mittelpunkt des Kreises zum Anfang der $xy$, $D$ zur Axe der $x$, positiv nach der Mitte von $B$ hin, und zwar seien $x$, 0 Coordinaten von $P$ und $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ Coordinaten des Bogenelements $\partial\varphi$. Den Enden des Bogens ent-

sprechen $\varphi = \pm \alpha R$, und $\varrho$ sei die Entfernung von $P$ und $\partial\varphi$. Dann sind die Componenten der Anziehung

$$X = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{\cos\varphi - x}{\varrho^3} \partial\varphi; \quad Y = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{\sin\varphi \, \partial\varphi}{\varrho^3} = 0$$

$$\varrho^2 = 1 + x^2 - 2x\cos\varphi$$

und die Bedingung des Gleichgewichts:

$$X = 0$$

wodurch $x$ als Function von $\alpha$ bestimmt wird.

Zum Ausdruck des Integrals in elliptischen Functionen sei

$$\varphi = 2\,\mathrm{amc}\,u; \quad \alpha R = 2\,\mathrm{amc}\,\eta$$

$$k = \frac{2\sqrt{-x}}{1-x}; \quad k' = \frac{1+x}{1-x}$$

dann wird

$$X = 2\frac{\mathrm{el}\,\eta - E + k'(K - \eta)}{-x(1+x)}$$

Einfacher und zur numerischen Rechnung geeigneter wird der Ausdruck durch Einführung der Functionen:

$$\Theta_1(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-n^2\tau + 2niv}; \quad \Theta(v, \tau) = \Theta_1(v - R, \tau)$$

$$H_1(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\tau + (2n+1)iv}; \quad H(v, \tau) = H_1(v - R, \tau)$$

Hier wird die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\Theta'(v, \tau)}{\Theta(v, \tau)} = G(R - v); \quad G = -k'\Theta_1^4(0, \tau) - \frac{H_1''(0, \tau)}{H_1(0, \tau)}$$

Für $k > \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $\tau < 2R$ kann man zum conjugirten Modul $\sigma$ übergehen bestimmt durch

$$\sigma\tau = 4R^2$$

zugleich nehmen wir dann das Complement von $v$ und setzen:

$$w = \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{v}{R}\right)$$

dann lautet die Bedingungsgleichung:

$$\frac{i\Theta_1'(iw, \sigma)}{\Theta_1(iw, \sigma)} = Jw; \quad J = k'\Theta_1^4(0, \sigma) - \frac{\Theta_1''(0, \sigma)}{\Theta(0, \sigma)}$$

Bei einer siebenstelligen Rechnung reicht es vollkommen aus die Reihen bis zur 4. Potenz von

$$q = e^{-\tau}, \qquad q' = e^{-\sigma}$$

zu benutzen. Die Gleichungen werden dann:

$$\frac{4q \sin 2v(1 - 4q^3 \cos 2v)}{1 - 2q \cos 2v + q^4 \cos 4v} = G(R - v) \tag{1}$$

$$G = \frac{1 + 9q^2}{1 + q^2} - k'(1 + 2q + 2q^4)^4$$

$$\frac{4q' \frac{\sin 2iw}{i}(1 + 4q'^3 \cos 2iw)}{1 + 2q' \cos 2iw + 2q'^4 \cos 4iw} = Jw \tag{2}$$

$$J = k'(1 + 2q' + 2q'^4)^4 - \frac{8q'(1 - 4q'^3)}{1 - 2q' + 2q'^4}$$

Um nun für gegebenen Bogen die Gleichgewichtspunkte zu finden, würde man $x$ als Function von $\alpha$ darzustellen haben. Mit $q$, $q'$, $v$, $w$ stehen $x$ und $\alpha$ in folgender Beziehung. Sei

$$k = \sin \beta R; \qquad k' = \cos \beta R$$

dann wird

$$x = -\operatorname{tg}^2 \frac{\beta R}{2}; \quad q = e^{-\tau}; \quad q' = e^{-\sigma}$$

$$\sin \beta R = \frac{H_1^2(0, \tau)}{\Theta_1^2(0, \tau)} = \frac{\Theta^2(0, \sigma)}{\Theta_1^2(0, \sigma)}; \quad \cos \beta R = \frac{\Theta^2(0, \tau)}{\Theta_1^2(0, \tau)} = \frac{H_1^2(0, \sigma)}{\Theta_1^2(0, \sigma)}$$

$$\cot \frac{\alpha R}{2} = \sqrt{k'} \frac{H(v, \tau)}{H_1(v, \tau)} = \sqrt{k'} \frac{\sin v - q^2 \sin 3v}{\cos v + q^2 \cos 3v} \tag{3}$$

$$= \sqrt{k'} \frac{i\Theta(iw, \sigma)}{H(iw, \sigma)} = \sqrt{k'} \frac{1 - 2q' \cos 2iw + 2q'^4 \cos 4iw}{2q'^{\frac{1}{4}}(\sin iw - q'^2 \sin 3iw)}$$

Da in Gl. (1) und (2) $v$ und $w$ implicite von $x$ und $\alpha$ abhangen, so ist eine directe Lösung nach $x$ nicht wol möglich, ebensowenig die inverse. Man hat nur den einen Weg, erst die Gleichungen nach $v$ resp. $w$ (approximativ) aufzulösen, $x$ aus $q(q')$, $\alpha$ aus $q$, $v$, $(q', w)$ zu berechnen, schliesslich die erhaltene Darstellung von $\alpha$ in $x$ umzukehren.

Diese Rechnung lässt sich in Reihen, die nach Potenzen von $q$ resp. $\sqrt{q'}$ fortschreiten, ausführen; doch convergiren die resultirenden Reihen so schwach, dass sie zur numerischen Ausrechnung völlig unbrauchbar sind. Dagegen führt die gewöhnliche Approximationsmethode, welche jeden Näherungswert dem resultirenden Fehler pro-

portional corrigirt, sehr schnell und leicht zum Ziele. Die folgende kleine Tafel geht nicht von $q$, sondern von $\beta$ aus. Die entsprechenden Werte von $q$ habe ich der von E. Meissel berechneten und herausgegebenen achtstelligen Tafel entnommen; aus ihnen gehen die Werte von $q'$ leicht hervor.

| $\beta$ | $\alpha$ | $x$ |
|---|---|---|
| 0,1 | 1,993 8822 | —0,006 1940 |
| 0,2 | 1,976 1331 | —0,025 8856 |
| 0,3 | 1,948 5543 | —0,057 6378 |
| 0,4 | 1,914 0766 | —0,105 5728 |
| 0,5 | 1,875 3810 | —0,171 5729 |
| 0,6 | 1,840 4380 | —0,259 6162 |
| 0,7 | 1,815 4961 | —0,375 5248 |
| 0,8 | 1,807 3806 | —0,527 8639 |
| 0,9 | 1,947 3050 | —0,729 4538 |

Zur Bestimmung des Minimums von $\alpha$, welches der Tabelle zufolge nicht weit von $\beta = 0{,}8$ entfernt sein kann, würde sich die analytische Bedingung wenig eignen, weil die derivirte Gl. (2) schon complicirt ist und nach Elimination von $\partial q'$, $\partial w$ mittelst Gl. (3) noch complicirter wird. Dagegen ergibt sich das Minimum siebenstellig sehr bald, wenn man über die zweite Bruchstelle von $\beta$ eine neue Tafel berechnet, die sich nur auf die nächtliegenden Werte, etwa 0,78; 0,79; 0,81 zu erstrecken braucht; dann in der Nähe des kleinsten $\alpha$ mit der dritten Stelle ebenso verfährt, u. s. f. Die vierte Tabelle lautet:

| $\beta$ | $\alpha$ |
|---|---|
| 0,7808 | 1,806 9378 |
| 0,7809 | 1,806 9374 |
| 0,7810 | 1,806 9376 |

(4)

Sind die Differenzen der $\beta$ hinreichend klein geworden, wie wir hier z. B. annehmen wollen, so kann man in dem kleinen Intervalle die Curve $\alpha = \mathfrak{Fct.}\,(\beta)$ durch eine Parabel ersetzen, die durch die 3 Punkte $(\alpha\beta)$ geht, und deren Scheitel dann dem Minimum sehr nahe entsprechen muss. Sei also, wenn $\alpha_0 = \mathfrak{Fct.}\,(\beta_0)$ den Scheitel bezeichnet,

$$\alpha_0 = 1{,}806\,9378 - 10^{-7}X; \quad \beta_0 = 0{,}7808 + 10^{-4}Y$$

dann kommt:

$$Y^2 = 2pX; \quad (Y-1)^2 = 2p(X-4); \quad (Y-2)^2 = 2p(X-2)$$

woraus:

$$X = \frac{49}{12}; \quad Y = \frac{7}{6}; \quad p = \frac{1}{6}$$

also

$$\beta_0 = 0{,}780\,9167; \quad \alpha_0 = 1{,}806\;9373\;9167$$

Die 3 letzten Ziffern würden Geltung haben, wenn die Zahlen (4) bis auf 3 weitere Stellen genau wären. Für die siebenstellige Rechnung fallen sie weg, und man hat für das Minimum:

$$\beta = 0{,}7809; \quad \alpha = 1{,}806\,9374; \quad x = -0{,}495\,4$$

Von $x$ können natürlich alsdann nur höchstens 4 Stellen gefunden werden.

R. Hoppe.

---

3.

## Zur Theorie der Kegelschnittslinien.

1. Zieht man an einen Kegelschnitt in einem beliebigen Punkte $A$ die Tangente und verbindet $A$ mit den beiden unendlich fernen Punkten der Curve, so ist das Product der Entfernungen irgend eines Punktes der Kegelschnittslinie von den beiden letztgenannten Geraden proportional seiner Entfernung von der Tangente.

Sei

$$u_2 + 2u_1 + u_0 = 0 \tag{1}$$

worin

$$u_2 = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad u_1 = a_{13}x + a_{23}y, \quad u_0 = a_{33}$$

die Gleichung des Kegelschnitts, bezogen auf rechtwinklige Axen. Transformirt man zu parallelen Axen mit dem Ursprung $A(x_0, y_0)$, so nimmt die Gleichung die Form

$$u_2 + 2u_1' = 0 \tag{2}$$

worin

$$u_1' = a_{13}'x + a_{23}'y$$

an; $a_{13}'$, $a_{23}'$ sind lineare Functionen von $x_0$, $y_0$ mit Coefficienten der ursprünglichen Gleichung.

Die Gleichung der Tangente in $A$ ist

$$u_1' = 0 \tag{3}$$

die Gleichung des Geradenpaars, welches $A$ mit den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts verbindet, ist

$$u_2 = 0 \tag{4}$$

Zerlegt man $u_2$ in die linearen Factoren und setzt dabei zur Abkürzung die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = w \tag{5}$$

so schreiben sich die Gleichungen (3 und (4

$$u_1' = a_{13}'x + a_{23}'y = 0 \tag{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{a_{22}}[a_{22}y + (a_{12} - w)x][a_{22}y + (a_{12} + w)x] = 0 \tag{6*}$$

Bezeichnet $q$ die Entfernung des Punktes $B(x, y)$ auf (2 von der Tangente, $s$, $s'$ seine Entfernungen von den nach den unendlich fernen Punkten gerichteten Geraden, so ergeben sich auf Grund der Gleichungen (6 und (6* für diese Grössen die Ausdrücke

$$q = \frac{a_{13}'x + a_{23}'y}{\sqrt{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}}$$

$$s = \frac{a_{22}y + (a_{12} - w)x}{\sqrt{a_{22}^2 + (a_{12} - w)^2}}$$

$$s' = \frac{a_{22}y + (a_{12} + w)x}{\sqrt{a_{22}^2 + (a_{12} + w)^2}}$$

Hieraus folgt mit Zuziehung von (5

$$u_1' = q\sqrt{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}$$

$$u_2 = ss'\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in die Gleich. (2 gibt

$$ss' = 2q\sqrt{\frac{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}} \tag{7}$$

wo nunmehr $s$, $s'$, $q$ und die Quadratwurzel mit ihrem absoluten Betrag zu verstehen sind. Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen.

2. Die geometrische Bedeutung des aus den Coefficienten von (2 gebildeten Factors $\sqrt{\frac{a_{13}'^2 + a_{23}'^2}{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}} = R$ ergibt sich am einfachsten, wenn man von der Axengleichung des Kegelschnitts ausgeht.

a) Für die Ellipse, beziehungsweise Hyperbel geht die Gleichung

$$a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2$$

durch Transformation nach dem Ursprung $A(x_0, y_0)$ über in

$$\pm b^2 x^2 + a^2 y^2 \pm 2 b^2 x_0 x + 2 a^2 y_0 y = 0$$

es ist also

$$a_{11} = \pm b^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = a^2, \quad a_{13}' = \pm b^2 x_0, \quad a_{23}' = a^2 y_0$$

und

$$R = \frac{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}{a^2 \mp b^2}$$

der Abschnitt $n$, welchen die Hauptaxe des Kegelschnitts auf der Normale des Punktes $A$ bestimmt, ist aber

$$n = \frac{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}{a^2}$$

wenn also die relative Excentricität mit $\varepsilon$ bezeichnet wird, so geht der Ausdruck für $R$ in $\frac{n}{\varepsilon^2}$ über, und Gleich. (7 schreibt sich für die Ellipse und Hyperbel

$$\varepsilon^2 s s' = 2 n q \tag{8}$$

Für die gleichseitige Hyperbel wird insbesondere wegen $\varepsilon^2 = 2$

$$s s' = n q \tag{8*}$$

b) Die Gleichung der Parabel verwandelt sich bei der nämlichen Transformation in

$$y^2 - 2px + 2y_0 y = 0$$

so dass

$$a_{11} = a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{13}' = -p, \quad a_{23}' = y_0$$

und

$$R = \sqrt{p^2 + y_0^2}$$

wird; dies aber ist zugleich der Ausdruck für den Abschnitt $n$, welchen die Axe der Parabel auf der Normale in $A$ bestimmt. Da ferner im gegenwärtigen Falle die beiden reellen unendlich fernen Punkte in einen zusammenfallen, so wird $s' = s$, und die Gleich. (7 nimmt für die Parabel die Gestalt an

$$s^2 = 2 n q \tag{9}$$

Die Scheitelgleichung ist ein specieller Ausdruck für diese allgemeine Beziehung.

c) Bei dem Kreise, dessen Gleichung die Form

$$x^2+y^2+2x_0x+2y_0y=0$$

annimmt, werden $s$, $s'$ als Abstände eines Punktes von den Geraden absoluter Richtung durch $A$ unendlich gross. Betrachtet man aber den Kreis als Grenzform einer Ellipse für ein gegen null convergirendes $\varepsilon$, so zeigt sich, dass das Product $\varepsilon^2 ss'$ der bestimmten Grenze

$$(y-ix)(y+ix)=x^2+y^2=c^2$$

sich nähert, wobei $c$ die Strekе $AB$ bezeichnet, während $n$ den Wert $r$ des Halbmessers annimmt. Mithin wird man hier zu der elementargeometrischen Beziehung

$$c^2=2rq \tag{10}$$

geführt.

3. Der obige Satz gibt ein einfaches Mittel zur Lösung der beiden folgenden Aufgaben.

a) Von einer Hyperbel sind eine Tangente $a$ mit dem Berührungspunkt $A$, ein Punkt $B$ und die Richtungen der Asymptoten (die beiden unendlich fernen Punkte) gegeben.

Man führe durch $A$ die Parallelen zu den Asymptoten und fälle auf dieselben von $B$ die Lote $s$, $s'$, ebenso das Lot $q$ auf $a$. Vermöge der Gleich. (8 ergibt sich, wenn man den Asymptotenwinkel $2\Theta$ einführt durch die Relation $\varepsilon=\sec\Theta$:

$$2n=\frac{(s\sec\Theta)(s'\sec\Theta)}{q}$$

als vierte Proportionale der leicht zu construirenden Strecken $s\sec\Theta$, $s'\sec\Theta$ und der Strecke $q$. Wird nun $n$ auf der Normale in $A$ in der entsprechenden Richtung abgetragen, so erhält man einen Punkt der Hauptaxe und diese selbst als Parallele zur Halbirungslinie des Asymptotenwinkels. Damit ist aber auch $y_0$ und die Subtangente $t$ von $A$ bestimmt; da nun

$$t=\frac{y_0^2}{(\varepsilon^2-1)x_0}$$

so ergibt sich

$$x_0=\frac{(y_0\operatorname{cotg}\Theta)^2}{t}$$

und hiermit der Mittelpunkt der Hyperbel. Die weitere Verfolgung der Aufgabe bietet keine Schwierigkeit.

b) Von einer Parabel ist eine Tangente $a$ mit dem Berührungspunkt $A$, ein Punkt $B$ und die Richtung der Axe (der unendlich ferne Punkt) gegeben.

Man führe durch $A$ die Parallele zur Axe und fälle auf dieselbe aus $B$ das Lot $s$, ebenso das Lot $q$ auf $a$. Auf Grund der Gleichung (9 findet man

$$2n = \frac{s^2}{q}$$

durch Abtragen von $n$ auf der Normale in $A$ einen Punkt der Axe und somit auch diese selbst. Es ist nun leicht, die weitern Elemente zu bestimmen.

E. Czuber.

---

4.

**Inkreiscentrum als Gleichgewichtspunkt.**

Ist $P$ ein Punkt innerhalb eines Vielecks, $h$ sein Abstand von einer Seite $AB$, $\varphi$ und $\varphi'$ die Richtungswinkel von $PA$ und $PB$, so ist die Componente der Anziehung von $AB$ auf $P = (\sin\varphi' - \sin\varphi):h$, daher die Comp. d. Anz. des Umfangs die Summe aller den Seiten entsprechenden Werte, d. i. $= 0$, wenn $h$ für alle Seiten gleich ist. Folglich ist in diesem Falle der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ein Gleichgewichtspunkt der Anz. des Umfangs, beim Dreieck bedingungslos.

Das Analoge gilt auch vom Polyeder und analogen Gebilden von $n$ Dimensionen, nur muss die Anz. der $(-n)$ten Potenz der Entfernung proport. sein.

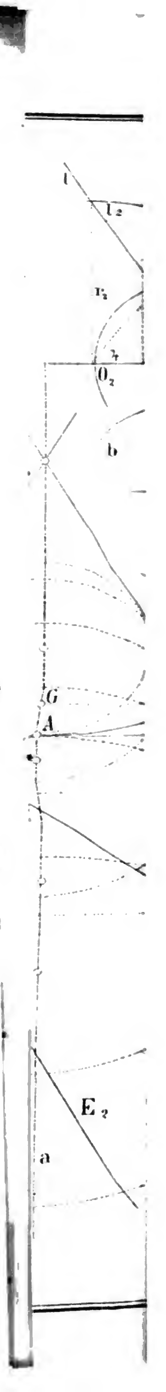
Sei nämlich $\partial f$ ein Element einer Polyederseite, $\varrho$ seine Entfernung von $P$, $h$ das Lot von $P$ auf die Seite, $\omega$ eine um $P$ mit dem Radius 1 beschriebene Kugelfläche, $\partial\omega$ die Radialprojection von $\partial f$; dann ist die Pyramide über $\partial f$ mit $P$ als Spitze $= \frac{1}{3}h\partial f = \frac{1}{3}\varrho^3\partial\omega$, daher die Anz. von $\partial f$ auf $P$

$$= \frac{\partial f}{\varrho^3} = \frac{\partial\omega}{h}$$

Ist jetzt $\partial\omega_1$ Normalprojection von $\partial\omega$ auf die $yz$ Ebene, so ist $\partial\omega_1:h$ die Comp. d. Anz. nach $x$ Richtung. Davon bei gleichen $h$ die Summe über die Oberfläche genommen gibt die Projection der Kugelfläche auf eine Ebene, d. i. null — w. z. b. w.

Anlass zu derlei Untersuchungen war mir der Vortrag des Hrn. Oekinghaus auf der Naturforschervers. (Tagebl. LXI. p. 7.) welcher zeigt, dass die Brennpunkte der Lemniskate deren Gleichgewichtspunkte sind.

R. Hoppe.


G
A
E 2
a
b

---

## INHALT.



---

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Zweite Reihe.

Achter Teil. Zweites Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1889.




V.

# Die harmonische Reihe.

## Ein Beitrag zur algebraischen Analysis.

Von

Dr. **Heinrich Simon** in Berlin[1]).

---

### Einleitung.

Die Reihentheorie bedient sich zur Begründung ihrer Sätze vielfach des fremdartigen Hilfsmittels der bestimmten Integrale. Es mag in manchen Fällen schwer scheinen, dieses Hilfsmittel durch die Methoden der algebraischen Analysis zu ersetzen — die Behauptung, dass ein solcher Ersatz wünschenswert sei, wird aber kaum vielem Widerspruche begegnen. Bezeichnet Herr Thomae[2]) es doch geradezu als „eine Forderung der Wissenschaft, dass sie die Resultate, die sie auf elementarem Wege erhalten *kann*, auch auf diesem zu erhalten suchen *muss*, wofern damit nur nicht übergrosse Weitläufigkeiten verbunden sind". Mit letzterer Einschränkung ist wol der Haupteinwand berührt, den man jener Forderung entgegenstellen kann: Ist Reinheit der Methode ein berechtigter Anspruch der Aesthetik der Wissenschaft, so ist es doch Eleganz und Kürze nicht minder, und wo beide in Widerstreit geraten, wird im einzelnen Falle der Geschmack zu entscheiden haben, welcher von ihnen

---

1) Nachstehende Arbeit ist ein an vielen Stellen umgearbeiteter und erweiterter Abdruck der unter derselben Aufschrift erschienenen Inaugural-Dissertation des Verfassers (Halle, 1886). Vergl. auch den Aufsatz d. Verf. T. VI. S. 105 u. 220.

2) „Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe". Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. XXVI. (1881) S. 315.

dem andern unterzuordnen sei. Lässt sich aber beiden zugleich genügen, so wird ein Versuch in dieser Richtung keiner weitern Rechtfertigung bedürfen.

Zu solchem Versuche forderte nun die harmonische Reihe besonders auf.

Dieselbe wird in ihrer einfachsten Gestalt, als Reihe der reciproken natürlichen Zahlen, gerade in den Elementen der Reihenlehre häufig herangezogen. Sie pflegt als der erste Beleg dafür angeführt zu werden, dass die unbegrenzte Abnahme der Glieder allein nicht hinreicht, um eine unendliche Reihe convergent zu machen; sie liefert, mit wechselnden Vorzeichen versehen, das einfachste Beispiel einer convergenten alternirenden Reihe; an ihr wird endlich seit Dirichlet[1]) die bedingte Convergenz erläutert und mit den Mitteln der algebraischen Analysis nachgewiesen, dass eine veränderte Anordnung der Glieder von Einfluss auf die Summe sein kann.

Allein damit sind die Eigenschaften der Reihe nur an der Oberfläche gestreift.

Denn zunächst lässt sich das Unendlichwerden der harmonischen Reihe in Beziehung setzen zu dem des Logarithmus; im engsten Zusammenhange hiermit steht dann die Gauss'sche Function $\Psi(z)$, die als Specialfall die Euler'sche Constante enthält, und mit deren Hilfe die annähernde Summirung der endlichen Reihe möglich wird. Das Umordnungsproblem endlich, welches, in Ermangelung des massgebenden Grenzwertes eines $n$-gliedrigen, unendlich fernen Reihen-Ausschnitts, nur für einige wenige Specialfälle behandelt zu werden pflegt — und das in einer Weise, die den wahren Sachverhalt mehr verhüllt als aufklärt, — lässt sich mit Hilfe des gedachten Grenzwertes allgemeiner und klarer lösen.

Die hierher gehörigen Sätze sind, wie eine Uebersicht der einschlägigen Litteratur weiterhin zeigen wird, an den verschiedensten Stellen zerstreut und fast ausschliesslich mit Hilfe der Infinitesimalrechnung hergeleitet. Insbesondere werden zur Ermittelung der Wertänderung der alternirenden harmonischen Reihe für den Fall, dass man auf $p$ positive Glieder immer $q$ negative folgen lässt, überall bestimmte Integrale herangezogen, so dass Herr Pringsheim, um solche Wertänderungen zu veranschaulichen, ein anderes Beispiel vorschlägt, bei dem die Integrale entbehrlich sind[2]). Letzteres ist nun

1) Abhandlg. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1837. S. 48.

2) „Ueber die Wertveränderungen bedingt convergenter Reihen und Produkte". Math. Annalen, Bd. XXII. (1883). S. 459.

aber, wie sich zeigen wird, auch bei der harmonischen Reihe der Fall, und damit ist das Umordnungsproblem der algebraischen Analysis in allgemeinerer Gestalt zugänglich gemacht, als man zunächst erwarten sollte. Denn ein noch zu erwähnender Satz von Herrn Schlömilch führt die Wertänderung, die eine ganz *beliebige* convergente alternirende Reihe bei der gedachten Umstellung der Glieder erfährt, auf die Wertänderung der *harmonischen* Reihe zurück, und dieser Satz lässt sich ohne Mühe für den Fall verallgemeinern, dass die Zahlen $p$ und $q$ variabel gemacht werden.

Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, dass von den allgemein üblichen, bequemen Ausdrücken „Umstellung der Glieder", „veränderte Anordnung" u. s. w. hier nur unter dem Vorbehalt Gebrauch gemacht wird, dass dieselben, wie schon Herr Natani[1]) hervorhebt, „im uneigentlichen Sinne zu verstehen" seien.

Was als Veränderung der Anordnung bezeichnet wird, ist eigentlich die Bildung einer ganz neuen Reihe aus *ausgewählten* Gliedern der ursprünglichen und läuft auf das *Fortlassen einer i. A. unendlichen Anzahl unendlich ferner Glieder* hinaus.

Bei dieser Auffassung ist das logische Paradoxon hinfällig, dass die Reihenfolge der Summanden von Einfluss auf die Summe sein könne, oder, wenn man lieber will, es lässt sich der Begriff der Addition auch auf den Fall unendlich vieler Summanden übertragen, ohne das Vertauschungsgesetz aufzugeben. Um den Betrag jenes fortgelassenen Ausschnitts muss sich nun offenbar die Reihensumme (algebraisch) vermindern. Damit ist denn unmittelbar klar, dass eine solche Fortlassung bei *absolut* convergenten Reihen keine Veränderung der Summe bewirken kann, weil die Convergenz einer aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe eben durch das *Verschwinden jeder* unendlich grossen Anzahl unendlich ferner Glieder *definirt* ist. Eine Veränderung der Summe kann also nur bei *bedingt* convergenten Reihen vorkommen und wird gleichzeitig mit jenem Ausschnitte einen endlichen oder unendlich grossen Wert haben, in welchem letzteren Falle die neue Reihe divergirt. Auch bei bedingt convergenten Reihen ist indessen das Verschwinden des fraglichen Ausschnitts nicht ausgeschlossen, wie das Beispiel der Reihe

$$\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{2f(2)} + \frac{1}{3f(3)} - \frac{1}{4f(4)} + - \cdots$$

zeigt, wo $f(n)$ eine beliebige, mit $n$ beständig wachsende, aber nicht

1) Mathemat. Wörterbuch (begonnen v. L. Hoffmann). Art. „Reihe". Bd. VI. S. 272.

stärker als $\log n$ unendlich werdende Function bedeutet. Leitet man aus ihr eine neue Reihe dadurch ab, dass man auf je ein positives Glied zwei negative Glieder folgen lässt, so entnimmt man aus den $4n$ ersten Gliedern zwar sämtliche $2n$ negativen, aber nur die ersten $n$ positiven Glieder. Der fortgelassene $n$-gliedrige Ausschnitt

$$\frac{1}{(2n+1)f(2n+1)} + \frac{1}{(2n+3)f(2n+3)} + \dots + \frac{1}{(4n-1)f(4n-1)}$$

liegt zwischen

$$\frac{n}{(2n+1)f(2n+1)} \quad \text{und} \quad \frac{n}{(4n-1)f(4n-1)}$$

hat also für $n = \infty$ die Null zur Grenze, so dass die vorgenommene Umstellung die Summe der Reihe, trotz ihrer nur bedingten Convergenz, unverändert lässt.

Der oben gegen die übliche Behandlungsweise ähnlicher specieller Umordnungen der harmonischen Reihe gerichtete Vorwurf bezieht sich darauf, dass nirgends von diesem Ausschnitt die Rede ist, der doch für jede endliche Gliederzahl den greifbaren Unterschied der beiden Anordnungen darstellt, und dessen Grenzwert leicht elementar zu finden ist.

## Litteratur.

Euler behandelt die endliche harmonische Reihe als Beispiel zu seiner Summenformel [1]), wobei die nach ihm benannte Constante $c$ als Integrationsconstante auftritt. Die hier, Gleichung (22) für die allgemeine, Gleichung (28) für die specielle harmonische Reihe, gegebene Näherungsformel stimmt mit dem Anfang der Euler'schen halbconvergenten Entwickelung überein. (Vgl. Formel 28a.)

Eulers Summation scheint das erste wirkliche Resultat in der Theorie der harmonischen Reihe zu sein. Er zählt dieselbe auch bereits neben der Facultät $1.2.3 \dots n$ zu den „inexplicablen" Functionen, während Joh. Bernoulli noch auf die Summirung durch einen geschlossenen Ausdruck hoffte und Leibnitz um einen solchen angieng [2]). Als Bernoulli später in einer älteren Abhandlung Leibnitz' die Behauptung fand, man könne beliebig viele Glieder der harmonischen Reihe summiren, wiederholte er seine

1) Differential-Rechnung. II. § 142 ff.

2) Leibnitz' Mathemat. Werke, herausgeg. v. Gerhardt, III. S. 160. Brief vom 2. Febr. 1695. — Die bezügliche Stelle ist auch in Grunerts Archiv, Bd. XXVI S. 109 abgedruckt.

Bitte [1]), Leibnitz musste indessen zugeben, er habe sich damals geirrt [2]).

Die Untersuchung der verallgemeinerten Facultät $\Pi(z)$ führt Gauss [3]) dazu, die logarithmische Ableitung derselben als besondere Function $\Psi(z)$ einzuführen, wobei $-\Psi(0)$ die Euler'sche Constante ist. Gleichzeitig wird für $\Psi(z)$ der Ausdruck

$$\lim_{n=\infty}\left[\log n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \cdots - \frac{1}{z+n}\right]$$
$$= \sum_{1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+k} + \log\frac{k+1}{k}\right)$$

gewonnen, dessen Zusammenhang mit der harmonischen Reihe ersichtlich ist.

Aus beiden Quellen fliessen eine Anzahl Eigenschaften von $\Psi(z)$. Statt dieser ist hier (§ 5) die ganz ähnliche Function

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \log(z+n)$$

definirt, deren Grenzwert für $n = \infty$ mit der Gauss'schen Function durch die Beziehung

$$C(z) = -\Psi(z-1), \qquad \Psi(z) = -C(z+1)$$

verknüpft ist. Die Eigenschaften von $C(z)$ lassen sich leicht aus dieser Definition allein und ohne Hilfe höherer Rechnung ableiten (§ 6).

Herr Thomae berührt in seiner schon erwähnten Abhandlung über die Gauss'sche Reihe die Function $\Psi(z)$ nur flüchtig und beschränkt sich auf die Herleitung des Satzes, dass

$$\Psi(n) - \log n = H(n) = \frac{1}{2n} + \frac{\Theta(n)}{n}$$

wo $\Theta(n)$ mit wachsendem $n$ verschwindet.

Eine ziemlich vollständige Theorie der Reihe giebt Herr Natani [4]). Mit Hilfe bestimmter Integrale wird gezeigt, dass die Differenz

---

1) Brief vom 12. Sept. 1696. A. a. O. S. 327.

2) Briefe vom 6. Oct. und 6. Nov. 1696. — Vgl. auch die Einleitung Gerhardts zum Briefwechsel, a. a. O. S. 119.

3) „Disquis. generales circa seriem infinitam etc.“ § 30. Comment. soc. Gotting. II. 1813. — Werke, III. Uebersetz. v. Simon, Berlin 1888.

4) Math. Wörterbuch. Art. „Reihe“. S. 284 ff.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)b}-\frac{1}{b}\log(a+nb)$$

sich mit wachsendem $n$ einem Grenzwerte $\varphi(a, b)$ nähert. Nach Gauss' Bezeichnung wäre also

$$b\varphi(a,b)=-\log b-\Psi\left(\frac{a-b}{b}\right)$$

Es wird eine schwach convergirende Reihe für $\varphi(a,b)$ entwickelt und daraus in $\varphi(1,1)$ die Euler'sche Constante gewonnen. Die Summe der alternirenden Reihe wird durch die Function $\varphi$ ausgedrückt. Die positiven und negativen Glieder dieser Reihe werden in Gruppen von $p$ bzhw. $q$ Gliedern zu einer neuen Reihe zusammengefasst, die Summe derselben wird auf die der ursprünglichen Reihe zurückgeführt, und der Betrag der Wertänderung, die hier, wie es scheint, zum ersten Male als Ausschnitt einer divergenten Reihe dargestellt ist, durch ein bestimmtes Integral ermittelt.

Bevor auf die übrigen Behandlungen des Umordnungsproblems eingegangen wird, sind noch einige Arbeiten zu nennen, die darauf ausgehen, die endliche Reihe näherungsweise zu summiren.

Herr Catalan leitet [1]) durch bestimmte Integrale die Einschliessung

$$c+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}<1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<c+\log n+\frac{1}{2n}$$

her, wo $c$ die Eulersche Constante bedeutet. Die Uebereinstimmung der unteren Grenze mit den ersten Gliedern der Euler'schen Reihe wird merkwürdigerweise nicht hervorgehoben.

An einer anderen Stelle [2]) werden aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals Sätze abgeleitet, wonach Summen zwischen Integrale eingeschlossen werden. Bei der Anwendung auf die harmonische Reihe ergeben sich Formeln von geringer Annäherung bei ziemlich umständlicher Rechnung. So wird die Summe der ersten tausend Glieder noch in der ersten Decimalstelle falsch.

Auf elementarem Wege gehen dagegen die Herren Mansion und Cesaro vor. Der erstere gelangt [3]) mit Hilfe der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel zu der Einschliessung

1) „Sur la série harmonique". Comptes Rendus de l'Acad. fr. 1856. II. S. 628.

2) „Traité élémentaire des séries", 1860. Cap. IV.

3) „On the harmonic series and Stirling's formula". Messenger of Math. XI. (1881) S. 38. — Auch Mathesis. I. S. 169.

$$\frac{1}{2n} < \sum_n^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$$

Die eingeschlossene Reihe convergirt demnach, und ihre Summe $c$ liegt, für $n = 1$, zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$. Daraus ergiebt sich weiter, dass

$$c + \log n + \frac{1}{2n+1} < 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < c + \log n + \frac{1}{2n}$$

Herr Cesaro gewinnt (dem Jahrbuch über die Fortschritte der Math. 1881 S. 199 zufolge) in einer mir nicht zugänglich gewesenen Arbeit [1]) die Formeln

$$\log(n + \tfrac{1}{2}) + 0{,}57 < 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \log(n + \tfrac{1}{2}) + 0{,}60$$

und

$$1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = c + \log\sqrt{n(n+1)} + \frac{\Theta}{6n(n+1)} \quad (0 < \Theta < 1)$$

Eine (andere?) Herleitung der letzteren Formel giebt er noch in einer neueren Note [2]), wobei

$$c = 1 - \tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{3}\sum_2^{\infty}\frac{1}{k^3} - \tfrac{1}{5}\sum_2^{\infty}\frac{1}{k^5} - \ldots$$

gesetzt ist, also wol durch diese Entwickelung definirt sein und aus ihr berechnet werden soll. Zur Rechnung ist jene Formel wegen der Unbestimmtheit von $\Theta$ nicht sehr brauchbar; den besten Näherungswert würde $\Theta = 1$ liefern, da dann die rechte Seite, nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $c + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$ beginnt, wie in der Euler'schen Reihe.

Was die *Wertveränderung* der alternirenden harmonischen Reihe betrifft, so scheint Dirichlet, der an der schon angegebenen Stelle zuerst darauf hinwies, auch an anderen Orten keinen Beweis oder eine Ermittelung des Betrages jener Wertänderung mitgeteilt zu haben [3]). Vielmehr scheint die erste nähere Behandlung der Aufgabe von Ohm [4]) herzurühren, der aus der Reihe

---

1) Mathesis. I. S. 51 und S. 143.

2) „Sur la série harm.". Nouv. Annales de Math. 1885. S. 295.

3) Vgl. Pringsheim, a. a. O. S. 456. Wenn daher Hr. Schlömilch in einer „Notiz über die bedingt converg. Reihen" (Ztschr. f. math. etc. Unterricht. XII. (1881) S. 30) seinen Nachweis dem von Dirichlet angeblich an der citirten Stelle gegebenen als einfacher gegenüberstellt, so liegt vielleicht eine Verwechselung mit einer Vorlesung Dirichlets vor.

4) De nonnullis seriebus infinitis summandis. Berlin. 1839.

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \ldots = \log 2$$

mehre andere ableitet, indem er dem Verhältniss der Anzahl der positiven zu der der negativen Glieder verschiedene specielle Werte und endlich den Wert $m:n$ beilegt; die Reihen werden durch Integration summirt, und so wird schliesslich der Satz gewonnen, dass im allgemeinsten der behandelten Fälle die Reihensumme um $\frac{1}{2}\log\frac{m}{n}$ wächst. Bei einigen der speciellen Fälle wird nebenher darauf aufmerksam gemacht, dass die ursprüngliche und die umgestellte Reihe sich um eine Reihe von Gliedern unterscheiden, deren Summe denselben Grenzwert hat wie die Wertänderung [1]).

Dieselbe Aufgabe wie Ohm behandelt Herr Schlömilch [2]) für die allgemeine harmonische Reihe, indem er zunächst die Summe der alternirenden Reihe durch ein bestimmtes Integral ausdrückt, und auch für die Wertänderung ein solches aufstellt und auswertet. Von der zweiten Auflage an wird die Untersuchung ausserdem noch auf eine *beliebige*, convergente alternirende Reihe erstreckt, wobei sich der Satz ergiebt [3]), dass die mehrfach erwähnte Umstellung der Glieder der Reihensumme den Zuwachs $\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}(n u_n)\log\frac{p}{q}$ zuführt.

Die elementare und noch etwas verallgemeinerte Herleitung dieses Satzes wird möglich mit Hilfe einer von Herrn Pringsheim [4]) gegebenen Methode, die Wertbestimmung eines unendlich fernen Ausschnitts einer divergenten Reihe positiver Glieder auf die des entsprechenden Ausschnitts einer andern solchen Reihe zurückzuführen. Denn wie Herr Pringsheim bemerkt, beruht der Schlömilch'sche Satz unmittelbar auf dem Verhalten der harmonischen Reihe, und der in Frage kommende Ausschnitt der letzteren wird elementar bestimmt werden.

Schliesslich ist noch der in vielen Lehrbüchern übereinstimmend gegebenen Behandlungen der Umordnungen der speciellen Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ für $p = 1$, $q = 2$ und $p = 2$, $q = 1$ zu ge-

---

1) Wie die Anmerkung „Series infinitae nunquam non eodem valore gaudent, si adhuc manent convergentes, etiamsi omnes termini signo + (additionis) afficiantur" (a. a. O. S. 14) zeigt, hat Ohm sehr wol gewusst, dass absolut convergente Reihen stets *dieselbe* Summe behalten. Vgl. dagegen Pringsheim, a. a. O. S. 456.

2) Uebungsbuch zum Studium d. höh. Analysis. II. Cap. V. § 23.

3) S. a. Ztschr. f. Math. u. Phys. XVIII (1873) S. 520.

4) A. a. O. S. 471.

denken, wobei die Summenänderung um $\frac{1}{2}\log 2$ elementar nachgewiesen wird [1]). Inwiefern die dabei übliche Darstellung reformbedürftig erscheint, ist bereits ausgeführt worden.

1. Aufstellung der Reihe. Die Forderung, jedes Glied einer Reihe solle das arithmetische Mittel zwischen dem ihm vorhergehenden und dem ihm folgenden Gliede sein, führt zu der arithmetischen Reihe; soll jedes Glied das geometrische Mittel zwischen seinen Nachbargliedern sein, so gelangt man zur geometrischen Reihe; dieselbe Bedingung für das harmonische Mittel liefert die harmonische Reihe.

Wir stellen uns die Aufgabe, die allgemeine Form dieser Reihe zu ermitteln.

$h_n$ ist das harmonische Mittel zwischen $h_{n-1}$ und $h_{n+1}$, wenn die drei Grössen der stetigen harmonischen Proportion

$$(h_{n-1} - h_n) : (h_n - h_{n+1}) = h_{n-1} : h_{n+1}$$

genügen. Dies liefert

$$\frac{1}{h_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_{n+1}}\right)$$

d. h., wenn man die reciproken Werte der Reihenglieder betrachtet, so ist jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen seinen Nachbarn. *Die reciproken Werte der Glieder bilden also eine arithmetische Reihe*, so dass das allgemeine Glied der harmonischen Reihe die Form

$$h_n = \frac{1}{a + nb}$$

besitzt [2]). Lassen wir noch den Factor $\frac{1}{b}$ fort und setzen wir

---

1) So bei Schlömilch, Algebraische Analysis § 29. — Scheibner, Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz, Leipzig 1860, § 6. — Vgl. auch Lionnet, Note sur la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ Nouv. Annales de Math. 1879.

2) Wie es scheint, ist die eigentliche Begründung des Namens der harmonischen Reihe ziemlich in Vergessenheit geraten; sonst würde wol kaum Scheibner (Ueber unendliche Reihen § 20) die Reihe der *Potenzen* der reciproken ganzen Zahlen als harmonische Reihe bezeichnen und weiterhin gar (§ 21) dieselbe Benennung für die Reihen

$$f(x) = \sum_k \frac{u_k}{(a+bk)^x}$$

vorschlagen.

$$\frac{a}{b} = z$$

so schreibt sich die Reihe in einfachster Form

$$(1)\quad S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k = \sum_{0}^{n} \frac{1}{z+k} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \ldots + \frac{1}{z+n}$$

Dabei kann $z$ jeden beliebigen, positiven oder negativen, reellen oder complexen Wert haben; ausgeschlossen seien nur Null und die negativen ganzen Zahlen, die eins der Glieder $\infty$ machen würden, sofern die Reihe von $k = 0$ an in Betracht gezogen wird; auch diese Beschränkung fällt aber fort, wenn die Reihe erst mit einem so grossen $k$ begonnen wird, dass $k + z \geqq 1$ ist [1]).

Jede harmonische Reihe lässt sich leicht auf die angesetzte Form zurückführen. So ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \ldots + \frac{1}{a+nb}$$
$$= \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a/b} + \frac{1}{a/b+1} + \ldots + \frac{1}{a/b+n}\right) = \frac{1}{b} S_n\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{1}{a-kb} + \frac{1}{a-(k-1)b} + \ldots + \frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{a+lb} = \frac{1}{b} S_{l+k}\left(\frac{a}{b} - k\right)$$

und die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = S_{n-1}(1)$$

2. Grenzen für den Ausschnitt $S_n(z) - S_m(z)$. Die Reihen-Entwickelungen

$$\left.\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + - \ldots\right) \\ \log\frac{1}{1-x} &= x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + + \ldots\right) \end{aligned}\right| \; |x| \leqq 1$$

liefern

$$\log(1+x) < x < \log\frac{1}{1-x}$$

Setzen wir hierin

$$x = \frac{1}{k+z}$$

---

1) Als Summationsbuchstabe gilt, wofern nichts anderes angegeben ist, überall $k$.

indem wir $k$ positiv und so gross voraussetzen, dass $|k+z| \geqq 1$ ist, so erhalten wir

$$\log \frac{k+1+z}{k+z} < \frac{1}{k+z} < \log \frac{k+z}{k-1+z}$$

und wenn wir hier nach und nach $k$ die ganzzahligen Werte $m+1$, $m+2, \ldots n$ annehmen lassen und die so entstehenden Ungleichungen addiren

$$(2) \quad \log \frac{n+1+z}{m+1+z} < \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} < \log \frac{n+z}{m+z} \qquad |m+1+z| \geqq 1$$

Ist $z$ reell, so ist die Geltungsbedingung erfüllt

| | | | |
|---|---|---|---|
| bei | $z = -\infty \ldots -2$ | für | $m = 0, 1, 2 \ldots$ |
| | $z = -2 \ldots -1$ | | $m = 2, 3, \ldots$ |
| | $z = -1 \ldots 0$ | | $m = 1, 2, \ldots$ |
| | $z = 0] \ldots +\infty$ | | $m = 0, 1, 2, \ldots$ |

immer vorausgesetzt, dass verschwindende Nenner $(k+z)$ vermieden werden.

Ist $z$ complex, etwa gleich $x+yi$, wo also $y$ nicht 0 ist, so kann für die Werte $x = -\infty \ldots -2$ und $x = 0 \ldots +\infty$, bei ganz beliebigem $y$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sein. Hat aber $x$ einen der Werte zwischen $-2$ und 0, die Grenzen ausgeschlossen, und ist $k$ die kleinste ganze Zahl, für die

$$y^2 \geqq -2(k+x)-(k+x)^2$$

erfüllt ist, so kann $m = k, k+1, \ldots$ gesetzt werden.

3. Divergenz der Reihe. Lassen wir in (2) $n$ unendlich werden, während $m$ endlich bleibt, so werden beide Grenzen für $S_n - S_m$ unendlich, also auch $S_n$ selbst.

Die Formel giebt zugleich eine gute Vorstellung davon, wie ausserordentlich langsam die Reihe divergirt. Denn es ist für $n = 2m$

$$\sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{k+z} < \log 2$$

Wie gross man auch $m$ wählen möge — die Summe der $m$ ersten Glieder wächst durch die Summe der nächsten $m$ Glieder stets um weniger als $\log 2 = 0{,}69 \ldots$ Denkt man also die Reihe in Gruppen von je $m$ Gliedern zerlegt, so ist die Summe der zweiten Gruppe $< \log 2$, die Summe der folgenden beiden Gruppen wieder $< \log 2$,

ebenso die Summe der auf sie folgenden 4 Gruppen, dann der nächsten 8 Gruppen u. s. w. Trotzdem wächst die Summe ins Grenzenlose.

Die Divergenz der harmonischen Reihe liefert ferner einen Beleg dafür, dass es zur Convergenz auch von Reihen mit *wechselnden* Vorzeichen nicht ausreicht, wenn das $n$te Glied die Null zur Grenze hat. Denn zerlegt man jedes Glied der Reihe nach dem Muster

$$\frac{1}{k+z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k+z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+z+1}+1}\right)$$

so erhält man die divergente Reihe [1])

$$2\sum_0^\infty \frac{1}{k+z} = \frac{1}{\sqrt{z+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{z+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{z+2}-1} - \frac{1}{\sqrt{z+2}+1} + - \dots$$

4. **Endlicher Wert des Ausschnitts.** Wird mit $n$ auch $m$ unendlich, aber so, dass $\lim \frac{n}{m}$ endlich bleibt, so fallen in (2) beide Grenzen zusammen, und wir erhalten unmittelbar den sonst nur durch einen Uebergang zum bestimmten Integral hergeleiteten Satz

$$(3) \quad \lim(S_n - S_m) = \lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} = \log\left(\lim \frac{n}{m}\right) \quad \begin{matrix} n = \infty \\ m = \infty \end{matrix}$$

Sind z. B. $n$ und $m$ ganze und ganzzahlige Functionen gleich hohen Grades einer unendlich werdenden Veränderlichen $w$, so ist $\lim \frac{n}{m}$ der Quotient der Coefficienten der höchsten Potenz. So hat man ohne Weiteres

$$\lim_{w=\infty} \sum_{qw+q_0}^{pw+p_0} \frac{1}{k+z} = \log \frac{p}{q}$$

und wenn $f_1(w)$ und $f_2(w)$ ganzzahlige Werte sonst beliebiger Functionen sind

$$\lim_{w=\infty} \sum_{f_1(w)}^{f_2(w)} \frac{1}{ak+z} = \frac{1}{a} \lim \Sigma \frac{1}{k+\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \log\left(\lim \frac{f_2(w)}{f_1(w)}\right)$$

Die erstere Formel allein reicht aus, um die Wertveränderung zu ermitteln, die die Reihe

---

1) Dieselbe findet sich, für $z = 1$, bei **Catalan**, Traité élém. des séries. Cap. II. § XV.

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \dots$$

erfährt, wenn immer $p$ positive Glieder mit $q$ negativen abwechseln (§ 11).

Als eine einfache Anwendung diene die Summirung der Reihe

$$\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+n}\right) - \frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{z+n+1} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{z+2n}\right) - \frac{1}{z+2} + - \dots \text{ in inf.}$$

Dieselbe ist die Grenze des Ausdrucks

$$\sum_1^{mn} \frac{1}{z+k} - \sum_1^{m} \frac{1}{z+k} = \sum_{m+1}^{nm} \frac{1}{z+k}$$

für $m = \infty$, somit hat man

$$\sum_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+(k-1)n+1} + \frac{1}{z+(k-1)n+2} + \dots + \frac{1}{z+kn} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{z+k} \right\} = \log n$$

wobei $z$ ganz beliebig bleibt [1]).

---

1) Für $n = 2$ erhält man nach dem Obigen die Formel

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z+2k-1} + \frac{1}{z+2k} - \frac{1}{z+k}\right) = \log 2$$

die von Herrn Catalan gegeben ist (Nouv. Corresp. math. I. 1879). — Lässt man $n$ unbestimmt, setzt aber $z = 0$ und schreibt statt $\frac{1}{nk} - \frac{1}{k}$ noch $-\frac{n-1}{nk}$, so kommt, zunächst für endliches $m$,

$$\sum_1^{m} \left\{ \frac{1}{(k-1)n+1} + \frac{1}{(k-1)n+2} + \dots + \frac{1}{kn-1} - \frac{n-1}{kn} \right\}$$
$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{nm}$$

woraus sich z. B. für $n = 2$ die ebenfalls Catalan'sche Formel

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m}$$

ergiebt, von der gleich Gebrauch gemacht werden wird. Wächst aber nun $n$ ins Unendliche, so erhält man links eine schon von Euler gegebene Reihe für $\log n$ (Integralrechnung II. § 147. Auch bei Lacroix, Traité du calcul diff. et int. III. § 1003).

Bei der Wichtigkeit der Formel (3) möge sie noch auf folgende Art *direct* abgeleitet werden.

Zunächst ist ersichtlich, dass der gesuchte Grenzwert von

$$\sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k+z} = \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} \frac{1}{1+\frac{z}{k}}$$

wenn er existirt, zwischen

$$\frac{1}{1+\frac{z}{m+1}} \Sigma \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+\frac{z}{n}} \Sigma \frac{1}{k}$$

liegen muss, also für $m = \infty$, $n = \infty$, mit

$$\lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} = \lim \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

übereinstimmt Diese Summe liegt nun zwischen

$$\frac{n-m}{m+1} \quad \text{und} \quad \frac{n-m}{n}$$

oder zwischen

$$\frac{\frac{n}{m}-1}{1+\frac{1}{m}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{n}{m}-1}{\frac{n}{m}}$$

bleibt also endlich mit $\lim \frac{n}{m} = t$ und wird eine Function von $t$ sein. Setzen wir daher

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{tm}\right) = f(t)$$

so haben wir

$$f(2t) = \lim_{m=\infty} \left(\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m}\right)$$
$$+ \lim_{2m=\infty} \left(\frac{1}{2m+1} + \ldots + \frac{1}{t.2m}\right) = f(2) + f(t)$$

Nach einer schon erwähnten, von Herrn Catalan herrührenden Formel [1]) ist aber

---

1) Sie lässt sich leicht so herleiten:

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} = \left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2m}\right) - \left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$$

$$f(2) = \lim\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \ldots - \frac{1}{2m}\right) = \log 2$$

also

$$f(2t) = \log 2 + f(t)$$

Setzen wir $f(t) = \log \varphi(t)$ und gehen wir zu den Zahlen über, so kommt $\varphi(2t) = 2\varphi(t)$; die Functionswerte von $\varphi(t)$ sind also proportional den Argumenten, d. h. $\varphi(t)$ ist rein lineär, etwa $= at$. Die Constante $a$ ergiebt sich aus $f(2) = \log 2a = \log 2$, und wir erhalten

$$f(t) = \log t = \log\left(\lim \frac{n}{m}\right)$$

5. Die Function $C_k(z)$ und ihr Grenzwert $C(z)$. Für grosse Werte von $n$ und $m$ wird nach (3) annähernd die Gleichung

$$S_n - S_m = \log n - \log m$$

gelten, oder

$$S_n - \log n = S_m - \log m$$

sein, u. z. werden diese Differenzen einander um so näher kommen, je mehr $n$ und $m$ wachsen. Wenn nun zwar hieraus noch nicht zu schliessen sein dürfte [1]), dass die Differenz $S_n - \log n$ sich bei unbegrenzt wachsendem $n$ einer von $n$ unabhängigen Grenze nähert, so lässt sich doch die Existenz dieser Grenze folgendermassen zeigen.

Wählen wir $m$ so gross, dass nach (2)

$$\log\frac{n+z+1}{m+z+1} < S_n(z) - S_m(z) < \log\frac{n+z}{m+z}$$

gilt, und subtrahiren wir überall

$$\log(n+z) - \log(m+z)$$

so folgt

---

$$= \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) - 2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$
$$+ - \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}$$

Für $m = \infty$ hat man hieraus unmittelbar

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m}\right) = \log 2$$

was auf anderem Wege Herr Unferdinger bewiesen hat. (Sitzgsbr. der Wiener Akad. 1867. Bd. 55. II. S. 93.)

1) Wie es bei Natani, Math. Wörterb., Art. „Reihe", Bd. VI. S. 284 f. geschieht.

$$\log\frac{n+z+1}{n+z} - \log\frac{m+z+1}{m+z} <$$
$$[S_n(z) - \log(n+z)] - [S_m(z) - \log(m+z)] < 0$$

oder, wenn wir die Bezeichnung

$$S_k(z) - \log(k+z) = C_k(z)$$

einführen,

$$\log\left(1+\frac{1}{n+z}\right) + C_m(z) - \log\left(1+\frac{1}{m+z}\right) < C_n(z) < C_m(z)$$

Bei festem $m$ nähert sich für wachsendes $n$ das erste Glied linker Hand der Null, $C_n(z)$ bleibt also zwischen endlichen Grenzen, die sich um

$$\log\left(1+\frac{1}{m+z}\right)$$

unterscheiden. Da nun dies endliche Intervall durch Vergrösserung von $m$ beliebig verkleinert werden kann, so nähert sich $C_n(z)$ mit wachsendem $n$, beständig abnehmend, einem nur noch von $z$ abhängigen Grenzwert $C(z)$.

Derselben Grenze strebt offenbar auch

$$S_n - \log n = S_n - \log(n+z) + \log\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

zu.

6. Haupteigenschaften von $C(z)$. Aus der Definition

$$C_n(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+n} - \log(z+n)$$

folgt unmittelbar

$$(4) \qquad C(z) - C(y) = \frac{1}{z} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{y+1} + - \ldots$$

also

$$(5) \qquad C(z) - C(z+1) = \frac{1}{z}$$

$$(6) \qquad C(z+m) = C(z) - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+m-1}\right)$$

$$(7) \qquad C(z-m) = C(z) + \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \ldots + \frac{1}{z-m}\right)$$

Für $z = 1$ liefert (6)

(8) $$C(m+1) = C(1) - \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$$

so dass $C(z)$ für positive ganzzahlige Werte von $z$ durch $C(1)$ und die specielle harmonische Reihe bestimmt werden kann. Dabei ist

$$C(1) = \lim_{n=\infty}\left[1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right]$$

die Euler'sche Constante, auf deren Berechnung weiterhin noch eingegangen wird.

Für $z = 0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist nach (4) $C(z) = \infty$.

Für $y = 1-z$ liefert (4) die bekannte Reihe

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - + \ldots = \pi \operatorname{cotg} \pi z$$

so dass

(9) $$C(z) - C(1-z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$$

Da $\operatorname{cotg} \pi z$ für $z = \dfrac{2m+1}{2}$ verschwindet, so hat man hiernach für ganzzahlige, positive oder negative $m$

(10) $$C(m+\tfrac{1}{2}) = C(-m+\tfrac{1}{2})$$

und da für $z = \dfrac{4m+1}{4}$

$$\operatorname{cotg} \pi z = 1 \quad \text{ist,}$$

(11) $$C(m+\tfrac{1}{4}) - C(-m+\tfrac{3}{4}) = \pi$$

Aus

$$C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\left[\frac{1}{mz+k} + \frac{1}{mz+k+m} + \frac{1}{mz+k+2m} + \ldots + \frac{1}{mz+k+nm}\right] - \log\frac{nm+mz+k}{m}$$

folgt, wenn wir über $k = 1, 2 \ldots m$ summiren

$$\sum_1^m C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m\left[\sum_1^m \frac{1}{mz+k} + \sum_{m+1}^{2m} \frac{1}{mz+k} + \sum_{2m+1}^{3m} \frac{1}{mz+k} + \ldots + \sum_{nm+1}^{(n+1)m} \frac{1}{mz+k}\right] - \sum_1^m \log\frac{mn+mz+k}{m}$$

$$= m\sum_1^{nm+m} \frac{1}{mz+k} - \sum_1^m \log(nm+mz+k) + m\log m$$

Nun ist

$$\sum_{1}^{nm+m} \frac{1}{mz+k} = S_{nm+m-1}(mz+1) = C_{nm+m-1}(mz+1) + \log(nm+mz+m)$$

wir können also schreiben

$$\sum_{1}^{m} C_n\left(z+\frac{k}{m}\right) = m C_{nm+m-1}(mz+1) + m\log m + \sum_{1}^{m} \log\frac{nm+mz+m}{nm+mz+k}$$

und da für $n = \infty$ jedes der $m$ Glieder der letzteren Summe verschwindet, ergiebt sich

(12) $$\sum_{1}^{m} C\left(z+\frac{k}{m}\right) = mC(mz+1) + m\log m$$

Hieraus für $z = 0$

(13) $$\sum_{1}^{m-1} C\left(\frac{k}{m}\right) = (m-1)C(1) + m\log m$$

*Beispiele.* Für $m = 2$ ist nach (13)

$$C(\tfrac{1}{2}) = C(1) + 2\log 2$$

dann nach (5)

$$C(\tfrac{3}{2}) = C(\tfrac{1}{2}) - 2 = C(1) + 2\log 2 - 2$$

Für $m = 3$ kommt

$$C(\tfrac{1}{3}) + C(\tfrac{2}{3}) = 2C(1) + 3\log 3$$

dazu aus (9)

$$C(\tfrac{1}{3}) - C(\tfrac{2}{3}) = \pi\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$$

so dass

$$C(\tfrac{1}{3}) = C(1) + \tfrac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}, \quad C(\tfrac{2}{3}) = C(1) + \tfrac{3}{2}\log 3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

$m = 4$ liefert

$$C(\tfrac{1}{4}) + C(\tfrac{1}{2}) + C(\tfrac{3}{4}) = 3C(1) + 4\log 4$$

also, da $C(\frac{1}{2})$ bekannt ist,

$$C(\tfrac{1}{4}) + C(\tfrac{3}{4}) = 2C(1) + 6\log 2.$$

Mit Hilfe von

$$C(\tfrac{1}{4}) - C(\tfrac{3}{4}) = \pi\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \pi$$

ergiebt sich

$$C(\tfrac{1}{4}) = C(1) + 3\log 2 + \frac{\pi}{2}, \quad C(\tfrac{3}{4}) = C(1) + 3\log 2 - \frac{\pi}{2}$$

Für $m = 6$ findet sich

$$C(\tfrac{1}{6}) = C(1) + 2\log 2 + \tfrac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

$$C(\tfrac{5}{6}) = C(1) + 2\log 2 + \tfrac{3}{2}\log 3 - \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$$

Wie man sieht, gelingt es schon mit Hilfe der entwickelten Formeln, die Werte $C\left(\frac{1}{m}\right)$, $C\left(\frac{2}{m}\right)$, ... $C\left(\frac{m-1}{m}\right)$, für $m = 2, 3, 4, 6$ durch $C(1)$, Logarithmen und Teile der Peripherie darzustellen. Für $m = 5$ aber erhält man nur

$$C(\tfrac{1}{5}) + C(\tfrac{2}{5}) = 2C(1) + \tfrac{5}{2}\log 5 + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{5}\right)$$

und

$$C(\tfrac{3}{5}) + C(\tfrac{4}{5}) = 2C(1) + \tfrac{5}{2}\log 5 - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{5}\right)$$

ohne dass zunächst eine weitere Trennung möglich ist. Ebenso kommt

$$C(\tfrac{1}{8}) + C(\tfrac{3}{8}) = 2C(1) + 8\log 2 + \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$C(\tfrac{5}{8}) + C(\tfrac{7}{8}) = 2C(1) + 8\log 2 - \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{cotg}\frac{3\pi}{8}\right)$$

Um nun $C(z)$ für ganz beliebige rationale $z$ im Intervall $0 < z < 1$ darzustellen, hat Gauss[1]) independente Formeln, u. z ohne Benutzung höherer Rechnung, abgeleitet, die sich nach unserer Bezeichnung schreiben lassen:

(14)

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = C(1) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m} + \log m - 2\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\cos\frac{2k\pi n}{m}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{m}\right)$$

für ungerade $m$

$$C\left(\frac{n}{m}\right) = C(1) + \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m} + \log m - 2\sum_{1}^{\frac{m-2}{2}}\cos\frac{2k\pi n}{m}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{m}\right) + (-1)^{n+1}\log 2 \quad \text{für gerade } m$$

Da nun mit Hilfe von (6) und (7) die Werte von $C(z)$ für alle rationalen $z > 1$ auf $C(z)$ mit echt gebrochenem Argument zurückzuführen sind, so können wir mit Gauss den Satz aussprechen,

1) Disquis. gener. § 33. Formel (74) und (75).

*dass sich $C(z)$, für alle rationalen, positiven oder negativen Werte von $z$, durch die Euler'sche und Ludolf'sche Constante, sowie durch Logarithmen bestimmen lässt.*

Am Schluss der Gauss'schen Disquis. gener. findet sich eine von Nicolai berechnete Tafel der numerischen Werte von $-C(z+1)$ für $z=0,\ \frac{1}{100},\ \frac{2}{100},\ \dots\ \frac{99}{100},\ 1$. Zieht man diese Werte von $\frac{1}{z}$ ab, so erhält man nach (5) die Tafel der Werte von $C(z)$ für dasselbe Intervall.

Die zweite der Formeln (14) lässt sich noch zusammenziehen. Sei $m=2\mu$, und fassen wir in

$$\sum_{1}^{\mu-1} \cos\frac{k\tau n}{\mu}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2\mu}\right)$$

das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. Glied zusammen, so kommt allgemein

$$\cos\frac{kn\pi}{\mu}\log 2\sin\frac{k\pi}{2\mu}+\cos\frac{(\mu-k)\,n\pi}{\mu}\log 2\sin\frac{(\mu-k)\pi}{2\mu}$$

$$=\cos\frac{kn\pi}{\mu}\log 2\sin\frac{k\pi}{2\mu}+\cos\left(n\pi-\frac{kn\pi}{\mu}\right)\log 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2\mu}\right)$$

und wenn wir voraussetzen, dass $\frac{n}{m}$ in kleinsten Zahlen gegeben sei, so dass $n$ ungerade und $\cos n\pi=-1$ ist, wird dies

$$=\cos\frac{kn\pi}{\mu}\log\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2\mu}$$

Ist die Gliederanzahl $(\mu-1)$ gerade, so haben wir $\frac{\mu-1}{2}$ umzuformende Gliederpaare, ist aber $\mu$ gerade, so ist ein Mittelglied für $k=\frac{\mu}{2}$ vorhanden, dessen Wert

$$\cos\frac{n\pi}{2}\log 2\sin\frac{\pi}{4}=0$$

ist. Demnach wird

$$\text{(14a)}\qquad C\left(\frac{n}{m}\right)=C(1)+\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{m}+\log(2m)-2\Sigma\cos\frac{kn\pi}{m/2}\log\operatorname{tg}\frac{k\pi}{m}$$

$$\left(n \text{ ungerade, } m \text{ gerade; } k=1,\ 2,\ 3\ \dots\ \frac{m-4}{4} \text{ oder } \frac{m-2}{4}\right)$$

Nachstehende Tafel giebt eine Uebersicht einiger Fälle, in denen

sich $C(z)$ verhältnissmässig einfach ausdrückt; dabei gilt das obere Wurzelzeichen stets für den in der ersten Spalte voranstehenden Wert von $z$.

| $z$ | $C(z)$ |
|---|---|
| $1$ | $c$ |
| $\frac{1}{2}$ | $c+2\log 2$ |
| $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ | $c+\frac{3}{2}\log 3 \pm \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$ |
| $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ | $c+3\log 2 \pm \frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ | $c+\frac{5}{4}\log 5+\frac{\sqrt{5}}{4}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{5}$ |
| $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ | $c+\frac{5}{4}\log 5-\frac{\sqrt{5}}{4}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{5}$ |
| $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ | $c+2\log 2+\frac{3}{2}\log 3 \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$ | $c+4\log 2-\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1) \pm \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$ |
| $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ | $c+4\log 2+\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1) \pm \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$ |
| $\frac{1}{10}$, $\frac{9}{10}$ | $c+2\log 2+\frac{5}{4}\log 5+\frac{1}{4}\sqrt{5}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{10}$ |
| $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$ | $c+2\log 2+\frac{5}{4}\log 5-\frac{1}{4}\sqrt{5}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2} \pm \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{10}$ |
| $\frac{1}{12}$, $\frac{11}{12}$ | $c+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3-\sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) \pm \frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})$ |
| $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ | $c+3\log 2+\frac{3}{2}\log 3+\sqrt{3}\log(2-\sqrt{3}) \pm \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})$ |

7. Reihen für $C(z)$. Schreiben wir der Kürze wegen

$$\frac{1}{k+z} = h_k$$

also

$$C_k(z) = S_k(z) + \log h_k$$

so ist, immer $z$ als Argument gedacht,

$$C_{k-1} - C_k = S_{k-1} + \log h_{k-1} - S_k - \log h_k = -h_k + \log\frac{h_{k-1}}{h_k}$$

Je nachdem wir nun

$$\frac{h_{k-1}}{h_k} = \frac{k+z}{k+z-1} = 1 + \frac{1}{k+z-1}$$

oder

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{k+z}}$$

schreiben, erhalten wir einen der Ausdrücke

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + \log[1+h_{k-1}]$$
$$C_{k-1} - C_k = -h_k - \log[1-h_k]$$

Jeder derselben führt zu einer Reihen-Entwickelung für $C$.

Die erste Form liefert entwickelt

$$C_{k-1} - C_k = -h_k + h_{k-1} - \tfrac{1}{2} h_{k-1}^2 + \tfrac{1}{3} h_{k-1}^3 - + \ldots$$

und wenn wir über $k = m+1,\ m+2,\ \ldots\ n$ summiren,

$$C_m - C_n = h_m - h_n - \tfrac{1}{2} \sum_{m+1}^{n} h_{k-1}^2 + \tfrac{1}{3} \sum_{m+1}^{n} h_{k-1}^3 - + \ldots$$

Benutzen wir, dass allgemein

$$\sum_{m+1}^{n} u_{k-1} = \sum_{m}^{n-1} u_k = \sum_{m+1}^{n} u_k + u_m - u_n$$

ist, so sondern sich aus jeder der rechts stehenden Summen Ausdrücke von der Form

$$\frac{(-1)^{p+1}}{p}(h_m^p - h_n^p)$$

aus, die mit der Differenz $(h_m - h_n)$ zu $\log(1+h_m) - \log(1+h_n)$ verschmelzen. Somit wird

$$(15)\quad C_m(z) - C_n(z) = \log\frac{1+h_m}{1+h_n} - \tfrac{1}{2}\sum_{m+1}^{n} h_k^2 + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 - + \ldots$$

Der zweite Ausdruck

$$C_{k-1} - C_k = -h_k - \log(1-h_k) = \tfrac{1}{2}h_k^2 + \tfrac{1}{3}h_k^3 + \ldots$$

ergiebt, wenn wieder über $k = m+1\ \ldots\ n$ summirt wird,

$$(16)\qquad C_m(z) - C_n(z) = \tfrac{1}{2}\sum_{m+1}^{n} h_k^2 + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 + \ldots$$

Beide Reihen[1]) lassen sich zu einer dritten, rascher convergirenden, vereinigen; wir erhalten durch Addition sofort

$$(17)\quad C_m(z) - C_n(z) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+h_m}{1+h_n} + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n} h_k^3 + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{n} h_k^5 + \dots$$

und hieraus für $n = \infty$, da $h_\infty = 0$

$$(18)\quad C_m(z) - C(z) = \tfrac{1}{2}\log(1+h_m) + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty} h_k^3 + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{\infty} h_k^5 + \dots$$

wodurch, unter der Bedingung $|m+z+1| \geqq 1$ die Berechnung von $C(z)$ auf die von $C_m(z) = S_m(z) + \log h_m$ zurückgeführt ist. Ist der reelle Teil von $z$ einer der Werte $-\infty \dots -2, 0 \dots +\infty$, so darf (nach § 2) $m = 0, 1 \dots \infty$ gesetzt werden. So ergiebt sich z. B. für $m = 0$, wo

$$C_0(z) = \frac{1}{z} + \log\frac{1}{z} \quad \text{ist,}$$

$$(19)\quad C(z) = \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}\log z(z+1) - \tfrac{1}{3}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^3} - \tfrac{1}{5}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^5} - \dots$$

Man kann unmittelbar zu der Entwickelung (17) gelangen, wenn man von dem Ausdruck

$$C_{k-1} - C_{k+1} = -h_k - h_{k+1} + \log\frac{1+h_k}{1-h_k}$$

ausgeht, denselben auf die Form bringt

$$C_{k-1} - C_{k+1} = h_k - h_{k+1} + 2[\tfrac{1}{3}h_k^3 + \tfrac{1}{5}h_k^5 + \dots]$$

über $k = m+1 \dots n$ summirt und beachtet, dass

$$C_{m+1} = C_m + h_{m+1} - \log(1+h_m)$$

ist.

Die Convergenz der Reihen, die in den Formeln (15) bis (19), zum Teil stückweise, auftreten, kann zwar als bekannt vorausgesetzt werden, mag hier aber noch in einer Weise gezeigt werden, die zugleich brauchbare Grenzeinschliessungen für die Berechnung derselben liefert.

Bekanntlich[2]) gilt für positive $a$ und $p$ die Einschliessung

$$p(a+1)^{p-1} \gtrless (a+1)^p - a^p \gtrless pa^{p-1}$$

---

1) Eine mit (15) im wesentlichen übereinstimmende Reihe findet sich bei Natani „Reihe“, a. a. O.

2) Vgl. z. B. Schlömilch, Uebungsbuch, I. S. 3. f.

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem $p \gtrless 1$ ist. Durch Division mit $pa^p(a+1)^p$ kommt

$$\frac{1}{a^p(a+1)} \gtrless \frac{1}{p}\left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p}\right] \gtrless \frac{1}{a(a+1)^p}$$

Zur Verstärkung der oberen Ungleichung ist links $a$ für $a+1$, rechts $a+1$ für $a$ zu setzen; die untere Ungleichung wird aber durch die umgekehrte Substitution stärker, so dass beide die gemeinsame Form annehmen

$$\frac{1}{a^{p+1}} > \frac{1}{p}\left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p}\right] > \frac{1}{(a+1)^p}$$

Schreiben wir noch in dem zweiten Teil dieser Einschliessung $a-1$ für $a$, so erhalten wir für $\frac{1}{a^{p+1}}$ die Begrenzung

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{a^p} - \frac{1}{(a+1)^p}\right] < \frac{1}{a^{p+1}} < \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(a-1)^p} - \frac{1}{a^p}\right]$$

Jetzt werde $a = z+k$ gesetzt und über die Werte $k = m+1 \ldots n$ summirt; dann ergiebt sich

$$20)\quad \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(z+m+1)^p} - \frac{1}{(z+n+1)^p}\right] < \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{(z+k)^{p+1}} < \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(z+m)^p} - \frac{1}{(z+n)^p}\right]$$

und für $n = \infty$

$$(21)\qquad \frac{1}{p} h_{m+1}{}^p < \sum_{m+1}^{\infty} h_k{}^{p+1} < \frac{1}{p} h_m{}^p$$

Damit ist der bekannte Satz bewiesen, dass für jeden Wert $p > 0$ die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^{p+1}}$$

convergirt; die in den Formeln (15) bis (19) auftretenden Reihen — auch in (15) und (16) kann ja $n = \infty$ werden — sind besondere Fälle derselben. Der Fehler, den man begeht, wenn man statt der Summe eine der beiden einschliessenden Grenzen setzt, ist kleiner als die Differenz der letzteren und mithin, nach dem eben benutzten Hilfssatz, sicher kleiner als $h_m{}^{p+1}$.

Was die Convergenz der Doppel-Reihen für $C_m - C_n$, bzhw. für $C_m - C$ betrifft, so bedarf es des Beweises nur für die zweite derselben (16), da mit ihr sicher auch (15) und (17) convergiren. Dass aber die Reihe

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda}$$

convergirt, ist leicht ersichtlich. Denn es ist

$$\sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda+1} = \sum_{m+1}^{\infty} h_k \,.\, h_k^{\lambda} < h_{m+1} \,.\, \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{\lambda}$$

Der massgebende Quotient der Reihe ist also kleiner als $\frac{\lambda}{\lambda+1} h_{m+1}$, bleibt mithin auch für $\lambda = \infty$ ein echter Bruch.

Die Formeln (20) und (2) lassen sich auch erhalten als besondere Fälle des Satzes

$$\int_{m+1}^{n+1} f(x)dx < f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n) < \int_{m}^{n} f(x)\,dx$$

der unter der Voraussetzung gilt, dass $f(x)$ positiv ist und im Intervall $x = m \ldots n+1$ nie zunimmt, und der sich leicht aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrals ergiebt. In der Tat braucht man nur $f(x)$ die Werte $h_x^{p+1}$ und $h_x$ zu erteilen, um zu jenen Formeln zu gelangen.

8. Grenzeinschliessung von $C(z)$. Wenden wir die Formel (21) auf (18) an, also auf die Gleichung

$$C_m - C = \tfrac{1}{2}\log(1+h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{m+1}^{\infty} h_k^{2p+1}$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\log(1+h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_{m+1}^{2p}}{2p(2p+1)} < C_m - C$$

$$< \tfrac{1}{2}\log(1+h_m) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_m^{2p}}{2p(2p+1)}$$

Beide Grenzen lassen sich leicht nach Potenzen von $h_m$ entwickeln; mit Rücksicht auf

$$h_{m+1} = \frac{h_m}{1+h_m} = h_m - h_m^2 + h_m^3 - + \ldots$$

findet man

$$\tfrac{1}{2}h_m - \frac{1}{12}h_m^2 - \tfrac{1}{6}h_m^3 + \frac{17}{40}h_m^4 - \ldots < C_m - C < \tfrac{1}{2}h_m - \frac{1}{12}h_m^2$$

$$+ \tfrac{1}{6}h_m^3 - \frac{3}{40}h_m^4 + - \ldots$$

Die Differenz beider Grenzen beginnt mit

$$\tfrac{1}{3}h_m^3 - \tfrac{1}{2}h_m^4$$

wenn man also

$$(22)\quad C_m(z) - C(z) = S_m(z) - \log(m+z) - C(z) = \tfrac{1}{2}h_m - \frac{1}{12}h_m^2$$

setzt, begeht man einen Fehler, der sicher kleiner als $\frac{1}{6}h_m^3$ ist, der also durch Vergrösserung von $m$ beliebig verkleinert werden kann.

Tatsächlich ist übrigens die Annäherung der Formel (22) erheblich grösser, als es aus den obigen Rechnungen zu erkennen ist. Denn die Reihe [1])

$$(22a)\quad \frac{d\log\Gamma(z+1)}{dz} = \Psi(z) = -C(z+1) = \log z + \frac{1}{2z} - \frac{B_2}{2z^2} + \frac{B_4}{4z^4} - \frac{B_6}{6z^6} + - \ldots$$

wo die $B$ die Bernouilli'schen Zahlen bedeuten, liefert, wenn nur die drei ersten Glieder berücksichtigt werden,

$$C(z+1) = -\log z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{12z^2}$$

also nach (5)

$$(23)\quad C(z) = -\log z + \frac{1}{2z} + \frac{1}{12z^2}$$

und diesen Wert ergiebt Gleichung (22) schon für $m = 0$. Nun ist bei jener Reihe, so lange die Glieder abnehmen, der begangene Fehler stets kleiner als das erste nicht mehr berücksichtigte Glied, also bei (23) kleiner als

$$\frac{B_4}{4z^4} = \frac{1}{120z^4}$$

Schon für $z = 10$ genügt daher Formel (23) zur Berechnung von $C(z)$ auf 6 Decimalstellen genau, und man würde, von solchem Werte ausgehend, $C(z)$ auch für kleinere $z$ mit Hilfe von (6) hinreichend genau berechnen können.

Ist sonach $C(z)$ für jedes $z$ als bekannt anzusehen, so bietet Gleichung (22) umgekehrt ein Mittel, um $S_m(z)$, die Summe der endlichen harmonischen Reihe, leicht zu berechnen.

1) Euler, Diff.-Rechn. II. § 146. — Natani, „Reihe", S. 320. Ebenda, S. 314 ff., findet man die Fehlerbestimmung nach Serret.

Zur Ableitung dieser Näherungsformeln war eine Summirung der Reihen von der Gestalt

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{h^{2p}}{2p(2p+1)}$$

in geschlossener Form entbehrlich. Dieselbe hat indessen keine Schwierigkeit. Denn wegen

$$\frac{1}{2p(2p+1)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+1}$$

zerfällt jede Summe in die Differenz

$$\tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{(h^2)^p}{p} - \frac{1}{h}\sum_{1}^{\infty} \frac{h^{2p+1}}{2p+1} = \tfrac{1}{2}\log(1-h^2) - \frac{1}{h}\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} - h\right)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\log(1-h^2) - \frac{1}{2h}\log\frac{1+h}{1-h}$$

Hiernach findet man

$$1 + \tfrac{3}{2}\log(1+h_m) - \left(1 + \frac{1}{2h_m}\right)\log(1+2h_m) < C_m - C$$

$$< 1 - \tfrac{1}{2}\log(1-h_m) - \frac{1}{2h_m}\log\frac{1+h_m}{1-h_m}$$

9. Die specielle harmonische Reihe. Als solche werde die Reihe der reciproken natürlichen Zahlen bezeichnet, die aus der allgemeinen Reihe für $z = 1$ hervorgeht. Formel (2) lässt sich dann schreiben

$$\log\frac{n+1}{m+1} < \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} < \log\frac{n}{m} \quad (m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

Hiernach liegt z. B. die Summe des zweiten Tausends der Glieder der Reihe zwischen

$$\log\frac{2001}{1001} = 0{,}6926\ \ldots \quad \text{und} \quad \log 2 = 0{,}6931\ \ldots$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = s_n \quad \text{und} \quad s_k - \log k = c_k$$

ein, so ist nach (3)

$$\lim(s_n - s_m) = \lim \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{k} = \log\left[\lim\frac{n}{m}\right] \quad \begin{matrix} n = \infty \\ m = \infty \end{matrix}$$

Die Function $c_k$ ist hier, da $z$ den festen Wert 1 erhalten hat, nur

noch von ihrem Index abhängig; sie fällt von $c_1 = 1$ mit wachsendem $k$ beständig, bleibt aber positiv, da $s_n > \log(n+1) > \log n$ ist, nähert sich also einem constanten echten Bruch $c$, für den die Einschliessung gilt (§ 5):

$$c_m - \log\left(1+\frac{1}{m}\right) < c < c_m$$

Zur Berechnung von $c$ aus einem bekannten $c_m$ dienen dann, entsprechend (15) und (16), die Reihen

$$c_m - c = \log\left(1+\frac{1}{m}\right) - \tfrac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - + \ldots$$

$$c_m - c = \qquad\qquad \tfrac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + + \ldots$$

oder besser die aus beiden hervorgehende Reihe

$$(24) \qquad c_m - c = \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{\infty} + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} + \ldots$$

Für $m = 1$ erhält man hieraus die Formel

$$(25) \qquad c = 1 - \tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \tfrac{1}{5}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \ldots$$

die sich in der Theorie der analytischen Facultäten als Specialfall der Formel

$$\log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\pi a}{\sin\pi a} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} + (1-c)a - \frac{a^3}{3}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \ldots$$

$$\left(a^2 \leqq 1\right)$$

für $a = 1$ ergiebt. [1])

Zu Formel (24) gelangt man, ohne den Umweg über die weniger convergenten Entwickelungen zu nehmen, wenn man in

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{5k^5} + \ldots$$

über $k = m+1 \ldots n$ summirt. Man erhält so

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{m}\cdot\frac{n+1}{m+1} = s_n - s_m + \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \ldots$$

und mit Rücksicht auf

1) Natani, Die höhere Analysis, S. 182.

$$s_n - \tfrac{1}{2}\log n(n+1) = s_n - \log n - \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

kommt

$$c_m - \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) - c_n + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \tfrac{1}{5}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \dots$$

was für $n = \infty$ in Formel (24) übergeht.

Eine noch rascher convergirende Reihe entsteht, wenn man in

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{2k} + \tfrac{1}{3}\,\frac{1}{8k^3} + \tfrac{1}{5}\,\frac{1}{32k^5} + \dots$$

oder

$$\log\frac{2k+1}{2k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3.4k^3} + \frac{1}{5.4^2k^5} + \dots$$

über $k = m+1 \dots n$ summirt.

Man erhält so:

$$\log\frac{2n+1}{2m+1} = s_n - s_m + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \dots$$

und wenn man hiervon die Identität

$$\log\frac{n}{m} = \log n - \log m$$

abzieht, kommt

$$c_m - c_n = \log\frac{2m+1}{m} - \log\frac{2n+1}{n} + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^5} + \dots$$

also für $n = \infty$

$$c_m - c = \log\left(1+\frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} + \dots$$

oder auch

$$(26)\quad c = s_m - \log\frac{2m+1}{2} - \frac{1}{3.4}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5.4^2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \dots$$

So ist z. B. für $m = 0$

$$(27)\quad c = \log 2 - \frac{1}{3.4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5.4^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \dots$$

und die für $m = 1$ entstehende Formel

$$(27a)\quad c = 1 - \log\tfrac{3}{2} - \frac{1}{3.4}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{5.4^2}\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{k^5} - \dots$$

würde sich aus dem oben angeführten Ausdruck für $\log \Gamma(1+a)$ durch die Annahme $a = \frac{1}{2}$ ergeben.

Schreiben wir (26) in der Form

$$s_m - \log m - c = \log\left(1+\frac{1}{2m}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)\,.\,4^p} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+1}}$$

und wenden wir die Einschliessung (21) für die Summen der reciprok n Potenzen an, so erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von $1/m$ entwickeln,

$$\frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} - \frac{1}{24m^3} + \frac{17}{240m^4} \ldots < s_m - \log m - c$$

$$< \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{80m^4} \ldots$$

Das arithmetische Mittel zwischen beiden Grenzen bis zum dritten Gliede

$$(28) \qquad s_m - \log m - c = \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2}$$

ist dann ein Näherungswert, der sich von dem wahren höchstens um $\frac{1}{24m^3}$ entfernt, während die blosse Specialisirung der Formel (22) zwar denselben Näherungswert ergiebt, aber für den begangenen Fehler den vierfachen Spielraum lässt. In Wirklichkeit ist auch dieser noch viel zu weit gegriffen, denn aus der Reihe[1])

$$(28a) \quad c = s_m - \log m - \frac{1}{2m} + \frac{B_2}{2}\frac{1}{m^2} - \frac{B_4}{4}\frac{1}{m_4}$$

$$+ - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}}{2n}\frac{1}{m^{2n}}$$

geht Formel (28) für $n = 1$ hervor, und der Fehler beträgt wieder weniger als

$$\frac{B_4}{4m^4} = \frac{1}{120m^4}$$

Nimmt man $m = 100$ an, so liefert (28) also $c$ bis auf 10 Decimalen richtig. Die Addition der ersten 100 Reciproken der natürlichen Zahlen, die zu diesem Zweck auf 12 Decimalen berechnet wurden, ergiebt

$$s_{100} = 5,1873\,775\,176$$

während

1) Euler, Diff. R. II. § 142.

$$\log 100 = 4,6051\ 701\ 860$$

ist. Somit ist

$$c = 0,5822\ 073\ 316 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}0001$$

$$c = 0,5772\ 126\ 649.$$

Für $m=50$ erhält man $c$ auf 8 Decimalen richtig, für $m=25$ auf 7. Bei $m=20$ beträgt die Abweichung eine Einheit der 7. Stelle, bei $m=10$ eine Einheit der 6. Stelle. — Euler hat $c$ aus der soeben angeführten Reihe, für $m=10$, auf 16 Stellen berechnet. Wie aus einer Note bei Gauss[1]) hervorgeht, hat Mascheroni (in den mir nicht zugänglich gewesenen *Adnotationes ad Euleri Calc. Int.*) die Rechnung weiter ausgedehnt und einen Wert gefunden, der von der 20. Stelle an von dem durch Gauss auf 23 Stellen bestimmten Werte abwich, so dass auf Gauss' Veranlassung Nicolai die Berechnung bis auf 40 Stellen erstreckte. Er fand[2])

$$c = 0,5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065\ 120\ 900\ 824\ 024\ 310\ 421\ \ldots$$

Jede der Grössen $s_m$, $\log m$, $c$, die die linke Seite in (28) bilden, kann übrigens aus dieser Formel berechnet werden, wenn die beiden anderen als bekannt vorauszusetzen sind.

So hat man zur Ermittelung der *Summe der ersten million Glieder* der speciellen harmonischen Reihe

$$\begin{aligned} c &= 0,5772\ 156\ 649\ 015\ 328\ 606\ 065 \\ \log m &= 13,8155\ 105\ 579\ 642\ 741\ 041\ 079 \\ \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} &= 0,0000\ 004\ 999\ 999\ 166\ 666\ 667 \\ \hline s_m &= 14,3927\ 267\ 228\ 657\ 236\ 313\ 811 \end{aligned}$$

Den Beitrag, den die zweite Million Glieder zur Summe liefert, findet man aus

$$s_n - s_m = \log\frac{n}{m} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12m^2}$$

bezeichnet $m$ eine Million, so hat man

$$s_{2m} - s_m = \log 2 - \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2$$

und mit Benutzung von

---

1) Disquis. gener., Art 31. — 2) Vgl. Oettinger, Ueber die Constante des Integrallogarithmus. Crelle Journ. LX. 375—6.

$$\log 2 = 0,\ 693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ 417\ 232$$

ergiebt sich

$$s_{2m} - s_m = 0,\ 693\ 146\ 930\ 560\ 007\ 809\ 417\ 232$$

Dies Resultat zeigt recht deutlich die schwache Convergenz der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots = \log 2$ Denn da, nach der schon in § 4 benutzten Catalan'schen Formel

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$$
$$= s_{2m} - s_m$$

Reihe ist, so würde die Addition der ersten zwei Millionen Glieder der den soeben berechneten Wert 0, 691469 ergeben, während die Summe durch das nächstfolgende Glied $\frac{1}{2m+1}$ auf 0, 693 1474 springt, so dass beide Grenzen noch nicht in den sechs ersten Stellen übereinstimmen.

Formel (28) kann auch dazu dienen, die Berechnung der Logarithmen grosser Zahlen auf die kleinerer zurückzuführen, wie dies schon Euler[1]) getan hat. Wir wollen hier noch eine Anwendung auf die Logarithmen der Facultäten machen und eine Formel ableiten, die mit der Stirling'schen sehr nahe übereinstimmt. Herr Mansion hat so, aus der in der Einleitung angeführten Einschliessung für $s_n$ den Ausdruck

$$\log(n!) = (n + \tfrac{1}{2})\log n - n + \frac{1+c}{2} + \frac{\Theta}{2} \quad (0 < \Theta < 1)$$

gewonnen. Nach der Stirling'schen Formel ist nun bekanntlich für wachsende $n$

$$\log(n!) = (n + \tfrac{1}{2})\log n - n + \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

und da

$$\frac{1+c}{2} = 0{,}788\ 6078$$

$$\tfrac{1}{2}\log(2\pi) = 0{,}918\ 9385$$

ist, so bleibt jene Annäherung hinter dem wahren Wert erheblich zurück, um so mehr, als auch die Stirling'sche Formel noch durch Hinzufügung von $\frac{1}{12n}$ sehr viel genauer wird[2]).

---

1) Diff. R. II. § 145.

2) Vgl. Euler, Diff. Rechn. Cap. III. 159 oder Gauss, Disquis. gener. § 29.

Wenn wir nun in

$$s_k = \log k + c + \frac{1}{2k} - \frac{1}{12k^2}$$

über $k = m+1 \ldots n$ summiren, erhalten wir

$$(s_1+s_2+\ldots+s_n)-(s_1+s_2+\ldots s_m) = \log(n!) - \log(m!)$$
$$+(n-m)c + \tfrac{1}{2}(s_n - s_m) - \frac{1}{12}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Wie man sich leicht überzeugt [1]), ist aber

$$s_1+s_2+\ldots+s_k = (k+1)s_k - k$$

also

$$\log(n!) = \log(m!) + (n+\tfrac{1}{2})s_n - (m+\tfrac{1}{2})s_m - (n-m)(1+c)$$
$$+\frac{1}{12}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Für das letze Glied liefert (20) die Grenzen

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

deren arithmetisches Mittel, wenn wir $\frac{1}{n+1}$ nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickeln und bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben,

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

wird. Setzen wir diesen Wert, sowie für $s_n$ den Näherungswert aus (28) in die letzte Gleichung ein, so kommt, nach gehöriger Zusammenziehung

(28b) $$\log(n!) = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \frac{1}{12n} + \Theta_m$$

wo

$$\Theta_m = \log(m!) - (m+\tfrac{1}{2})(s_m - 1 - c) + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right)$$

ist. Die Formel wird mit der verbesserten Stirling'schen um so genauer übereinstimmen, je grösser das feste $m$ zur Berechnung der Constante $\Theta_m$ angenommen wird. Schon für $m = 1$ unterscheidet sich aber $\Theta_1 = 0{,}92833$ von $\frac{1}{2}\log 2\pi$ um kaum 0,01. Legt man $m = 10$ zu Grunde, so nimmt die Formel die Gestalt an

---

1) Vgl. Mansion, a. a. O., sowie des Verfassers Notiz „Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\Sigma k u_k$". Arch. d. Math. T. IV. S. 107.

(28c) $\log(n!) = (n+\frac{1}{2})\log n - n + \frac{1}{12n} + 0{,}918\,9658 \quad (n > 10)$

Für $n = 100$ ist

$$(n+\tfrac{1}{2})\log n - n = 362{,}819\,6037$$

also nach unserer Formel

$$\log(100!) = 363{,}739\,4028$$

während die Addition der Logarithmen der ersten 100 ganzen Zahlen in einer siebenstelligen Tafel den Wert

$$\log(100!) = 363{,}739\,3755$$

ergiebt. Genau denselben liefert die verbesserte Stirling'sche Formel, die gewöhnliche dagegen einen um $\frac{1}{12n} = 0{,}000\,8333$ zu kleinen. Nach der Formel von Mansion wird

$$\log(100!) = 363{,}608\,2115$$

Nimmt man $m = 100$ an, so findet man mit Hilfe des genauen Werts von $\log(100!)$ und von $s_{100}$ (der letztere wurde oben auf 10 Decimalen angegeben)

$$\Theta_{100} = 0{,}918\,9385$$

also in den sieben ersen Decimalen mit $\frac{1}{2}\log 2\pi$ vollständig übereinstimmen.

10. Die alternirende Reihe. Versieht man die geradstelligen Glieder der Reihe $\Sigma \frac{1}{k+z}$ mit negativem Zeichen, so erhält man die Reihe

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} - + \ldots - \frac{1}{z+2n-1} + \frac{1}{z+2n}$$

die für $n = \infty$ in eine convergente unendliche Reihe übergeht, da die Glieder sich unbegrenzt der Null nähern, beständig fallen und abwechselnde Zeichen haben. Die Summe der Reihe lässt sich leicht durch die Function $C(z)$ ausdrücken. Fassen wir zu dem Ende in $\mathfrak{S}_{2n}(z)$ die positiven und die negativen Glieder für sich zusammen, so ist

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{2}} + \frac{1}{\frac{z}{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\frac{z}{2}+n}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z+1}{2}} + \frac{1}{\frac{z+1}{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\frac{z+1}{2}+n-1}\right)$$

also

$$2\mathfrak{S}_{2n}(z) = S_n\left(\frac{z}{2}\right) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

Hier würde für $n = \infty$ die rechte Seite in unbestimmter Form erscheinen, was durch Einführung von $C_n(z)$ vermieden wird. Wir erhalten so:

$$2\mathfrak{S}_{2n}(z) = \log\left(n+\frac{z}{2}\right) + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - \log\left(n-1+\frac{z+1}{2}\right)$$

$$- C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) = \log\frac{2n+z}{2n+z-1} + C_n\left(\frac{z}{2}\right) - C_{n-1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

und für $n = \infty$

$$\mathfrak{S}(z) = \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right)\right] \tag{29}$$

wie auch durch (4) leicht zu bestätigen.

Zu einem anderen Ausdruck gelangt man, wenn man schreibt [1]):

$$\mathfrak{S}_{2n}(z) =$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+2n} - 2\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \ldots + \frac{1}{z+2n-1}\right]$$

$$= S_{2n}(z) - S_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) = C_{2n}(z) - C_{n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log 2\,\frac{2n+z}{2n+z-1}$$

$$\mathfrak{S}(z) = C(z) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log 2 \tag{30}$$

Die Vergleichung beider Formeln ergiebt die Beziehung

$$C\left(\frac{z}{2}\right) + C\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2[C(z) + \log 2] \tag{31}$$

oder

$$C(z) + C(z+\tfrac{1}{2}) = 2C(2z) + 2\log 2$$

*Beispiele.* Für $z = 1$ ist

$$C(z) = C\left(\frac{z+1}{2}\right) = c$$

Formel (30) giebt dann das bekannte Resultat

$$\mathfrak{S}(1) = \log 2$$

während aus (29) oder (31) der schon in § 6 gefundene Ausdruck

---

1) Vgl. Natani, „Reihe", S. 286.

$$C(\tfrac{1}{2}) = 2\log 2 + c$$

folgt. Nach (29) und (11) ist

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}[C(\tfrac{1}{4}) - C(\tfrac{3}{4})] = \tfrac{1}{4}\pi$$

Nach (30):

$$1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{10} + - \ldots = \tfrac{1}{3}\sigma\mathfrak{S}(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{3}[C(\tfrac{1}{3}) - C(\tfrac{2}{3}) + \log 2]$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3} + \log 2\right)$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{11} + - \ldots = \tfrac{1}{3}\mathfrak{S}(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{6}[C(\tfrac{1}{3}) - C(\tfrac{5}{6})]$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \log 2\right)$$

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{17} + - \ldots = \tfrac{1}{5}\mathfrak{S}(\tfrac{2}{5}) = \tfrac{1}{10}[C(\tfrac{1}{5}) - C(\tfrac{7}{10})]$$
$$= \tfrac{1}{10}\left[\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{10}} - 2\log 2 + \sqrt{5}\log\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Setzen wir $z$ gleich der rationalen Zahl $\frac{n}{m}$, so ist nach (29)

$$2\mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = C\left(\frac{n}{2m}\right) - C\left(\frac{m+n}{2m}\right)$$

Unter der Bedingung $0 < n < m$ liefert dann die zweite der Formeln (14)

$$2\mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{2m} - \operatorname{cotg}\frac{(m+n)\pi}{2m}\right) - 2\sum_{1}^{m-1}\left(\cos\frac{k\pi n}{m}\right.$$
$$\left. - \cos\frac{k\pi(m+n)}{m}\right)\log 2\sin\frac{k\pi}{m} + (-1)^{n+1}[1-(-1)^m]\log 2$$

Da

$$\cos\frac{k\pi n}{m} - \cos\left(\frac{k\pi n}{m} + k\pi\right) = \cos\frac{k\pi n}{m}[1-(-1)^k]$$

ist, so fallen in der Summe die Glieder für gerades $k$ fort, und es ergiebt sich,

wenn $m$ gerade ist,

$$(32) \qquad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{m}} - 2\sum_{1}^{\frac{1}{2}m}\cos\frac{(2k-1)n\pi}{m}\log\left(2\sin\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)$$

und wenn $m$ ungerade ist,

$$(33)\quad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{m}} - 2\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} \cos\frac{(2k-1)n\pi}{m} \log\left(2\sin\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right)$$

$$+(-1)^{n-1}\log 2$$

$$(0 < n < m)$$

Ist $m$ gerade, so dass $n$ und $n+m$ als ungerade angesehen werden können, so lässt sich in

$$2\mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = C\left(\frac{n}{2m}\right) - C\left(\frac{m+n}{2m}\right)$$

für die beiden $C$-Functionen Formel (14a) in Anwendung bringen. Man erhält so

$$2\mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{n\pi}{m}} - 2\sum_{1}^{\frac{m-2}{2}} \log\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2m}\cos\frac{k\pi n}{m}\left[1-(-1)^k\right]$$

oder

$$(32a)\quad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{m}} - 2\Sigma\cos(2k-1)\frac{n}{m}\pi \,.\, \log\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{2m}$$

$$\left(\begin{matrix} n \text{ ungerade} \\ m \text{ gerade}\end{matrix}\,,\quad k = 1, 2 \ldots \frac{m-2}{4} \text{ oder } \frac{m}{4},\quad 0 < n < m\right)$$

eine Formel, die sich natürlich auch aus (32) in derselben Weise herleiten lässt, wie (14a) aus (14) gewonnen wurde.

Die Umformung, die hier die Gliederzahl der zu summirenden endlichen Reihe auf die Hälfte herabminderte, hat diesen Erfolg im Falle eines ungeraden $m$ nicht. Denn dann wird, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist, einer der Zähler $n$ und $n+m$ in den auftretenden $C$-Functionen gerade, so dass Formel (14a) nur auf eine der letzteren anwendbar ist. Immerhin hat die Rechnung den Erfolg, die unter dem Summenzeichen stehenden Bögen zu verkleinern, so das wenigstens das Resultat angegeben werden möge. Man erhält

$$(33\text{a})\quad \mathfrak{S}\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{n\pi}{m}} + (-1)^{n-1}\log 2 - 2\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{n(k+1)}\cos\frac{kn}{m}\pi \,.\, \log 2f\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$$

($m$ ungerade, $n$ beliebig, $0 < n < m$)

wo das Functionszeichen $f$ den Sinus oder Cosinus bedeutet, je nachdem $k$ ungerade oder gerade ist, so dass also auch

$$\log 2f\left(\frac{k\pi}{2m}\right) = \log 2 \left|\cos\left(\frac{k\pi}{2m} + \frac{k\pi}{2}\right)\right|$$

geschrieben werden könnte [1]).

*Beispiele.*

$$\mathfrak{S}(\tfrac{1}{4}) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} - 2\cos\frac{\pi}{4}\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$$

also

$$1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{13} + - \ldots = \tfrac{1}{4}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} + \log(\sqrt{2}+1)\right]$$

wie sich auch aus (29) mit Hilfe der kleinen Tafel in Abschnitt 6. ergiebt.

$$\mathfrak{S}(\tfrac{1}{8}) = \frac{\pi}{2\sin 22\tfrac{1}{2}^0} - 2(\cos 22\tfrac{1}{2}{}^0 . \log\operatorname{tg} 11\tfrac{1}{4}{}^0 + \cos 67\tfrac{1}{2}{}^0 \log\operatorname{tg} 33\tfrac{3}{4}{}^0)$$
$$= 8(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{17} - \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{33} - \tfrac{1}{41} + - \ldots)$$

---

1) Die Formeln (32), (33) und (32a) finden sich bereits in einer älteren Abhandlung, auf die ich erst aufmerksam wurde, nachdem der erste Druck der vorliegenden Arbeit fast vollendet war, wobei übrigens, wie manches andere, auch die Umformung (32a) der Raumersparnis wegen fortblieb. Jene Abhandlung ist die von Prof. Schrader in Tübingen herrührende, überarbeitete Lösung einer im Jahre 1813 von der Kopenhagener Kgl. Gesellschaft gestellten Preisaufgabe, die unter dem Titel „Commentatio de summatione seriei $\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \ldots$" zu Weimar 1818 erschien. Die Summirung wird durch Integration bewirkt und liefert die genannten Formeln auf S. 17. Später (§ 15 ff.) wird die Reihe als Differenz zweier harmonischen Reihen mit Hilfe der Euler'schen semiconvergenten Summenformel behandelt und die Bestimmung nach Erchinger ausgeführt („qui ante paucos annos rusticus, nunc mathesin apprime sciens, eam in Lyceo Tubingensi docet" a. a. O. S. 57).

$$\mathfrak{S}(\tfrac{2}{7}) = \frac{\pi}{2\sin\frac{2\pi}{7}} - \log 2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{7}\log 2\sin\frac{\pi}{14} + \cos\frac{4\pi}{7}\log 2\cos\frac{\pi}{7}\right.$$
$$\left. + \cos\frac{6\pi}{7}\log 2\sin\frac{3\pi}{14}\right)$$

somit ist

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{23} + \tfrac{1}{30} - \tfrac{1}{37} + - \ldots = \tfrac{1}{7}\left[\frac{\pi}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\right.$$
$$- \log 2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{7}\log 2\sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14}\log 2\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} \times\right.$$
$$\left.\left. \times \log 2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\right].$$

Mit Hilfe der Formeln (32) und (33) oder (32a) und (33a) lässt sich jede unendliche alternirende Reihe rationaler Zahlen, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden, summiren. Denn es ist

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - + \ldots = \frac{1}{b}\,\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Die Formeln geben $\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right)$ allerdings nur, wenn $a < b$. Ist nun $a > b$, etwa $a = pb + q$, wo $p$ und $q$ ganzzahlig und $q < b$ ist, so kann man die Reihe nach rückwärts bis zum Nenner $q$ fortsetzen und hat dann, indem man das Hinzugefügte wieder abzieht

$$\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \pm\left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right) - b\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+b} + \frac{1}{q+2b} - + \ldots\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{q+(p-1)b}\right)\right]$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $p$ gerade oder ungerade ist, so dass wir auch schreiben können

$$(34) \quad \mathfrak{S}\left(p + \frac{q}{b}\right) = (-1)^p\left[\mathfrak{S}\left(\frac{q}{b}\right) - \mathfrak{S}_{p-1}\left(\frac{q}{b}\right)\right] \quad (q < b)$$

Zur *angenäherten* numerischen Berechnung von $\mathfrak{S}(z)$, besonders für grosse Werte von $z$, hat man aus (30), wenn man für $C(z)$ den Näherungswert aus (23) setzt,

$$(35) \quad \mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{12z^2} - \frac{1}{3(z+1)^2} + \log\frac{z+1}{z}$$

Für $z = 1$ heben sich die Ungenauigkeiten dieser Formel vollständig auf, sie liefert richtig

$$\mathfrak{S}(1) = \log 2$$

Im allgemeinen ist der Fehler für $z > 1$ kleiner als $\frac{2}{15(z+1)^4}$

Wird in (35) noch nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ entwickelt, so ergiebt sich

(35a) $$\mathfrak{S}(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{4z^4} \dots$$

Diese Formel ist auch sehr brauchbar, um die Summirung einer endlichen Gliederzahl der alternirenden Reihe zu bewerkstelligen, oder was auf dasselbe hinauskommt, den Rest der unendlichen Reihe, beim Abbrechen nach einem bestimmten Gliede zu schätzen.

Offenbar ist nämlich

(35b) $$\frac{1}{b}\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + - \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{a+(m-1)b} + (-1)^m \cdot \frac{1}{b}\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b} + m\right)$$

und auf das letzte Glied lässt sich, wenn $m$ nicht all zu klein ist, Gleichung (35a) mit hinreichender Genauigkeit anwenden. Damit ist aber der fragliche Rest bestimmt, und sonach auch die Summe der $m$ ersten Glieder.

Setzen wir nun in (35a) $z+m$ statt $z$ und entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{m}$, so kommt

$$2\mathfrak{S}(z+m) = \frac{1}{m} - \frac{2z-1}{2m^2} + \frac{z(z-1)}{m^3} - \frac{(2z-1)(2z^2-2z-1)}{4m^4} \dots$$

also ist der Rest

(35c) $$\frac{1}{b}\mathfrak{S}\left(\frac{a}{b}+m\right) = \frac{1}{2bm} - \frac{2a-b}{4b^2m^2} + \frac{a(a-b)}{2b^3m^3} - \frac{(2a-b)(2a^2-2ab-b^2)}{4b^4m^4} \dots$$

Die Summe der $m$ ersten Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ ist also um $(-1)^m\left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{4m^4} \dots\right)$ algebraisch kleiner als $\log 2$, wie schon in Abschnitt 9. gefunden wurde. Sollte, um ein anderes Beispiel zu wählen, $\pi$ aus der Leibnitz'schen Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

berechnet werden, so hätte man $a = 1$, $b = 2$, mithin für $\pi$ selbst

$$4 \cdot \frac{1}{b} \mathfrak{S}\left(\frac{a}{b} + m\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{4m^3}$$

Nimmt man also $m = 10^n$ Glieder, so beträgt der Fehler fast genau eine Einheit der $n$ten Stelle hinter dem Decimalkomma, und zwar erhält man die $n$te Ziffer um 1 zu klein, die darauf folgenden Stellen aber richtig, und eine Abweichung tritt erst wieder nach $2n$ weiteren Stellen ein.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Formel (35b) nicht nur dazu dienen kann, die Summirung der endlichen Reihe auf die der unendlichen zurückzuführen, sondern dass danach eben so wol die linke Seite berechnet werden kann, indem man die Summation der endlichen Reihe soweit wirklich ausführt, dass zur Abschätzung des Restes Gleichung (35) oder gar die ungenauere aber einfachere Formel (35c) genügt.

So ist z. B.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{9}{2}\right)$$

und nach (35)

$$\mathfrak{S}\left(\frac{9}{2}\right) = 0,\ 12\,308$$

während nach (35c)

$$\mathfrak{S}\left(\frac{9}{2}\right) = 0,\ 12\,285$$

kommt. Für $\frac{\pi}{4}$ erhält man so die Werte 0, 78 535 bzhw. 0,78524, deren erster dem wahren Werte 0, 7853 98 natürlich näher kommt. Man sieht leicht, dass man den Fehler erheblich verkleinern kann, wenn man nur einige Anfangsglieder mehr unmittelbar addirt.

11. Abgeleitete Reihen. Werden alle Glieder der Reihe $\mathfrak{S}$ positiv genommen, so geht sie in die divergente Reihe $S$ über sie convergirt also nur bedingt. Convergenz und Summe der Reihe sind daher abhängig von dem Verhältniss, in welchem die positiven und negativen Glieder in den ersten $n$ Gliedern, als deren Grenzwert die Summe der Reihe anzusehen ist, auftreten. Wie schon in der Einleitung und im § 4 angedeutet, ist die Untersuchung dieser Abhängigkeit mit den hier gegebenen Mitteln sehr einfach ausführbar. Der einzuschlagende Weg ist derselbe, dem Herr Natani [1]) gefolgt ist, nur dass wir keinen Gebrauch von bestimmten Integralen machen.

---

1) A. a. O. S. 287.

Wir leiten aus der gegebenen Reihe $\mathfrak{S}$ eine neue ab, in der positive und negative Glieder nicht mehr in gleicher Anzahl, sondern im Verhältnis $p:q$ vorhanden sein sollen, und zwar so, dass wir die $p$ ersten Glieder der gegebenen Reihe unmittelbar auf einander folgen lassen, dann die $q$ ersten negativen Glieder einschalten, dann wieder $p$ positive und $q$ negative Glieder nehmen u. s. f. Da $p$ und $q$ als endlich vorausgesetzt werden, besteht die neue Reihe aus alternirenden Gruppen von endlich vielen Gliedern. Diese Gliedergruppen werden schliesslich unendlich klein; ob sie beständig abnehmen, ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Hier genügt aber auch die erstere Eigenschaft zur Convergenz, da sich leicht ergiebt, dass die Summe einer endlichen Anzahl der Gruppen sich mit wachsender Anzahl einer festen Grenze nähert. Fassen wir nämlich die beiden ersten Gruppen

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2}+\dots+\frac{1}{z+2p-2}$$

und

$$-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}-\dots-\frac{1}{z+2q-1}$$

zu einem Gliede $u_1$ der neuen Reihe zusammen, so können wir $p>q$ vorausgesetzt, schreiben:

$$u_1=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+-\dots+\frac{1}{z+2q-2}-\frac{1}{z+2q-1}+\frac{1}{z+2q}\right)$$
$$+\frac{1}{z+2q+2}+\dots+\frac{1}{z+2p-2}$$

und erhalten, wenn wir $np$ und $nq$ statt $p$ und $q$ setzen, die Summe der $2n$ ersten Gruppen

$$U_n(z)=\mathfrak{S}_{2nq}(z)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{2}+nq+1}+\frac{1}{\frac{z}{2}+nq+2}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\frac{z}{2}+np-1}\right)$$

also, wenn wir zur Grenze übergehen, und beachten, dass nach (3)

$$\lim_{n=\infty}\sum_{nq+1}^{np-1}\frac{1}{\frac{z}{2}+k}=\log\frac{p}{q}$$

ist,

$$(36)\qquad U(z)=\mathfrak{S}(z)+\tfrac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

Für $q > p$ hätte man ganz ebenso

$$U_n = \mathfrak{S}_{2qn} - \frac{1}{z+2p} - \frac{1}{z+2p+2} - \dots - \frac{1}{z+2q}$$

also

$$U = \mathfrak{S} - \tfrac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

mithin dasselbe Resultat.

Die Summe der $2n$ ersten Gruppen, oder der $n(p+q)$ ersten Einzelglieder, der neuen Reihe bleibt also mit wachsendem $n$ endlich; da nun ein Oscilliren der Reihe durch das schliessliche Verschwinden der Gruppen ausgeschlossen ist, muss die Reihe, auch wenn man an anderer Stelle abbricht, demselben Grenzwert zustreben.

Es ist deutlich, wie die ursprüngliche und die neue Reihe sich für jedes endliche $n$ um eine Anzahl Glieder unterscheiden, die mit wachsendem $n$ selbst eine unendliche Reihe mit der Summe $\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ bilden. Ist $q = p$, so verschwindet dieser Betrag, und die abgeleitete Reihe hat, wie zu erwarten war, dieselbe Summe wie die ursprüngliche.

Die Wertänderung ist übrigens einerseits von $z$, andererseis auch davon unabhängig, wie die einzelnen Glieder innerhalb der $2n$ ersten Gruppen angeordnet sind, da es bei der Ermittelung der Summe nur darauf ankam, wieviel Glieder jeder Art vorhanden waren. —

Die Trennung der Fälle $p > q$ und $p < q$ lässt sich auf folgende Art vermeiden. Schreiben wir

$$u_1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+2} + \dots + \frac{1}{z+2p-2} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} - \dots$$
$$- \frac{1}{z+2q-1} = \tfrac{1}{2}S_{p-1}\left(\frac{z}{2}\right) - \tfrac{1}{2}S_{q-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

so ist

$$2U_n(z) = S_{pn-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{qn-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$
$$= C_{pn-1}\left(\frac{z}{2}\right) - C_{qn-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log\frac{\frac{z}{2}+np-1}{\frac{z+1}{2}+nq-1}$$

also für $n = \infty$

$$2U(z) = C\left(\frac{z}{2}\right) - C\left(\frac{z+1}{2}\right) + \log\frac{p}{q}$$

woraus sich nach (29) Formel (36) ergiebt.

*Beispiele.* Es war

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + - \ldots = \frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2})$$

daher für $p = 2$, $q = 1$

$$1 + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{7} + + - \ldots = \tfrac{1}{2}[\mathfrak{S}(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\log 2]$$
$$= \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{4}\log 2$$

Für $z = 1$ hat man

$$\mathfrak{S}(1) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \ldots = \log 2$$

Demnach ist

$$U(1) = \log 2\sqrt{\frac{p}{q}}$$

so dass man die Logarithmen beliebiger rationaler oder quadratisch irrationaler Zahlen durch die reciproken natürlichen Zahlen darstellen kann. — Für $p = 1$, $q = 4$, erhält man so:

$$0 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + - - - - \ldots$$

Eine Entscheidung darüber, ob die Gliedergruppen beständig abnehmen, oder aber bald steigen, bald fallen, lässt sich mit Hilfe der Formel (22) gewinnen, da jede Gruppe als ein Ausschnitt einer harmonischen Reihe anzusehen ist. Bezeichnen wir die $k$te Gruppe mit $v_k$, so ist die $n$te positive Gruppe

$$v_{2n-1} = \frac{1}{z + 2(n-1)p} + \frac{1}{z + 2(n-1)p + 2} + \ldots + \frac{1}{z + 2np - 2}$$

also

$$2v_{2n-1} = S_{np-1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{(n-1)p-1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

Ebenso gilt für die $n$te negative Gruppe

$$v_{2n} = \frac{1}{z + (2n-2)q + 1} + \ldots + \frac{1}{z + 2nq - 1}$$

$$2v_{2n} = S_{nq-1}\left(\frac{z+1}{2}\right) - S_{(n-1)q-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

Nach (22) ist nun, für hinreichend grosse $m$ und $m_1$

$$S_m(x) - S_{m_1}(x) = \log \frac{m+x}{m_1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+x} - \frac{1}{m_1+x}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(m+x)^2} - \frac{1}{(m_1+x)^2}\right)$$

also, wenn wir $\frac{z}{2} = x$ setzen

$$2v_{2n-1} = \log \frac{np-1+x}{np-p-1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{np-1+x} - \frac{1}{np-p-1+x}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(np-1+x)^2} - \frac{1}{(np-p-1+x)^2}\right)$$

$$= -\log\left(1 - \frac{p}{np-1+x}\right) + \frac{1}{2np}\left(\frac{1}{1-\frac{1-x}{np}} - \frac{1}{1-\frac{p+1-x}{np}}\right) - \frac{1}{12n^2p^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-x}{np}\right)^2} - \frac{1}{1-\left(\frac{p+1-x}{np}\right)^2}\right)$$

Entwickeln wir nach Potenzen von $\frac{1}{n}$, so wird, wenn wir nur die beiden ersten Potenzen berücksichtigen

$$2v_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{z-1}{p}\right)$$

Setzen wir hierin $z+1$ statt $z$ und $q$ statt $p$, so erhalten wir

$$2v_{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(1 - \frac{z}{q}\right)$$

und ebenfalls aus $2v_{2n-1}$, für $n+1$ statt $n$

$$2v_{2n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\left(-1 - \frac{z-1}{p}\right)$$

Demnach ist

$$2(v_{2n-1} - v_{2n}) = \frac{1}{2n^2}\left(\frac{z}{q} - \frac{z-1}{p}\right)$$

$$2(v_{2n} - v_{2n+1}) = \frac{1}{2n^2}\left(2 - \frac{z}{q} + \frac{z-1}{p}\right)$$

und zwar bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n^3}$ genau. Für einen hinreichend grossen Wert von $n$ haben also die Differenzen $v_{2n-1} - v_{2n}$ und $v_{2n} - v_{2n+1}$ bzhw. dieselben Vorzeichen wie

$$w_1 = \frac{z}{q} + \frac{1-z}{p} \quad \text{und} \quad w_2 = 2 - w_1$$

*Sind $w_1$ und $w_2$ beide positiv, so nehmen, von jenem $n$ an, die Gliedergruppen beständig ab.* Dies ist, wie leicht ersichtlich, für ganz beliebige Werte $p$ und $q$ der Fall, sobald ($z$ als reell vorausgesetzt)

$$0 \leqq z \leqq 1$$

ist, da dann auch $w_2$ in demselben Intervall liegt, mithin $w_2$ sich zwischen 1 und 2 bewegt. *Insbesondere gilt dies also von allen auf die in Rede stehende Art aus der „speciellen“ harmonischen Reihe abgeleiteten Reihen.*

Ist aber $z > 1$ oder negativ, so hängt das Vorzeichen der Grössen $w$ von der Wahl von $p$ und $q$ ab. Ist z. B. $z = 2$, so ist

$$w_1 = \frac{2}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2p - q}{pq}$$

also negativ, wenn $p = 1$, $q = 3$ ist. In der Tat ist dann

$$v_{2n} = \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n+1} = \frac{108n^2 - 36n - 1}{216n^3 - 108n^2 - 6n + 3}$$

$$v_{2n-1} = \frac{1}{2n}, \quad v_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}$$

und schon von $n = 1$ an $v_{2n-1} < v_{2n}$, aber $v_{2n} > \frac{3}{6n+1} > v_{2n+1}$, so dass in der Reihe

$$\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}) + \tfrac{1}{4} - (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13}) + \tfrac{1}{6} - (\tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} + \tfrac{1}{19}) + - \dots$$
$$= \mathfrak{S}(2) + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{3} = 1 - \log 2\sqrt{3}$$

die Gruppen von Anfang an abwechselnd steigen und fallen. Man kann also durch passende Wahl von $p$ und $q$ leicht Reihen von dieser Beschaffenheit herstellen, die trotzdem convergiren.

Uebrigens ist auch ohne die Beziehung $w_1 + w_2 = 2$ klar, dass, wenn eine der beiden Grössen $w$ negativ ist, die andere nicht auch negativ sein kann, denn sonst würden die Gruppen beständig zunehmen, könnten also nicht unendlich klein werden.

Ist $q = p$, so fällt $z$ ganz heraus, es wird

$$w_1 = \frac{1}{p}, \quad w_2 = \frac{2p-1}{p}$$

d. h. beide sind stets positiv, *Gruppen aus gleich vielen Gliedern fallen schliesslich beständig, aus welcher harmonischen Reihe man auch die Glieder entnehme.*

12. **Verallgemeinerung.** Es liegt nahe, die Gliederzahl der alternirenden Gruppen in der abgeleiteten Reihe variabel zu machen. Bezeichnen wir sie mit $p_n$ für die positiven, $q_n$ für die negativen Glieder, so beginnt die neue Reihe also mit den ersten $p_1$ positiven Gliedern der ursprünglichen, dann folgen die ersten $q_1$ negativen, dann die nächsten $p_2$ positiven und $q_2$ negativen Glieder u. s. f. Schreiben wir noch

$$q_1+q_2+\ldots+q_k=Q_k,\quad p_1+p_2+\ldots+p_k=P_k$$

so ist also die $n$te positive Gruppe

$$v_{2n-1}=\frac{1}{z+2P_{n-1}}+\frac{1}{z+2P_{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{z+2P_n-2}$$

und die darauf folgende $n$te negative Gruppe

$$v_{2n}=\frac{1}{z+2Q_{n-1}+1}+\frac{1}{z+2Q_{n-1}+3}+\ldots+\frac{1}{z+2Q_n-1}$$

so dass also die Summe der ersten $2n$ Gruppen

$$V_{2n}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2}+\ldots+\frac{1}{z+2P_n-2}$$
$$-\left(\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+3}+\ldots\frac{1}{z+2Q_n-1}\right)$$

ist, woraus

$$2V_{2n}=S_{P_n-1}\left(\frac{z}{2}\right)-S_{Q_n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

$$=\log\frac{P_n-1+\frac{z}{2}}{Q_n-1+\frac{z+1}{2}}+C_{P_n-1}\left(\frac{z}{2}\right)-C_{Q_n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

Es seien nun $p_n$ und $q_n$ so gewählt, dass $P_n$ und $Q_n$ mit $n$ unendlich werden.

Wäre nämlich etwa $\lim P_n$ endlich, so müsste $\lim p_n=0$ sein, also $p_n$ bei einem gewissen $n$ unter 1 sinken; dies bedeutet aber ein Aufhören der positiven Glieder. Wäre dann auch $\lim Q_n$ endlich, so bräche die Reihe ab, während bei $\lim q_n \geqq 1$ die negativen Glieder weiter laufen und die Reihe divergent machen würden.

Werden aber $P_n$ und $Q_n$ beide unendlich, so ist

$$\lim_{n=\infty} V_{2n}=\mathfrak{S}(z)+\tfrac{1}{2}\log\left[\lim\frac{P_n}{Q_n}\right] \tag{37}$$

Lim $V_{2n}$ bleibt also endlich mit lim $P_n : Q_n$. Kommt noch hinzu, dass die Gruppen $v$ die Null zur Grenze haben, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe wird durch Formel (37) angegeben. Ist dagegen $\lim v_{2n-1} = \lim v_{2n}$ endlich, so wird die neue Reihe, als Summe der einzelnen $v$ aufgefasst, in den Grenzen $\lim V_{2n}$ und $\lim (V_{2n} + v_{2n+1})$ oscilliren; indessen würde dann jede der Reihen

$$\sum_1^\infty (v_{2k-1} - v_{2k}) = \lim V_{2n} \quad \text{und} \quad v_1 - \sum_1^\infty (v_{2k} - v_{2k+1}) = \lim V_{2n+1}$$

als convergent zu bezeichnen sein, und je nach der Definition der neuen Reihe durch die eine oder die andere Form, hat sie dann die eine oder die andere Summe.

Zur Untersuchung von $v_\infty$ hat man

$$2v_{2n-1} = S_{P_n - 1}\left(\frac{z}{2}\right) - S_{P_{n-1}-1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

also nach (3)

$$2 \lim v_{2n-1} = \log\left(\lim \frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \log\left[\lim\left(1 + \frac{p_n}{P_{n-1}}\right)\right]$$

(38) und ebenso

$$2 \lim v_{2n} = \log\left(\lim \frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right) = \log\left[\lim\left(1 + \frac{q_n}{Q_{n-1}}\right)\right]$$

$v_\infty$ wird also immer und nur dann verschwinden, wenn $P_n$ und $Q_n$ stärker unendlich werden, als $p_{n+1}$ und $q_{n+1}$.

*Beispiele.* Die Voraussetzung $\lim P_n = \infty$, $\lim Q = \infty$ ist erfüllt, sobald die Reihen $p_1 + p_2 + \ldots$, $q_1 + q_2 + \ldots$ divergiren, zunächst also sicher, wenn auch $p_n$ und $q_n$ mit $n$ unendlich werden, so dass die Gruppen schliesslich selbst unendliche Reihen bilden. Dass die Convergenz der dann entstehenden Doppelreihe nicht ausgeschlossen ist, zeigt sich in dem Falle, wo $p_n$ und $q_n$ ganze rationale Functionen von $n$ sind. Sei $p_n$ vom Grade $r$, $q_n$ vom Grade $s$, so ist $P_n$ vom Grade $r+1$, $Q_n$ vom Grade $s+1$, und da

$$v_{2n-1} < \frac{p_n}{z + 2P_{n-1}}, \quad v_{2n} < \frac{q_n}{1 + z + 2Q_{n-1}}$$

so folgt, auch ohne die Benutzung von (38) unmittelbar, dass

$$\lim v_{2n-1} = \lim v_{2n} = 0$$

ist. Lim $\dfrac{P_n}{Q_n}$ wird nun nur dann endlich und von null verschieden, wenn beide Functionen von gleichem Grade sind, also $r = s$ ist; ist

$r \gtrless s$, so wird der Quotient $\infty$ oder 0, der Logarithmus desselben also $\pm\infty$, und die $v$-Reihe divergirt.

So erhält man, um einen ganz einfachen Fall zu wählen, für $s=1$, $p=1$, $q=n$, die Reihe

$$1-(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{3}-(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6})+\tfrac{1}{5}-(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12})+\tfrac{1}{7}$$
$$-\left(\tfrac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{20}\right)+-\ldots$$

Die allgemeinen Glieder derselben sind

$$v_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}$$

und da

$$Q_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ist,

$$v_{2n}=\frac{1}{n(n-1)+2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Trotzdem nun $v_{2n}<\frac{n}{n(n-1)+2}$, also $\lim v_{2n}=0$ ist, wird die Reihe mit

$$\log\frac{P_n}{Q_n}=\log\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

negativ unendlich und giebt so ein einfaches Beispiel für eine, trotz der unbegrenzten Abnahme der Glieder, *divergente*, alternirende Reihe [1]). (Vgl. § 3.)

Ist aber $s=r$ und $p_n=a_r n^r+\ldots$, $q_n=b_r n^r+\ldots$, so ist

$$\begin{aligned}P_n&=a_r\sum_1^n k^r+\ldots,\\ Q_n&=b_r\sum_1^n k^r+\ldots,\end{aligned}\qquad \lim\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_r}{b_r}=\lim\frac{p_n}{q_n}.$$

Die Summenänderung hängt also nur von den Coefficienten der höchsten Potenz in $p_n$ und $q_n$ ab, so dass wir den Satz aussprechen können:

1) Dass die ganz ähnliche Reihe, welche man erhält, wenn man umgekehrt $p=n$, $q=1$ wählt, eine gleichfalls divergente „Umstellung" der Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$ ist, hat Herr Lionnet in der schon angeführten Note nachgewiesen. (Nouv. Annales de Math. 1879.)

*Sind $p_n$ und $q_n$ ganzzahlige, ganze rationale Functionen gleichen Grades von $n$, und bildet man aus den Gliedern der alternirenden harmonischen Reihe eine neue Reihe, in der auf je $p_n$ positive Glieder der ersteren, je $q_n$ negative Glieder derselben folgen, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ersten um*

$$\frac{1}{2}\log\left(\lim_{n=\infty}\frac{p_n}{q_n}\right)$$

Insbesondere wird keine Summenänderung stattfinden, wenn die Coefficienten der höchsten Potenz in $p_n$ und $q_n$ gleich sind. Demnach ist also, für $p_n = 2n-1$, $q_n = 2n$,

$$1-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7})-(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{12})+-\ldots = \log 2$$

und ähnlich

$$(1+\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11})+(\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}+\tfrac{1}{21})-(\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{19}+\tfrac{1}{23}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{31}) + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Sind die Functionen $p_n$ und $q_n$ vom Grade 0, also constant, so entsteht Formel (36).

Ein Beispiel für den Fall, dass die Gruppen für $n=\infty$ nicht der 0, sondern festen endlichen Grenzen zustreben, bietet sich, wenn $p_n$ und $q_n$ Exponentialfunctionen sind. Sei etwa $p_n = a^{n-1}$ und $a > 1$, also

$$P_n = 1+a+\ldots+a^{n-1} = \frac{a^n-a}{a-1}$$

so ist nach (38)

$$\lim 2v_{2n-1} = \log\left(\lim\frac{P_n}{P_{n-1}}\right) = \log a$$

Die $v$-Reihe kann also nur convergiren, wenn auch

$$\lim 2v_{2n} = \log a,$$

was etwa durch die Wahl von

$$q_n = a^{n-1}+b^{n-2}\,(b<a)$$

zu erreichen ist. Man hat dann

$$\lim V_{2n} = \mathfrak{S}(z)+\tfrac{1}{2}\log 1 = \mathfrak{S}(z)$$

und

$$\lim V_{2n+1} = \mathfrak{S}(z)+\tfrac{1}{2}\log a$$

$\sum\limits_1^\infty v_k$ wird zwischen diesen beiden Werten oscilliren, wofern nicht

durch Zusammenfassung je zweier aufeinander folgender Glieder in in der oben angedeuteten Weise für die Convergenz gesorgt wird.

Wir wollen noch über das Grössenverhältniss aufeinander folgender Gruppen dieselbe Untersuchung anstellen, wie sie in Abschnitt 11. bei constanter Gliederzahl $p$ und $q$ geführt wurde. Wir brauchen in den dortigen Ausdrücken für $v_{2n-1}$ und $v_{2n}$ nur $P_n$ statt $np$ und $Q_n$ statt $nq$ zu schreiben, um die jetzt in Frage kommenden Werte zu erhalten; demnach ist, wenn wir noch $\frac{z}{2} = x$ setzen,

$$2v_{2n-1} = S_{P_n-1}(x) - S_{P_n-1}(x)$$

und für hinreichend grosses $n$, wieder nach (22)

$$2v_{2n-1} = -\log\left(1 - \frac{p_n}{P_n - 1 + x}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n - 1 + x} - \frac{1}{P_n - p_n - 1 + x}\right)$$

Hier können wir abbrechen, wenn wir bei der Entwickelung nach Potenzen von $\frac{1}{P_n}$ uns mit den Gliedern zweiter Ordnung begnügen wollen. Es wird so

$$2v_{2n-1} = \frac{p_n}{P_n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^2 + \frac{1-z}{2}\,\frac{p_n}{P_n^2})$$

$$2v_{2n} = \frac{q_n}{Q_n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^2 - \frac{z}{2}\,\frac{q_n}{Q_n^2}$$

$$2v_{2n+1} = \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}}\right)^2 + \frac{1-z}{2}\,\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}^2}$$

$$= \frac{p_{n+1}}{P_n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^2 + \frac{1-z}{2}\,\frac{p_{n+1}}{P_n^2}$$

wo die Formeln für $v_{2n}$ und $v_{2n+1}$ wie früher aus dem Werte von $v_{2n-1}$ abgeleitet sind. Um die Vorzeichen der Grössen $v_{2n-1} - v_{2n}$ und $v_{2n} - v_{2n+1}$ untersuchen zu können, wollen wir voraussetzen, $p_n$ und $q_n$ seien ganze rationale Functionen gleichen Grades von $n$ und dieselben wie vorher bezeichnen. Dann ist

$$P_n = a_r \sum_1^n k^r + a_{r-1} \sum_1^n k^{r-1} + \dots$$

und für unseren Zweck genügt es, zu wissen, dass diese Summen die Form

$$\sum_1^n k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \tfrac{1}{2} n^r + \ldots$$

besitzen [1]). Wir haben hiernach nämlich

$$P_n = \frac{a_r}{r+1} n^{r+1} + \left(\frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{r}\right) n^r + \ldots$$

also

$$\frac{p_n}{P_n} = \left(\frac{a_r}{n} + \frac{a_{r-1}}{n^2} + \ldots\right) \frac{\frac{r+1}{a_r}}{1 + \frac{r+1}{a_r}\left(\frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{r}\right)\frac{1}{n} + \ldots}$$

und, wenn wir wieder bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen bleiben,

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{n^2}\left(\frac{1}{r}\frac{a_{r-1}}{a_r} + \frac{r+1}{2}\right)$$

Da wir die Functionen $p$ und $q$ mindestens als linear, also $r \geqq 1$ voraussetzen können — der Fall $r = 0$ ist in Abschnitt 11. erledigt — so wird das in $v_{2n-1}$ auftretende Glied $\frac{1-z}{2}\frac{p_n}{P_n^2}$ schon für $r = 1$ mit Gliedern dritter Ordnung beginnen, also für uns nicht mehr in Betracht kommen. Wir haben daher

$$2v_{2n-1} = \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r}\frac{a_{r-1}}{a_r}\frac{1}{n^2}$$

$$2v_{2n} = \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r}\frac{b_{r-1}}{b_r}\frac{1}{n^2}$$

$$2v_{2n+1} = \frac{r+1}{n} - \frac{r+1}{r}\left(r + \frac{a_{r-1}}{a_r}\right)\frac{1}{n^2}$$

mithin

$$v_{2n-1} - v_{2n} = \frac{r+1}{2r}\left(\frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r}\right)\frac{1}{n^2}$$

$$v_{2n} - v_{2n+1} = \frac{r+1}{2r}\left(r - \frac{b_{r-1}}{b_r} + \frac{a_{r-1}}{a_r}\right)\frac{1}{n^2}$$

Für hinreichend grosse Werte von $n$ sind folglich die Vorzeichen dieser Differenzen dieselben wie die der Grössen

$$w_1 = \frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r}, \quad w_2 = r - w_1$$

---

1) Eine elementare Herleitung dieser Eigenschaft findet man in dem schon oben angeführten Aufsatze „Zur Summation endlicher Reihen u. s. w." (Archiv d. Math. T. IV. S. 107.)

sonach unabhängig von $z$, so lange nicht $w_1$ oder $w_2$ null wird, in welchem Falle die höheren Potenzen von $n$ in Frage kommen, deren Coefficienten $z$ enthalten.

Das beständige Fallen der Gliedergruppen von einem gewissen $n$ an ist also hier an die Bedingung

$$0 < \frac{b_{r-1}}{b_r} - \frac{a_{r-1}}{a_r} < r$$

geknüpft.

In den beiden oben gegebenen Reihen für $\log 2$ und $\frac{\pi}{4}$ ist $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, also die Bedingung erfüllt, während für $p_n = n$, $q_n = n-1$ sich $w_1 = -1$, $w_2 = 2$ ergiebt, so dass in der Reihe

$$\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+4}\right) - \left(\frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{z+6} + \frac{1}{z+8} + \frac{1}{z+10}\right) - \left(\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+5}\right) + - \ldots = \mathfrak{S}(z)$$

von einem gewissen Gliede an jede positive Gruppe sowol kleiner ist als die vorhergehende wie auch als die folgende negative Gruppe.

13. Der Schlömilch'sche Satz verallgemeinert. Wie in der Einleitung erwähnt, hat Herr Pringsheim eine Methode gegeben, um die Wertveränderung einer bedingt convergenten Reihe unter Umständen auf die einer andern zurückzuführen. So führt der ebenda genannte Satz von Schlömilch die Wertänderung einer beliebigen convergenten alternirenden Reihe für den Fall, dass die positiven und negativen Glieder nicht mehr in dem Verhältnis $1:1$, sondern in dem Verhältnis $p:q$ auftreten, auf die entsprechende Wertänderung der harmonischen Reihe zurück, die hier in § 11 ermittelt ist. Wir wollen diesen, in so enger Beziehung zur harmonischen Reihe stehenden Satz elementar herleiten, dabei aber, wie in § 12, statt des constanten Verhältnisses $p:q$ das variable $p_n:q_n$, sowie die Bedingung $P_\infty = \infty$, $Q_\infty = \infty$ einführen.

Zwei divergente Reihen positiver Glieder

$$u_1,\ u_3,\ u_5\ \ldots \text{ und } u_2,\ u_4,\ u_6\ \ldots$$

seien nun zu der bedingt convergenten Reihe

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + - \ldots = U$$

vereinigt, wobei nicht erforderlich ist, dass die $u_k$ mit ungeradem Index demselben Bildungsgesetz folgen, wie die Glieder mit geradem

Index. $U_k$ sei die Summe der ersten $k$ Glieder. Bilden wir jetzt die neue Reihe

$$(u_1+u_3+\ldots+u_{2p_1-1})-(u_2+u_4+\ldots+u_{2q_1})+-\ldots$$

so ist (bei derselben Bezeichnung wie in § 12) die mit einer negativen Gruppe abbrechende Summe der ersten $2n$ Gruppen oder $P_n+Q_n$ Einzelglieder:

$$V_{2n}=(u_1+u_3+\ldots+u_{2P_n-1})-(u_2+u_4+\ldots+u_{2Q_n})\cdot$$

Je nachdem nun $P_n>Q_n$ oder $Q_n>P_n$ ist', wird $V_{2n}$ im Vergleich mit

$$U_{2P_n}=(u_1+u_3+\ldots+u_{P_n-1})-(u_2+\ldots+u_{2P_n})$$

$P_n-Q_n$ negative Glieder *weniger*, oder $Q_n-P_n$ solche Glieder *mehr* enthalten, so dass wir schreiben können

$$V_{2n}-U_{2P_n}\begin{cases}=\sum\limits_{Q_n+1}^{P_n}u_{2k}, & \text{wenn } P_n>Q_n\\[2ex] =-\sum\limits_{P_n+1}^{Q_n}u_{2k}, & \text{wenn } P_n<Q_n\end{cases}$$

Ziehen wir nun nach der Pringsheim'schen Methode die harmonische Reihe zur Vergleichung heran, indem wir schreiben

$$V_{2n}-U_{2P_n}=\sum_{Q_n+1}^{P_n}(k.u_{2k}).\frac{1}{k}\qquad\qquad(P_n>Q_n)$$

so muss es zwischen dem kleinsten und dem grössten der Werte

$$(Q_n+1)u_{2Q_n+2},\quad (Q_n+2)u_{2Q_n+4},\quad\ldots\quad P_n u_{2P_n}$$

einen Mittelwert $M_n$ geben, dergestalt dass

$$V_{2n}-U_{2P_n}=M_n\sum_{Q_n+1}^{P_n}\frac{1}{k}$$

Ist nun

$$\lim_{n=\infty} n\,u_{2n}=m$$

wo $m$ endlich (auch 0) oder unendlich sein kann, so nimmt auch jedes der Producte, deren Mittelwert $M_n$ ist, für $n=\infty$ den Wert $m$ an, so dass auch $\lim M_n$ mit diesem übereinstimmen muss, und wir erhalten

$$\lim V_{2n} = U + \lim_{n=\infty} \left[ n \,.\, u_{2n} \log \frac{P_n}{Q_n} \right] \tag{39}$$

und zwar auch für den Fall $P_n < Q_n$, da dann zwar $P_n$ und $Q_n$ zu vertauschen sind, dafür aber der Logarithmus das negative Zeichen bekommen muss, und beide Operationen einander aufheben.

Im übrigen gelten auch für Formel (39) die bei (37) gemachten Bemerkungen.

So ist $\Sigma v_k$ nur dann convergent und gleich $\lim V_{2n}$, wenn $\lim v_{2n+1} = 0$. Nun ist

$$v_{2n+1} = \sum_{P_n+1}^{P_{n+1}} u_{2k-1}$$

also, auf demselben Wege wie vorher,

$$\begin{aligned} \lim v_{2n+1} &= \lim_{n=\infty} \left[ n \,.\, u_{2n-1} \log \frac{P_{n+1}}{P_n} \right] \\ &= \lim_{n=\infty} \left[ n \,.\, u_{2n-2} . \log \left( 1 + \frac{p_{n+1}}{P_n} \right) \right] \end{aligned} \tag{40}$$

Ist z. B.

$$u_k = \frac{1}{k \,.\, \log(k+1)}$$

sowol für gerade wie für ungerade $k$, so ist

$$\lim n u_{2n} = \lim n u_{2n-1} = 0$$

Der Wert von $v_{2n+1}$, sowie in (39) der von $n u_{2n} \log \frac{P_n}{Q_n}$ wird aber ausserdem noch davon abhangen, wie $P_n$ und $Q_n$ unendlich werden. Sind $p_n$ und $q_n$, also auch $P_n$ und $Q_n$, ganze Functionen gleich hohen Grades von $n$, so wird, nach dem in 12. Gesagten, $\lim v_{2n+1} = 0$ und $\lim V_{2n} = \lim V_{2n+1} = U$ sein, also keine Wertänderung eintreten. Während dort dagegen die neue Reihe divergirte, sobald der Grad der Functionen ein verschiedener war, wird hier die Convergenz noch statthaben, wenn der Grad von $p_n$ und der von $q_n$ sich um eine Einheit unterscheiden. Denn ist demgemäss etwa

$$\begin{aligned} P_n &= a_{r+1} n^{r+1} + \dots \\ Q_n &= b_r n^r + \dots \end{aligned}$$

so ist

$$n u_{2n} \,.\, \log \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{2} \, \frac{\log \left( \frac{a_{r+1}}{b_r} n + \frac{a_r}{b_r} + \dots \right)}{\log(2n+1)}$$

nähert sich also der Grenze $\frac{1}{2}$. Da ausserdem $\lim v_{2n+1} = 0$, so convergirt die neue Reihe, und ihre Summe übertrifft die der ursprünglichen um $\frac{1}{2}$, während eine Verminderung um $\frac{1}{2}$ eintreten wird, wenn $P_n$ vom Grade $r$, $Q_n$ vom Grade $r+1$ ist. Von dieser Bedingung abgesehen, sind also sowol die Grade als die Coefficienten der für $p_n$ und $q_n$ zu wählenden Functionen ganz gleichgültig. Gelegentlich sei noch bemerkt, dass zwei solcher $v$-Reihen, wenn in der einen $p_n$, in der andern $q_n$ den höheren Grad besitzt, hiernach stets die Differenz $\pm 1$ ergeben, so dass danach die Einheit auf unzählig viele Arten durch Brüche von der Form $\frac{1}{k \log (k+1)}$ dargestellt werden kann.

Sind $p$ und $q$ constant, so geht (39) in den Schlömilch'schen Satz über, wonach die Wertänderung der $u$-Reihe

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{p}{q} . \lim (n u_n)$$

beträgt. —

Versagen wird Formel (39) nur in den Fällen, wo die Wertänderung in unbestimmter Form erscheint. Dies tritt ein, wenn

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 0 \text{ oder } \infty \quad \text{und gleichzeitig } \lim n u_{2n} = 0$$

sowie, wenn

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = 1 \quad \text{und dabei} \quad \lim n u_{2n} = \infty$$

ist. Da in diesen Fällen der wahre Wert von $0 . \infty$ davon abhängt, in welcher Weise $P_n$ und $Q_n$ unendlich und $u_{2n}$ null wird, lassen sie sich nicht erledigen, ohne über diesen Punkt besondere Voraussetzungen zu machen.

Dabei ist ferner zu beachten, dass zwar mit $\lim n u_{2n} = \infty$ auch jedes der Producte

$$(Q_n+1) u_{2Q_n+2}, \quad \ldots \quad P_n u_{2P_n}$$

und also auch ihr Mittelwert $M_n$ *unendlich* wird, dass aber der *Grad* des Unendlichwerdens — und auf diesen kommt es wesentlich an — für den Mittelwert i. allg. nicht derselbe sein wird, wie für $n u_{2n}$. Ist z. B.

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$p_n = 2an + b$$

$$q_n = 2an$$

also

$$P_n = a(n^2+n)+bn$$
$$Q_n = a(n^2+n)$$

so sind jene Producte die Glieder der Reihe

$$\sum_{Q_{n+1}}^{P_n} \frac{k}{\sqrt{2k}} = \sum_{an^2+an+1}^{an^2+an+bn} \sqrt{\frac{k}{2}}$$

und jedes derselben wird $\infty$ wie $n\sqrt{\frac{a}{2}}$ während $nu_{2n} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ weniger stark $\infty$ wird.

Bisweilen — und so auch hier — führt aber schon die Bemerkung zum Ziel, dass der Ausschnitt $\sum_{Q_{n+1}}^{P_n} u_{2k}$, der für $P_n > Q_n$ die Wertänderung darstellt, zwischen den Grenzen

$$\frac{P_n - Q_n}{u_2 Q_{n+2}} \quad \text{und} \quad \frac{P_n - Q_n}{u_2 P_n}$$

liegen muss. Für unser Beispiel fallen nämlich beide Grenzen zu dem Werte $\frac{b}{\sqrt{2a}}$ zusammen, der mithin die Wertänderung angiebt die nach (39) in der Form $\infty . 0$ erscheinen würde.

Ob $\lim v_{2n+1}$ verschwindet, darf in solchem Falle ebensowenig nach (40) beurteilt werden, da auch diese Formel über die Art des Unendlichwerdens von $M_n$ i. allg. nicht den richtigen Aufschluss erteilt. Nach (40) wäre der Mittelwert für unser Beispiel mit

$$\lim nu_{2n-1} = \lim \sqrt{\frac{n}{2}}$$

in Anschlag zu bringen, während

$$\log\left(1+\frac{p_{n+1}}{P_n}\right) = \log\left(1+\frac{2an+(2a+b)}{an^2+(a+b)n}\right)$$

nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ entwickelt, mit $\frac{2}{n}$ beginnt. Hiernach würde $\lim v_{2n+1}$ mit $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{2}{n}$ verschwinden, während in Wahrheit, wie wir sahen,

$$\lim v_{2n+1} = \lim \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot n \log\left(1+\frac{p_{n+1}}{P_n}\right) = \sqrt{2a}$$

zu setzen ist. Da auch

$$\lim v_{2n} = \lim \sum_{an(n-1)+1}^{an(n+1)} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2a}$$

ist, wird die neue Reihe zwischen den Werten

$$\lim V_{2n} = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} \quad \text{und} \quad \lim V_{2n+1} = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} + \sqrt{2a}$$

oscilliren, aber convergiren, wenn wir sie in eine der Formen setzen:

$$V' = \Sigma(v_{2k-1} - v_{2k}) = U + \frac{b}{\sqrt{2a}}$$

$$V'' = v_1 - \Sigma(v_{2k} - v_{2k+1}) = U + \frac{b}{\sqrt{2a}} + \sqrt{2a}$$

Berlin, Januar 1887.

VI.

# Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der Fusspunktcurven.

Von

**Eduard Janisch.**

---

1. Wir verallgemeinern das Entstehungsgesetz der Fusspunktcurven dahin, dass wir den Pol $F$ auf einer Bahncurve $B$ gleichzeitig mit dem Punkte $P$ der Directrix $D$ sich bewegen lassen. Wir erhalten dann, wenn wir durch die $F$ auf die Tangenten $t$ in dem ihrer (der $F$) Lage entsprechenden Punkte $P$ der $D$ Senkrechte fällen, in den Fusspunkten $P^*$ derselben eine Reihe von Punkten, die einer Curve $C$ angehören, welche eine verallgemeinerte positive Fusspunktcurve der $D$ genannt werden mag. Dem analog werden wir eine verallgemeinerte negative Fusspunktcurve der $D$ die Einhüllende aller jener Geraden $t^*$ nennen können, deren jede durch einen Punkt $P$ der $D$ geht und normal ist zur entsprechenden $PF$. — Es liegt nun die Frage nahe: „Was ist erforderlich, damit eine Construction der Tangente in jedem beliebigen Punkte $P^*$ einer verallg. pos. Fusspunktcurve, beziehungsweise eine Construction des Berührungspunktes einer beliebigen $t^*$ einer verallg. neg. Fusspunktcurve leicht möglich wird?"

2. Wir bemerken zunächst, dass diese Constructionen zurückgeführt werden können auf die für die gewöhnlichen Fusspunktcurven. Es lässt sich nämlich, wenn wir eine verallg. pos. Fusspunktcurve vorliegen haben, auf jeder $FP^*(\equiv p)$ ein Punkt $F^*$ so angeben, dass die erste pos. Fusspunktscurve der Directrix $D$ be-

züglich dieses Punktes $F^*$ in $P^*$ eine Berührung mit der bewussten verallg. Fusspunktcurve eingeht. Ebenso kann im andern Falle, wenn wir eine verallg. neg. Fusspunktcurve gegeben haben, auf jeder $FP$ ein Punkt $F^*$ ermittelt werden, dem die Eigenschaft zukommt, dass die neg. Fusspunktcurve der $D$ bezüglich desselben auf der $t^*$ zur Berührung kommt mit der in Rede stehenden verallg. Fusspunktcurve. — Betreffs dieser Punkte $F^*$ ist zu sagen, dass dieselben nichts andres sind, als Punkte der Enveloppe aller $FP^*$ im ersten, aller $FP$ im zweiten Falle und zwar ist der auf einer gewissen $FP^*(FP)$ liegende Punkt $F^*$ identisch mit dem Berührungspunkte derselben, — eine Tatsache, die die Anschauung ohne weiteres bestätigt. Wir brauchen demnach jetzt nur zu untersuchen, unter welchen Umständen die Ermittlung der $F^*$ einfach von Statten geht.

3. Es sind in Fig. 1. zwei benachbarte, willkürlich gewählte Lagen der Punkte $F$ und $P$ mit $F_0$, $P_0$ und $F_1$, $P_1$ bezeichnet, ferner mit $P_0^*$, $P_1^*$ die entsprechenden Punkte der verallg. pos. Fusspunktcurve. Der Schnitt der $F_0P_0^*$, $F_1P_1^*$ wird der zu ermittelnde Punkt $F_0^*$, für dessen Entfernung $x$ von $F_0$ sich aus dem Dreiecke $F_0F_1F_0^*$ ergibt:

$$x = dm\frac{\sin\nu}{\sin i}$$

da, wie aus der Figur ersichtlich, $dm$ das Bogenelement $F_0F_1$, $\nu$ der Winkel bei $F_1$, und $i$ der Winkel bei $F_0^*$ genannt wurde. Nun ist aber $i$ offenbar auch gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten in $P_0$ und $P_1$ einschliessen, er ist also ein Contingenzwinkel, und wir haben daher

$$i = \frac{ds}{\varrho}$$

wenn $ds$ das Bogenelement $P_0P_1$ und $\varrho$ den Krümmungsradius für $P_0$ bedeutet. Schreiben wir im Ausdruck für $x$ anstatt $\sin i$

$$\frac{\sin i}{i}\,.\,i$$

so erhalten wir, wenn für $i$ der eben gefundene Wert substituirt wird, da unter den obwaltenden Verhältnissen

$$\frac{\sin i}{i} = 1$$

zu erachten ist:

$$x = \varrho\sin\nu\frac{dm}{ds}$$

damit dieser Ausdruck und daher auch $F_0^*$ für jede beliebige Lage von $F_0$, $P_0$ construirt werden kann, müssen also die entsprechen-

den $\varrho$, $\frac{dm}{ds}$ und $\nu$ constructibel sein. Hiezu ist notwendig, dass es 1) eine allgemeine Construction für den Krümmungskreis eines Punktes der $D$ gibt, ferner dass es 2) möglich ist, stets das Verhältniss der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der einander entsprechenden Punkte $F$ und $P$ anzugeben

$$\left(\text{da } \frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dt} : \frac{ds}{dt}\right)$$

und endlich 3) dass man in jedem Punkte $F$ der Bahncurve $B$ die Tangente herzustellen vermag.

4. Wir untersuchen nun, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit $F^*$ als Berührungspunkt einer $FP$ constructiv ermittelt werden kann. — Wir haben zu dem Behufe in Fig. 2. wieder eine Bahncurve $B$ und eine Directrix $D$ ersichtlich gemacht, und auf ersterer einen Punkt $F_0$, auf letzterer den ihm entsprechenden $P_0$. Der Berührungspunkt $F_0^*$ der $F_0P_0$, als einer Tangente der Enveloppe aller $FP$, ergibt sich im Schnittpunkt der $F_1P_1$, wenn $F_1$, $P_1$ die zu $F_0$, $P_0$ benachbarten, von ihnen um $dm$, $ds$ abstehenden, entsprechenden Punkte sind. Nun bestimmen aber die Punktepare $F_0$, $F_1$ und $P_0$, $P_1$ auf den Verlängerungen von $dm$, $ds$ zwei ähnliche Punktreihen und das Erzeugniss derselben berührt offenbar $F_0P_0$ in $F_0^*$. Mit Benutzung dieses Resultates können wir also die Aufgabe „den Berührungspunkt einer Tangente der Enveloppe aller $FP$ zu construiren", zurückführen auf die „den Berührungspunkt einer Tangente einer als Erzeugniss zweier ähnlichen Punktreihen gegebenen Parabel zu ermitteln". Es hängt somit die Durchführbarkeit einer graphischen Lösung unserer Aufgabe davon ab, dass die beiden Reihen für jede Lage von $F$ und $P$ construirt werden können. Dies erfordert die Erfüllung folgender Bedingungen: 1) Es müssen ihre Träger, d. s. die Tangenten in $F$ und $P$, constructiv sein, und 2) es muss wieder das Verhältniss $\frac{dm}{ds}$ der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Punkte $F$ und $P$, als das Verhältniss entsprechender Strecken der $F$- und der $P$-Reihe, allgemein angegeben werden können. — Auf eine Darlegung der Einzelheiten der nötigen Constructionen brauchen wir nicht einzugehen. Wir erwähnen blos, dass man am zweckmässigsten die dem Schnittpunkte $X$ der beiden Träger entsprechenden Punkte $\Phi$ und $\Pi$ der $F$- und $P$-Reihe benutzen wird, wenn sie samt $X$ auf der Zeichenfläche zu liegen kommen. Im andern Falle wird man sich noch zwei Tangenten der Parabel verschaffen und den Satz von Brianchon in Anwendung bringen.

5. In dem Art. sei es uns gestattet einige einfache Fälle her-

vorzuheben, in welchen sofort zu erkennen ist, dass die Bedingung betreffend $\frac{dm}{ds}$ erfüllt wird.

a) Bahncurve $B$ und Directrix $D$ sind ähnliche Curven. Zugeordnete Punkte $F$ und $P$ sind homologe Punkte, $\frac{dm}{ds}$ ist dann constant und zwar gleich dem Verhältniss homologer Sehnen der $B$ und $D$. Sind beide Curven congruent, so haben wir

$$\frac{dm}{ds} = 1$$

Wir können in diesem Specialfalle unter der weiteren beschränkenden Voraussetzung, dass $B$ und $D$ ein- oder mehrfache Symmetrie aufweisen, sogar Bahncurve und Directrix coincidiren lassen und erhalten bei einfacher Symmetrie blos eine verallg. pos. Fusspunktcurve, die als Ort der Projectionen aller Punkte der gegebenen Curve auf die Tangenten der symmetrisch gelegenen definirt werden kann. Die verallg. neg. Fusspunktcurve degenerirt nämlich in dem Falle in ein Parallelstrahlenbüschel. — Bei mehrfacher ($n$-facher) Symmetrie ergeben sich hingegen zwei Gruppen verallg. pos. Fusspunktcurven und eine Gruppe verallg. neg. Fusspunktcurven und zwar enthält die erste Gruppe der verallg. pos. Fusspunktcurven $n$ $\left(\text{wenn } n \text{ ungerade, sonst } 2 \times \frac{n}{2}\right)$ congruente Curven, die so zu Stande kommen wie bei einfacher Symmetrie, während die zweite Gruppe, die dadurch charakterisirt wird, dass $F$ und $P$ sich hinter einander bewegen und zwar so, dass ihre Entfernung auf der Bahncurve gemessen stets constant $= \frac{m}{n}$ Teile deren Peripherie beträgt ($m$ und $n$ ganz), im Falle, dass $n$ ungerade ist aus $(n-1)$ Curven besteht, von denen je zwei congruent sind, ist aber $n$ gerade, so haben wir $\frac{n}{2}$ von einander verschiedene Curven, worunter sich als bemerkenswerteste diejenige befindet, welche als Ort der Projectionen aller Punkte der gegebenen Curve auf die Tangenten in den diametral gegenüber liegenden erscheint[1]). — Weit einfachere Beziehungen walten hier ob

---

1) Für die Ellipse ist dies die Keelhoff'sche Curve. S. Mathesis, VI, 16: „Le lieu des projections d'un ellipse sur la tangente menée au point diamétralement opposé." In diesem Falle wird

$$x = \varrho \frac{dm}{ds} \sin \nu = \varrho, \text{ da } \frac{dm}{ds} = 1 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\pi}{2}$$

bezüglich der verallg. negat. Fusspunktcurven. Die einzige Gruppe derselben, die vorhanden ist, setzt eine Bewegung der Punkte $F$ und $P$ voraus, die identisch ist mit der bei der zweiten Gruppe der verallg. pos. Fusspunktcurven angenommenen.

Nun ist aber die Enveloppe aller $FP$ unter dieser Voraussetzung stets mit der ersten neg. Fusspunktcurve der gegebenen Curve ähnlich, da deren (der Enveloppe) erste pos. Fusspunktcurve bezügl. des Centrums $O$ mit der gegebenen Curve ähnlich ist, welch' letzteres Moment sehr leicht nachzuweisen ist, wenn man bemerkt, dass die Winkel $FOP$ alle unter einander gleich sind. Ebenso leicht ist auch der Nachweis herzustellen, dass diese Enveloppen des weiteren mit den verallg. neg. Fusspunktcurven ähnlich sind. Mithin können wir sagen: „Alle verallg. neg. Fusspunktcurven sind im vorliegendem Falle mit der ersten negat. Fusspunktcurve der gegebenen Curve bezüglich $O$ ähnlich".

Wir gehen nun zu einem andern Falle über:

b) Bahncurve $B$ und Directrix $D$ sind Kreise. Die Punkte $F$ und $P$ bewegen sich auf deren Peripherien mit gegebenen Geschwindigkeiten gleichförmig fort. In dem Falle sind offenbar alle Bedingungen erfüllt, insbesondere ist

$$\frac{dm}{ds} = \text{const} = \frac{r\gamma}{R\Gamma}$$

wenn $r$ den Radius von $B$, $R$ den Radius von $D$, $\gamma$ die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit von $F$ und endlich $\Gamma$ die unveränderliche Winkelgeschwindigkeit von $P$ bedeutet. Man sieht, dass der Quotient $\frac{\gamma}{\Gamma}$ entscheidet, ob die auftretenden verallg. Fusspunktcurven wie auch die Enveloppen der $FP(FP^*)$ algebraisch oder transcendent werden, auch wird man leicht bemerken, dass der specielle Fall

$$\frac{\gamma}{\Gamma} = 1$$

zu subsumiren ist unter a). — Es bietet aber gerade dieser letztere Fall bezüglich der Einhüllenden der $FP$ ein bemerkenswertes Resultat, wenn wir noch die Beschränkung einführen, dass $B$ und $D$

---

ist. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich der Satz: „Beschreibt man über der Verbindungsstrecke eines Punktes $A$ einer Ellipse mit dem Krümmungsmittelpunkt des diametral gegenüber liegenden als Durchmesser einen Kreis, so berührt dieser die Keelhoff'sche Curve in dem $A$ entsprechenden Punkte".

concentrisch liegen. (Selbstverständlich müssen die Bewegungen von $F$ und $P$ hier im entgegengesetzen Sinne erfolgen). Wir erlauben uns die nötigen analytischen Entwickelungen, welche die Natur dieser Enveloppe erkennen lassen werden, hier anzuführen:

Wir verlegen den Anfangspunkt unseres rechtwinkligen Coordinatensystemes in den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise $B$ und $D$ und leiten von den Lagen

$$F_0(x = 1, \quad y = 0), \qquad P_0(x = R, \quad y = 0)$$

die angedeutete Bewegung dergestalt ein, dass gleichzeitige Lagen von $F$ und $P$ die Coordinaten haben:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} F, \qquad \left.\begin{array}{l} x = \quad R\cos\varphi \\ y = -R\sin\varphi \end{array}\right\} P$$

Als Gleichung der Verbindungsgeraden von $F$ und $P$ erhalten wir dann:

$$\frac{y - r\sin\varphi}{x - r\cos\varphi} = -\frac{(R+r)\sin\varphi}{(R-r)\cos\varphi}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$\text{I)} \qquad (R+r)x\sin\varphi + (R-r)y\cos\varphi = Rr\sin 2\varphi$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach $\varphi$ ergibt sich:

$$\text{II)} \qquad (R+r)x\cos\varphi - (R-r)y\sin\varphi = 2Rr\cos 2\varphi$$

Aus diesen beiden Gleichungen bestimmen sich leicht die Werte von $x$ und $y$, der Coordinaten des Berührungspunktes der $FP$:

$$\text{III)} \qquad x = \frac{2Rr}{R+r}\cos\varphi^3, \qquad y = \frac{2Rv}{R-r}\sin\varphi^3$$

Durch Elimination von $\varphi$ aus den beiden Gleichungen III) erhalten wir dann die Gleichung unserer Enveloppe:

$$\text{IV)} \qquad \left(\frac{x}{\frac{2Rr}{R+r}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\frac{2Rr}{R-r}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

welche dieselbe als die Evolute der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{R+r}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{R-r}{2}}\right)^2 = 1$$

zu erkennen gibt. — Mit Rücksicht auf dieses Ergebniss könnte man zu einer Construction der Krümmungskreise für Punkte einer

Ellipse gelangen [1]). — Wir gehen hierauf nicht ein, sondern wenden uns sogleich der Untersuchung eines weiteren Specialfalles zu, der dadurch gekennzeichnet ist, dass $B$ und $D$ coincidiren. In dem Falle werden die Einhüllenden der $FP$ congruent mit den verallg. neg. Fusspunktcurven. Der Beweis hiefür kann auf folgende Art gegeben werden: In den Fig. 3 sind durchgehends zwei entsprechende Lagen der $F$, $P$ schlechtweg mit $F$, $P$ bezeichnet und mit $F'$ der zu $F$ diametral gegenüberliegende Punkt, so dass $F'P$ die der Tangente $FP$ der Enveloppe zugeordnete der verallg. neg. Fussdunktcurve wird. Ferner hat man $X$ als als jenen Punkt anzusehen, in welchen die Anfangslagen $F_0$, $P_0$ vereinigt sind. Demnach kann man für das Verhältniss der Winkel $FOX = \varphi$, $POX = \psi$ setzen:

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\gamma}{\Gamma} = k\,(\text{const})$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe einen Punkt $X'$ auf dem Kreise derart zu bestimmen, dass das Verhältniss der Winkel $F'OX = \varphi'$, $POX' = \psi'$ : $\frac{\varphi'}{\psi'}$ auch gleich $k$ wird. Es ist leicht abzusehen, zu welchem Zwecke dies geschieht. Stellt sich nämlich heraus, dass der für Winkel $X'OX = \xi$ sich ergebende Wert blos von $k$ abhängig ist, dann kann die Enveloppe der $F'P$ analog zu Stande gebracht werden, wie die der $FP$ und ist folglich mit derselben congruent, w. z. b. w. Dies ist aber tatsächlich der Fall, denn man findet für

gleichgerichtete Bewegung der Punkte $F$, $P$:

wenn $\frac{\varphi}{\psi} = k < 1$, (Fig. 3a):

$$\xi = \frac{1-2k}{1-k}\pi$$

$\frac{\varphi}{\psi} = k > 1$, (Fig. 3b):

---

1) In Herrn Dr. K. Schwering's Schrift: „Theorie und Anwendungen der Liniencoordinaten etc. Leipzig 1884". befindet sich anf S. 77, Art. 94 eine analytische Untersuchung der „Enveloppen aller $FP$", wenn $B$ und $D$ concentrische Kreise sind, für den allgemeinen Fall $\left(\frac{\gamma}{\Gamma}\text{ beliebig}\right)$, welche das bemerkenswerte Resultat liefert, dass deren Brennpunkte aequidistant auf einem mit $B$ und $D$ concentrischen Kreise gelagert sind. Es wird dann auch der Fall in Betracht gezogen, dass die beiden Kreise zusammen fallen, und mit Zuhilfenahme des Imaginären sagar eine allgemeine Gleichung dieser Enveloppe hergestellt, ohne dass gesagt wird, dass dieselben mit den Cykloiden identisch sind. Wir werden dies weiter unten nachweisen.

$$\xi = \frac{2k-3}{k-1}\pi$$

und für entgegengesetzt gerichtete Bewegung derselben:

wenn $\frac{\varphi}{\psi} = k < 1$, (Fig. 3c):

$$\xi = \frac{1}{1+k}\pi$$

$\frac{\varphi}{\psi} = k > 1$, (Fig. 3*d*):

$$\xi = \frac{1}{k+1}\pi$$

Die Ableitung des einen oder des anderen dieser Ausdrücke geht sehr einfach von Statten. Es sei uns gestattet die vollständige Rechnung blos für Fig. 3a hier auszuführen. Wir entnehmen dieser Fig.:

$$\varphi' = \pi - \varphi - \xi, \qquad \psi' = 2\pi - \psi - \xi$$

daher erhält man für $\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\varphi}{\psi} = k$

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\pi - \varphi - \xi}{2\pi - \psi - \xi}$$

und hieraus $\xi$:

$$\xi = \frac{2\varphi - \psi}{\varphi - \psi}\pi = \frac{2k-1}{k-1}\pi$$

Ebenso ergeben sich die Werte von $\xi$ für die anderen Fälle. — Wir ziehen aus diesen Resultaten vorläufig keine Consequenzen, sondern untersuchen jetzt, mit was für Curven wir es eigentlich zu tun haben.

Nehmen wir an, in den Fig. 3 bedeute $OX$ die pos. Richtung der Abscissenaxe und es sei $\varphi = p\vartheta$, $\psi = q\vartheta$, wobei $p$ stets pos., $q$ aber pos. oder neg. sein mag, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos p\vartheta \\ y &= \varrho\sin p\vartheta \end{aligned}\right\} F \qquad \left.\begin{aligned} x &= \varrho\cos q\vartheta \\ y &= \varrho\sin q\vartheta \end{aligned}\right\} P$$

Die Verbindungslinie $FP$ erhält also die Gleichung:

$$\frac{y - \varrho\sin p\vartheta}{x - \varrho\cos p\vartheta} = \frac{\sin p\vartheta - \sin q\vartheta}{\cos p\vartheta - \cos q\vartheta}$$

oder

$$x(\sin p\vartheta - \sin q\vartheta) - y(\cos p\vartheta - \cos q\vartheta) = \varrho\sin(p-q)\vartheta$$

$$\text{I)}\qquad x\cos\frac{p+q}{2}\vartheta+y\sin\frac{p+q}{2}\vartheta=\varrho\cos\frac{p-q}{2}\vartheta$$

Diese Gleichung nach $\vartheta$ differentiirt gibt:

$$\text{II)}\qquad x\sin\frac{p+q}{2}\vartheta-y\cos\frac{p+q}{2}\vartheta=\varrho\frac{p-q}{p+q}\sin\frac{p-q}{2}\vartheta$$

also bekommen wir für die Coordinaten des Berührungspunktes $FP$ die Werte:

$$\text{III)}\quad\left\{\begin{aligned}x&=\varrho\left(\cos\frac{p+q}{2}\vartheta.\cos\frac{p-q}{2}\vartheta+\frac{p-q}{p+q}\sin\frac{p+q}{2}\vartheta.\sin\frac{p-q}{2}\vartheta\right)\\&=\varrho\frac{p\cos q\vartheta+q\cos p\vartheta}{p+q}\\y&=\varrho\left(\sin\frac{p+q}{2}\vartheta.\cos\frac{p-q}{2}\vartheta-\frac{p-q}{p+q}\cos\frac{p+q}{2}\vartheta.\sin\frac{p-q}{2}\vartheta\right)\\&=\varrho\frac{p\sin q\vartheta+q\sin p\vartheta}{p+q}\end{aligned}\right.$$

Es seien nun $p$ und $q$ pos., $p>q$. Setzen wir in den Gl. III):

$$\frac{p}{p+q}\varrho=R+r,\quad\frac{q}{p+q}\varrho=r,\quad q\vartheta=\omega,\quad\text{also}\quad p\vartheta=\frac{R+r}{r}\omega$$
$$(\varrho=R+2r)$$

dann erhalten wir

$$\text{IIIa)}\quad\left\{\begin{aligned}x&=(R+r)\cos\omega+r\cos\frac{R+r}{r}\omega\\y&=(R+r)\sin\omega+r\sin\frac{R+r}{r}\omega\end{aligned}\right.$$

d. s. die Gleichungen einer Epicykloide, welche durch Wälzung des Kreises mit dem Radius $r$ auf dem mit dem Radius $R$ zu Stande kommt. — Dieselben Gleichungen hätten wir gefunden, wenn $q>p$ angenommen worden wäre, und wir

$$\frac{q}{q+p}\varrho=R+r,\quad\frac{p}{p+q}\varrho=r,\quad p\vartheta=\omega,\quad q\vartheta=\frac{R+r}{r}\omega$$

substituirt hätten. — Anders gestaltet sich die Sache, wenn $q$ negativ vorausgesetzt wird; die Gl. III) können dann geschrieben werden:

$$\text{III')}\quad\left\{\begin{aligned}x&=\varrho\frac{p\cos q\vartheta-q\cos p\vartheta}{p-q}\\y&=\varrho\frac{-p\sin q\vartheta-q\sin p\vartheta}{p-q}\end{aligned}\right.$$

und, wenn nun gesetzt wird $(p>q)$:

$$\frac{p}{p-q}\varrho = R-r, \quad \frac{q}{p-q}\varrho = r, \quad q\vartheta = \omega, \quad p\vartheta = \frac{R-r}{r}\omega$$
$$(\varrho = R-2r)$$

dann ergeben sich die Ausdrücke:

$$\text{III'a)} \quad \left.\begin{aligned} x &= \quad (R-r)\cos\omega - r\cos\frac{R-r}{r}\omega \\ y &= -(R-r)\sin\omega - r\sin\frac{R-r}{r}\omega \end{aligned}\right\}$$

welche erkennen lassen, dass wir eine Hypocykloide vorliegen haben, die durch Wälzung eines Kreises vom Radius $r$ auf einem Kreise vom Radius $R$ entstehen kann [1]). — Dass das Resultat einer analogen Substitution für den Fall $p < q$ wieder Gleichungen einer Hypocykloide gibt, ist vorauszusehen; wir brauchen wol auf das Nähere nicht mehr eingehen.

Interessant wäre es zu erfahren, ob nicht unter Umständen die Enveloppe der $FP$ mit der verallg. neg. Fusspunktcurve zur Coincidenz kommt. Um hierüber Aufschluss zu bekommen, müssen wir die Werte für $\xi$ heranziehen. Es wird dies offenbar dann eintreten, wenn die Gleichung

$$\bar{\varphi} + \xi = 2m\pi$$

erfüllt ist, unter $\bar{\varphi}$ den Winkel $\bar{F}OX$ verstanden, unter $\bar{F}$ einen Punkt der mit dem ihm entsprechenden $\bar{P}$ in $X'$ zusammenfällt, und endlich unter $m$ eine ganze Zahl. — Die dies bezüglichen Untersuchungen müssen für die durch die vier Fig. 3 veranschaulichten Fälle für die ersten zwei für jeden separat und können für die übrigen zwei für beide zugleich durchgeführt werden.

(Fig. 3a). In dem Falle findet zwischen $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ (W. $\bar{P}OX$) die Beziehung statt:

$$\bar{\psi} = \bar{\varphi} + 2n\pi$$

($n$ ganz), woraus folgt, da

$$\bar{\psi} = \frac{1}{k}\bar{\varphi} \quad \text{ist:}$$

---

1) Wir hätten auch setzen können:

$$\frac{q}{p-q}\varrho = R-r', \quad \frac{p}{p-q}\varrho = r', \quad p\vartheta = \omega', \quad q\vartheta = \frac{R-r'}{r'}\omega'$$
$$(2r'-R = \varrho)$$

und würden dann allerdings ein anderes Gleichungssystem III'a) bekommen haben, Dasselbe hätte aber nichtsdestoweniger dieselbe Hypocykloide definirt, da ja $r + r' = R$ ist.

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{1-k}\pi$$

Dieser Wert, sowie der für $\xi$

$$\xi = \frac{1-2k}{1-k}\pi$$

eingeführt in

$$\bar{\varphi} + \xi = 2m\pi$$

gibt:

$$\frac{2nk}{1-k}\pi + \frac{1-2k}{1-k}\pi = 2n\pi$$

hieraus:

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-1}{2(m+n-1)} = \frac{r}{R+r}$$

eine Grösse, die tatsächlich für ganzzahlige $m$ und $n$ stets kleiner als 1 bleibt. Man sieht, dass das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich dem einer kleineren ungeraden zu einer grösseren geraden Zahl sein muss, und dass ferner, da man findet

$$\frac{r}{R} = \frac{2m+1}{2n-1}$$

das Verhältniss des Radius des rollenden Kreises zum Radius des Grundkreises der entsprechenden Epicykloide gleich dem zweier ungerader Zahlen ist. (Beispiel: $p = 1$, $q = 2$; $m = 1$, $n = 1$, $\xi = 0$; Kardioide).

(Fig. 3b). Hier ist

$$\bar{\varphi} = \bar{\psi} + 2n\pi$$

also

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{k-1}\pi$$

und

$$\bar{\varphi} + \xi = \frac{2nk}{k-1}\pi + \frac{2k-3}{k-1}\pi = 2m\pi$$

woraus folgt

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-3}{2(m-n-1)} = \frac{R+r}{r}$$

welcher Ausdruck auch keinen Widerspruch birgt, daher kann in dem Falle die fragliche Coincidenz gleichfalls stattfinden, und zwar geschieht dies dann, wenn das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich ist dem einer grösseren ungeraden zu einer kleineren geraden Zahl, und die Epicykloiden die hier auftreten sind dadurch charakterisirt, dass das Verhältniss des Radius des rollenden zu dem des festen Kreises

gleich sein muss dem einer geraden zu einer ungeraden Zahl, denn man bekommt

$$\frac{r}{R} = \frac{2(m-n-1)}{2n-1}$$

(Fig. 3c, 3d). Man hat in diesen beiden Fällen:

$$\bar{\varphi} + \bar{\psi} = 2n\pi$$

demnach resultirt für $\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi} = \frac{2nk}{k+1}\pi$$

und somit wird:

$$\bar{\varphi} + \xi = \frac{2nk}{k+1}\pi + \frac{1}{k+1}\pi = 2m\pi$$

und

$$k = \frac{p}{q} = \frac{2m-1}{2(n-m)} = \frac{R-r}{r} = \frac{r'}{R-r'}$$

ein Ausdruck, welcher sowol grössere, wie auch kleinere Werte als 1 annehmen kann. Es ist also die Coincidenz in beiden Fällen möglich und zwar dann, wenn das Verhältniss $\frac{p}{q}$ gleich kommt dem Verhältniss einer ungeraden zu einer geraden Zahl. Bezüglich der Art der Hypocykloiden ist hier auch eine Beschränkung zu verzeichnen, denn man findet:

$$\frac{r}{R} = \frac{2(n-m)}{2n-1}, \quad \frac{r'}{R} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

mithin sind diejenigen ausgeschlossen, bei welchen das Verhältniss des Radius des rollenden zum Radius des stabilen Kreises gleich kommt dem einer ungeraden zu einer geraden Zahl, was übrigens schon aus dem Ausdruck für $\frac{p}{q}$ ersichtlich ist.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen berücksichtigend, können wir ungezwungen zu folgenden beiden, die hier aufgetretenen, speciellen Cykloiden betreffenden Sätzen gelangen:

„Ein Teil des geometr. Ortes aller Schnittpunkte von zu einander senkrechten Tangenten an eine dieser Cykloiden ist deren In- bez. Umkreis“.

„Jede dieser Epi- oder Hypocykloiden ist die Enveloppe von mit ihr concentr. Ellipsen oder Hyperbeln, deren Hauptaxe constant = dem Durchmesser des Um- oder Inkreises derselben und deren ein Brennpunkt die Cykloide durchläuft“.

Hiermit wollen wir mit dem sehr dankbaren Fall b) abschliessen und nur noch kurz eines weiteren gedenken:

c) Bahncurve $B$ und Directrix $D$ sind ähnliche ein- oder mehrfach schief-symmetrische Curven (klinogr. oder axonometr. Projectionen orthogonal symmetr. Curven). $F$ und $P$ sind zugeordnete Punkte, wenn der bezüglich einer bestimmten Symmetrale symmetrisch zu $F$ gelegene Punkt $F'$ dem Punkt $P$ homolog ist. Für das Verhältniss

$$\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dm'} \cdot \frac{dm'}{ds}$$

wo $dm'$ das Bogenelement bei $F'$ bedeutet, erhalten wir

$$\frac{dm}{ds} = \frac{FT}{F'T} \cdot k$$

wenn wir mit $T$ den auf der entsprechenden Symmetrale gelegenen Schnittpunkt der Tangenten in $F$ und $F'$ an die $B$ bezeichnen und unter $k$ das Verhältniss homologer Sehnen der $B$ und $D$ verstehen wollen. Um alle Fälle zu erschöpfen, müssen wir die Zuordnung aber noch allgemeiner gestalten. Wir müssen nämlich zwei Symmetralen $s_1$, $s_2$ herausgreifen und zu einem angenommenen Punkt $F$ den bezüglich $s_1$ symmetrischen $F_1$ und zu diesem den bezüglich $s_2$ symmetrischen $F_2$ ermitteln. Zuletzt zu $F_2$ den homologen Punkt $P$ der $D$. Wenn wir dann bezeichnen mit $T$, $T_1$ die beziehungsweise auf $s_1$, $s_2$ gelegenen Schnittpunkte der Tangenten in $F$ und $F_1$, $F_1$ und $F_2$, so haben wir für $\frac{dm}{ds}$:

$$\frac{dm}{ds} = \frac{dm}{dm_1} \cdot \frac{dm_1}{dm_2} \cdot \frac{dm_2}{ds} = \frac{F\,T}{F_1T} \cdot \frac{F_1T_1}{F_2T_1} \cdot k$$

unter $dm_1$, $dm_2$, die Bogenelemente in $F_1$, $F_2$ verstanden und unter $k$ dasselbe wie oben.

Auch hier wird der Fall besonders hervorzuheben sein, dass $k = 1$ ist, die Curven $B$ und $D$ mithin congruent sind, in welchem Falle man noch weiter specialisiren kann, indem man dieselben zusammenfallen lässt. In's Detail gehen wir, des geringen Interesses dieser Curven wegen, aber nicht mehr ein.

Wien, im Januar 1889.

---

VII.

# Zur sphärischen Schleifenlinie.

Von

**Eduard Janisch.**

---

Herr Professor Schiffner hat im 5. Teil der zweiten Reihe dieses Archivs interessante Untersuchungen mitgeteilt über eine Curve — die sphärische Schleifenlinie — , welche mich auch bereits vor längerer Zeit beschäftigte. Ich fand diese Curve ursprünglich als Ort aller jener Punkte der (kugelförmigen) Erdoberfläche, deren geographische Länge gleich ist der geographischen Breite, oder allgemeiner, deren geographische Länge um eine constante Grösse von der geographischen Breite differirt.

Bezüglich der Curve selbst können wir nicht viel mehr bemerken, wol aber werden wir im Folgenden uns eingehender mit geometr. Gebilden beschäftigen, welche mit dieser Schleifenlinie in gewisser Beziehung stehen.

Wählen wir die Erdachse zur $z$-Achse, die Ebene des Aequators zur $xy$-Ebene und die Ebene des Anfangsmeridians zur $xz$-Ebene, dann müssen wir einem Punkte $P$, dessen geogr. Länge $\lambda =$ der geogr. Breite $\varphi$ ($\lambda = \varphi = u$) ist, die Coordinaten zuweisen:

$$x = r\cos^2 u, \qquad y = r\sin u\cos u, \qquad z = r\sin u$$

wo $r$ den Erdradius bedeutet. — In der citirten Abhandlung des Herrn Prof. Schiffner ist nun unter anderem gezeigt, dass die stereogr. Projection der Schleifenlinie aus deren reellem Doppelpunkte ($x = r$, $y = 0$, $z = 0$) eine gleichseitige Hyperbel mit der Achse $2r$

wird. Hieran anknüpfend erwähnen wir, dass auch noch für die Projectionscentra ($x = 0$, $y = 0$, $z = \pm r$), ($x = -r$, $y = 0$, $z = 0$) bekannte Curven als Projectionen auftreten.

Leiten wir zunächst die Gleichung der Projection aus dem Centrum ($x = -r$, $y = 0$, $z = 0$) ab. Wir finden als Gleichungen der Verbindungslinie eines Curvenpunktes $P$ mit diesem Centrum:

$$\eta = \frac{\sin u \cos u}{1 + \cos^2 u}(\xi + r), \quad \zeta = \frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}(\xi + r), \quad \eta = \zeta \cos u$$

Also sind für die Coordinaten des Schnittpunktes $\pi$ derselben mit der $yz$-Ebene zu setzen:

$$\xi = 0, \quad \eta = r\frac{\sin u \cos u}{1 + \cos^2 u}, \quad \zeta = r\frac{\sin u}{1 + \cos^2 u}$$

und mithin werden wir die Gleichung des Ortes der $\Pi$, das ist die der gesuchten Projection der Schleifenlinie, erhalten durch Elimination von $u$ aus:

$$\frac{\eta}{\xi} = \cos u, \quad \eta^2 + \zeta^2 = r^2\frac{\sin^2 u}{1 + \cos^2 u}$$

Wir finden leicht:

$$(\zeta^2 + \eta^2)^2 = r^2(\zeta^2 - \eta^2)$$

die Gleichung einer Lemniskate des Bernoulli

Für ($x = 0$, $y = 0$, $z = \pm r$) als Projectionscentrum bekommen wir dagegen eine Strophoide. Wir haben in dem Falle als Gleichungen der Verbindungslinie des Projectionscentrums mit einem Curvenpunkte anzusetzen:

$$\xi = \frac{\cos^2 u}{\sin u \mp 1}(\zeta \mp r), \quad \eta = \frac{\sin u \cos u}{\sin u \mp 1}(\zeta \mp r), \quad \xi = \eta \cot u$$

und als Coordinaten des Schnittpunktes $\Pi$ desselben mit der $xy$-Ebene:

$$\xi = \mp r\frac{\cos^2 u}{\sin u \mp 1}, \quad \eta = \mp r\frac{\sin u \cos u}{\sin u \mp 1}, \quad \zeta = 0$$

Für $\xi$ kann auch geschrieben werden:

$$\xi = \pm r(\sin u \pm 1) = r(1 \pm \sin u)$$

Hieraus folgt für $\sin u$:

$$\sin u = \pm\frac{\xi - r}{r}$$

Mit Berücksichtigung dieses Wertes und der Beziehung $\xi = \eta \cot u$ resultirt dann für $\cos u$:

$$\cos u = \pm \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{\xi - r}{r}$$

und wir erhalten endlich durch Substitution in $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$$(\xi - r)^2 (\xi^2 + \eta^2) = r^2 \eta^2$$

oder entwickelt:

$$(\xi^2 - 2r\xi)(\xi^2 + \eta^2) + r^2 \xi^2 = 0$$

Hierin den Factor $\xi$ unterdrückt und $\eta^2$ isolirt gibt:

$$\eta^2 = \frac{\xi (r - \xi)^2}{2r - \xi}$$

die Gleichung einer Strophoide, deren Doppelpunkt die Coordinaten ($\xi = r$, $\eta = 0$) und deren Asymptote die Gleichung $\xi = 2r$ hat [1]).

Soviel wollten wir noch bezüglich der Schleifenlinie selbst bemerken. — Was nun des weiteren folgen wird, betrifft einfache Schnitt- und Durchdringungscurven 1) jenes Kegels $K$, der die Schleifenlinie enthält und seine Spitze im Anfangspunkt der Coordinaten hat, und 2) jener geraden Konoide, die eine der Coordinatenachsen zu Achsen haben, und auf deren Oberfläche diese Curve ebenfalls zu liegen kommt.

Gemäss der Definition des Kegels $K$ können wir eine beliebige Erzeugende desselben darstellen durch die Gleichungen:

$$\eta = \xi . \operatorname{tg} u, \qquad \eta = \zeta . \cos u$$

Hieraus folgt sogleich:

$$\sin u = \frac{\eta^2}{\xi \zeta}$$

und wir haben daher:

---

1) Mit Hilfe einer Karte der Planiglobien, die sich in jedem Atlas vorfindet, kann man sich dieses, wie das vorhergehende Resultat leicht veranschaulichen. Verbinden wir nämlich beispielsweise (auf der Hauptkarte) die Punkte, deren geogr. Coordinaten sind: (90° w. L., 0° Br.), 100° w. L., 10 n. Br.), . . . (170° w. L., 80° n. Br.), (180° w. L., 90° n, Br.), (10° w. L., 80° n. Br.), . . . (80° w. L, 10° Br.), (90° w. L., 0° Br.), (100° w. L., 10° s. Br.), . . . etc., so erhalten wir eine Lemniskate. — Verbinden wir aber von diesen Punkten, etwa die auf der nördl. Halbkugel gelegenen, in dem einen Nebenkärtchen, welches eben diese Erdhälfte in stereogr. Polarprojection dargestellt, so ergibt sich die Schleife einer Strophoide.

$$\sin^2 u + \cos^2 u = \frac{\eta^4}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} = 1$$

als Gleichung dieses Kegels. Selbe gibt geordnet:

$$\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \xi^2 \zeta^2 \quad \text{oder} \quad \eta^4 = \xi^2(\zeta^2 - \eta^2)$$

Setzen wir hierin $\zeta = \delta$, so erhalten wir:

$$\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \delta^2 \xi^2$$

die Gleichung eines in der Höhe $\zeta = \delta$ zur $xy$-Ebene parallel geführten Schnittes. Durch Einführung der Polarcoordinaten $\varrho$, $\varphi$ mittels der Relationen $\xi = \varrho \cos\varphi$, $\eta = \varrho \sin\varphi$ nimmt jene Gleichung die einfache Gestalt an:

$$\zeta = \pm\, \delta \cos\varphi$$

welche eine leichte Construction einzelner Punkte der Curve an die Hand gibt. — Für $\varphi = 0$ wird $\varrho = \infty$ und $\eta = \varrho \sin\varphi = \pm\delta$, so dass die Geraden $\eta = \pm\delta$ Asymptoten der Curve sind.

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ wird $\varrho$ gerade $= \pm\delta$ und endlich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich:

$$\varrho = 0$$

was besagt, dass die Curve im Ursprung (der ein Doppelpunkt ist) die Ordinatenaxe berührt. Wir fanden, dass diese Curve identisch ist mit der Subtangenten-Ordinaten-Curve des Kreises $x^2 + y^2 = \delta^2$. Ist nämlich $\xi = t'(\text{Subtang.}) = \frac{y^2}{x}$ und $\eta = y$ ($x$, $y$ ein Punkt des Kreises), so ergibt sich zunächst:

$$x = \frac{\eta^2}{\xi}$$

und nach Substitution dieses Wertes für $x$ und des für $y (= \eta)$ in $x^2 + y^2 = \delta^2$:

$$\frac{\eta^4}{\xi^2} + \eta^2 = \delta^2 \quad \text{oder} \quad \eta^2(\xi^2 + \eta^2) = \delta^2 \xi^2$$

als Gleichung der Subtangenten-Ordinatencurve des obigen Kreises, welche Gleichung übereinstimmt mit der für den Schnitt unseres Kegels.

Führen wir in der Gleichung:

$$\eta^4 = \xi^2(\zeta^2 - \eta^2)$$

ein $\eta = \delta$, so erhalten wir:

$$\delta^4 = \xi^2(\zeta^2 - \delta^2)$$

als analyt. Aequivalent des Schnittes einer in der Entfernung $\eta = \delta$ zur $xz$-Ebene parallel gelegten Ebene. Diese Schnittcurve hat zu Asymptoten: Die Achse der $\zeta$ und die beiden Geraden $\zeta = \pm\,\delta$. Sie passirt die Achse der $\xi$ nicht, folglich besteht sie aus vier zu den Coordinatenachsen symmetrisch gelegenen, getrennten Aesten, deren jeder diesen Achsen die convexe Seite zukehrt. — Suchen wir diejenigen Punkte, in welchen die Tangenten an die Curve unter $\frac{\pi}{4}$ gegen die $O_x$ geneigt sind. Verbinden wir zu dem Zwecke ihre Gleichung mit der eines Kreises um $O$ mit dem Radius $\varrho$, so haben wir nach Elimination von $\zeta$ aus den beiden so sich bietenden Gleichungen:

$$\delta^4 = \xi^2(\varrho^2 - \xi^2 - \delta^2) \quad \text{oder} \quad \xi^4 - (\varrho^2 - \delta^2)\xi^2 = -\,\delta^4$$

woraus wir für die Abscissen der diesen zwei Curven gemeinsamen Punkte gewinnen:

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{\varrho^2 - \delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \delta^2)^2}{4} - \delta^4}}$$

Ist

$$\frac{(\varrho^2 - \delta^2)^2}{4} - \delta^4 = 0$$

also

$$\varrho = \delta\sqrt{3}$$

dann berührt der Kreis unsere Curve in den vier symmetrisch gelegenen Punkten, in welchen die Tangenten die verlangte Eigenschaft haben, und wir bekommen für deren Abscissen:

$$\xi = \pm\,\delta$$

und für die Applicaten:

$$\zeta = \pm,\ \mp\,\delta\sqrt{2}$$

Untersuchen wir endlich noch die Schnittcurve einer zur $yz$-Ebene in der Entfernung $\xi = \delta$ parallel gelegten Ebene. Diese Curve bekommt die Gleichung:

$$\eta^2(\delta^2 + \eta^2) = \delta^2\zeta^2$$

Derselben kann vor allem entnommen werden, dass die Curve durch den Ursprung zweimal hindurchgeht. Um die Richtungen der beiden Tangenten in diesem Doppelpunkte zu erfahren, substituiren wir $\zeta = A\eta$ und erhalten so:

$$\delta^2 + \eta^2 = \delta^2 A^2$$

d. i. für $\eta = 0$

$$A = \pm\,1$$

Somit sind die beiden Tangenten im Ursprung unter je 45° gegen die Achsen der $\eta$ und $\zeta$ geneigt. Im übrigen bemerkt man noch leicht, dass die Curve überall der Achse der $\eta$ die convexe Seite zuwendet, und dass sie sich ins Unendliche erstreckt ohne Asymptoten zu besitzen.

Nachdem wir jetzt die einfachsten, ebenen Schnitte erledigt haben, möchten wir uns erlauben complicirtere heranzuziehen: nämlich Schnitte projicirender Ebenen, da auch diese Fälle einiges Bemerkenswerte liefern. Und zwar wollen wir da zuerst eine grundrissprojic. Ebene $E$ wählen, die durch den Punkt ($\xi = \delta$, $= 0$, $\zeta = 0$) geht. Dieselbe habe die Gleichung

$$\eta = a(\xi - \delta)$$

Die Projection von deren Schnittcurve mit dem Kegel auf die Ebene $\xi\zeta$ wird dann gegeben sein durch

$$\xi^2\zeta^2 = a^2(\xi - \delta)^2[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] \tag{1}$$

Dieser Gleichung kann sofort entnommen werden, dass selbe Projection im Punkte $\xi = \delta$, $\zeta = 0$ einen Doppelpunkt hat, ferner dass die $\zeta$-Achse Asymptote ist. Differentiiren wir die Gleichung, so erhalten wir:

$$\xi\zeta^2 + \xi^2\zeta\zeta' = a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)^2[\xi + a^2(\xi - \delta)]\}$$

also für $\zeta'$

$$\zeta' = \frac{a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)^2[\xi + a(\xi - \delta)]\} - \xi\zeta^2}{\xi^2\zeta} \tag{2}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn

$$a^2\{(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2) + (\xi - \delta)^2[\xi + a(\xi - \delta)]\} = \xi\zeta^2 \tag{3}$$

Eliminiren wir aus der soeben erhaltenen Bedingungsgleichung und der Curvengleichung $\zeta^2$, dann finden wir

$$(\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] = \xi\{[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)^2] + (\xi - \delta)[\xi^2 + a^2(\xi - \delta)]\}$$

oder nach einiger Reduction

$$a^2(\xi - \delta)^3 = \xi^3 + 2a^2\xi(\xi - \delta)^2$$

$$a^2 = -\frac{\xi^3}{(\xi - \delta)^2(\xi + \delta)} \tag{4}$$

woraus sich endlich ergibt

$$(1 + a^2)\xi^3 - a^2\delta\xi^2 - a^2\delta^2\xi + a^2\delta^3 = 0 \tag{5}$$

eine Gleichung in $\xi$, deren einzige reelle Wurzel die gemeinsame Abscisse des höchsten und tiefsten Punktes unserer Projectionscurve liefert.

Eliminiren wir aus (1) und (4) ... $a^2$ ... so erhalten wir

$$\xi^2 \zeta^2 = -\frac{\xi^3}{\xi+\delta}\left[\xi^2 - \frac{\xi^3}{\xi+\delta}\right]$$

Nach gehöriger Zusammenziehung und Kürzung

$$\zeta^2 = -\frac{\delta \xi^3}{(\delta+\xi)^2} \tag{6}$$

das ist die Gleichung jener Curve, auf der die höchsten und tiefsten Punkte aller jener Curven (1) zu liegen kommen, welche durch Variation von $a$, durch Drehung von $\eta = a(\xi - \delta)$ um $(\xi = \delta,\ \eta = 0)$ zu Stande gebracht werden. Wollen wir erfahren, welche Punkte des Kegels auf die Ebene der $\xi\zeta$ projicirt werden müssen, um die Curve (6) zu erhalten, so können wir hierauf die Antwort auf mehrfache Weise erhalten, am einfachsten dadurch, dass wir in (4) an die Stelle von $a$ setzen $\frac{\eta}{\xi - \delta}$. Es ergibt sich auf die Art

$$\eta^2 = -\frac{\xi^3}{\delta+\xi} \tag{7}$$

eine Bedingung, an welche die Ordinaten und Abscissen jener Kegelpunkte geknüpft sind, — nichts andres als die Gleichung ihres Grundrisses, einer gewöhnlichen Cissoide, deren Spitze im Ursprung liegt, und deren Asymptote die Gerade $\xi = -\delta$ ist. Dieses Ergebniss wird man zweckmässig bei einer graphischen Lösung der Aufgabe: die höchsten und tiefsten Punkte unserer Curve zu suchen — entsprechend verwerten. Wir halten uns dabei nicht auf, sondern gehen gleich daran die Richtung der Tangenten im Doppelpunkte $(\xi = \delta,\ \zeta = 0)$ zu ermitteln. Wir können zu dem Ende nach der bekannten Regel für die Auswertung der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ Zähler und Nenner des Ausdrucks (2) für $\zeta'$ differentiiren und finden so, wenn wir gleich $\xi = \delta$, $\zeta = 0$ einführen:

$$\zeta' = \frac{a^2 \delta^2}{\delta^2 \zeta'}, \quad \zeta'^2 = a^2$$

also

$$\zeta' = \pm a \tag{8}$$

Nun bleibt uns noch die Frage nach den Asymptoten zu erledigen. Wir haben bereits die Achse der $\zeta$ als Asymptote erkannt. Um die übrigen zwei zu bestimmen, die zweifellos vorhanden sind, setzen

wir in der Curvengleichung (1) $\zeta = A\xi$ und bekommen, wenn wir gleich auf der linken und rechten Seite durch $\xi^4$ dividiren

$$A^2 = a^2\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)^2\left[1+a^2\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)^2\right]$$

also für $\xi = \infty$

$$A = a\sqrt{1+a^2} \tag{9}$$

Substituiren wir nun

$$\zeta = \xi a\sqrt{1+a^2}+B$$

so resultirt

$$\xi^2[a^2(1+a^2)\xi^2+2B\xi a\sqrt{1+a^2}+B^2]$$
$$= a^2[\xi^2+\delta(\delta-2\xi)][\xi^2(1+a^2)+a^2\delta(\delta-2\xi)]$$

Dies ausmultiplicirt gibt:

$$2B\xi^3 a\sqrt{1+a^2}+B^2\xi^2$$
$$= a^2\delta[\xi^2(1+a^2)(\delta-2\xi)+a^2\xi^2(\delta-2\xi)+a^2\delta(\delta-2\xi)]$$

und wenn wir uns durch $\xi^3$ hierin durchgehends dividirt denken und und hernach $\xi = \infty$ eingeführt voraussetzen, dann hat man

$$2Ba\sqrt{1+a^2} = -2a^2\delta(1+2a^2)$$

also

$$B = -\frac{a(1+2a^2)}{\sqrt{1+a^2}}\delta \tag{10}$$

so dass die beiden Asymptoten die Gleichung haben

$$\zeta = \pm a\sqrt{1+a^2}\left[\xi-\frac{1+2a^2}{1+a^2}\delta\right] \tag{11}$$

Die Construction derselben kann auf folgende Weise vorgenommen werden: Man lege durch die Spitze des Kegels $K$ eine Ebene $\varepsilon$ parallel zu unserer Schnittebene $E$; bestimme, die in $\varepsilon$ gelegenen Erzeugenden $k_1$, $k_2$ und die längs derselben tangirenden Ebenen $\tau_1$, $\tau_2$ mit Hilfe der Schleifenlinie Die Schnittlinien von $\tau_1$, $\tau_2$ mit $E$ geben dann bekanntlich projicirt die gesuchten Asymptoten. — Sollte der freundliche Leser versuchen die Curve darzustellen, so möge er $\delta = 2$ bis 3 cm annehmen und $a = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(a = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$. In dem speciellen Falle ist der aus Gleichung (5) sich ergebende Wert für $\xi = \frac{\delta}{2}$ und die zugehörigen $\zeta = \pm\delta\sqrt{3}$. Ferner wird die Gleichung der Asymptoten

$$\zeta = \pm\tfrac{2}{3}(\xi-\tfrac{5}{4}\delta)$$

Aus der Figur dieser Curve wird ersichtlich sein, dass zu einem ausgiebigen posit. Werte von $\xi$ zwei zur $\xi\xi'$ symmetr. Wendepunkte gehören, was nicht nur für $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$, sondern allgemein gilt. Da die Bestimmung derselben aber auf eine zu weitläufige Rechnung führt, so glauben wir hiervon absehen zu dürfen.

Wir gehen dader gleich über zur Untersuchung des Schnittes einer aufrissprojicirenden Ebene $E$ mit der Gleichung $\zeta = a(\xi - \delta)$. Die Gleichung von dessen Grundriss wird sein

$$a^2\xi^2(\xi - \delta)^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2) \tag{1}$$

Derselben entnimmt man, dass diese Projectionscurve den Ursprung und ebenso den Punkt ($\xi = \delta$, $\eta = 0$) zu Doppelpunkten hat, und ferner auch noch, dass die $\eta$-Achse die Tangente im ersteren Doppelpunkt ist, so dass in diesem Punkte zwei Aeste der Curve sich berühren. Um die Richtung der beiden Tangenten im zweiten Doppelpunkt zu erfahren, können wir wie folgt vorgehen. Wir setzen in (1) $\eta = A(\xi - \delta)$ und bekommen nach Unterdrückung von $(\xi - \delta)^2$

$$a^2\xi^2 = A^2[\xi^2 + A^2(\xi - \delta)^2] \tag{2}$$

eine Gleichung, welche durch die Abscissen $\xi_{1,2}$ der beiden noch übrigen Schnittpunkte der Geraden $y - A(\xi - \delta)$ mit der Curve (1) erfüllt wird. Soll aber diese Gerade in ($\xi = \delta$, $\eta = 0$) tangiren, dann muss Gleichung (2) für $\xi = \delta$ bestehen, was nur sein kann, wenn $A = \pm a$ ist. Mithin sind die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte gegeben durch

$$\eta = \pm a(\xi - \delta) \tag{3}$$

Differentiiren wir (1) nach $\xi$, so erhalten wir

$$a^2[\xi(\xi - \delta)^2 + \xi^2(\xi - \delta)] = \eta\eta'(\xi^2 + \eta^2) + \eta^2(\xi + \eta\eta')$$

und hieraus

$$\eta' = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{a^2(\xi - \delta)(2\xi - \delta) - \eta^2}{\xi^2 + 2\eta^2} \tag{4}$$

$\eta'$ verschwindet, wenn

$$\eta^2 = a^2(\xi - \delta)(2\xi - \delta)$$

ist. Setzen wir diesen Wert für $\eta^2$ in (1) ein, so ergibt sich eine Gleichung in $\xi$, deren einzige, reelle, zwischen 0 und $+\frac{\delta}{2}$ gelegene Wurzel die Abscisse des höchsten und tiefsten Punktes liefert. Selbe Gleichung lautet:

$$a^2\xi^2(\xi-\delta)^2 = a^2(\xi-\delta)(2\xi-\delta)[\xi^2+a^2(\xi-\delta)(2\xi-\delta)]$$

nach Kürzung:

$$\xi^2(\xi-\delta) = (2\xi-\delta)[\xi^2+a^2(\xi-\delta)(2\xi-\delta)]$$

oder $a^2$ isolirt

$$a^2 = -\frac{\xi^3}{(\xi-\delta)(2\xi-\delta)^2} \tag{5}$$

oder endlich nach fallenden Potenzen von $\xi$ geordnet

$$(1+4a^2)\xi^3-8a^2\delta\xi^2+5a^2\delta^2\xi-a^2\delta^3 = 0 \tag{6}$$

Nehmen wir den Wert von $a^2$ aus (5) und setzen denselben ein in

$$\eta^2 = a^2(\xi-\delta)(2\xi-\delta)$$

so resultirt

$$\eta^2 = \frac{\xi^3}{\delta-2\xi} \tag{7}$$

Die Gleichung des Ortes der höchsten und tiefsten Punkte der Grundrissprojectionen aller Schnittcurven, die durch Drehung von $E$ um ($\xi = \delta$, $\zeta = 0$) zu Stande kommen. Dieser Ort ist eine elliptische Cissoide, wie aus folgendem hervorgeht. Es sei die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{(\xi-m)^2}{m^2}+\frac{\eta^2}{n^2} = 1$$

oder

$$\xi^2n^2+\eta^2m^2 = 2\xi mn^2$$

in Polarcoordinaten

$$\varrho(n^2\cos^2\varphi+m^2\sin^2\varphi) = 2mn^2\cos\varphi$$

Ziehen wir durch $O$, den Ursprung, eine beliebige Gerade unter dem Winkel $\varphi$ gegen die Polarachse geneigt, welche die Ellipse zum zweiten Mal in $P$ und die Gerade $\xi = 2m$ in $Q$ trifft, so hat der $P$ entsprechende Punkt der elliptischen Cissoide die Polarcoordinaten

$$\varphi \text{ und } \sigma = \overline{OQ}-\overline{OP} = \frac{2m}{\cos\varphi}-\varrho$$

Die Polargleichung dieser Cissoide wird sich demgemäss aus der für die Ellipse ergeben, wenn wir hierin einführen

$$\varrho = \frac{2m}{\cos\varphi}-\sigma$$

wodurch wir erhalten:

$$(2m-\sigma\cos\varphi)(n^2\cos^2\varphi+m^2\sin^2\varphi) = 2mn^2\cos^2\varphi$$

Durch Wiedereinführung der cartes. Coordinaten resultirt:

$$(2m-\xi)(n^2\xi^2+m^2\eta^2)=2mn^2\xi^2$$

oder nach Isolirung von $\eta^2$:

$$\eta^2=\frac{\xi^3}{\frac{m^2}{n^2}(2m-\xi)} \tag{8}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (7), so finden wir, dass sie mit derselben identisch wird, wenn

$$\frac{2m^3}{n^2}=\delta \quad \text{und} \quad \frac{m^2}{n^2}=2$$

also

$$m=\frac{\delta}{4}, \quad n=\frac{\delta}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist. Aus diesen Resultaten ersehen wir, dass unsere Curve tatsächlich eine Cissoide ist, und zwar die einer Ellipse, bei welcher die kleine Achse gleiche Grösse mit der Excentricität hat. —

Um die Asymptoten der Curve (1) zu erhalten, setzen wir in deren Gleichung

$$\eta=A\xi$$

dividiren beiderseits durch $\xi^4$ und bekommen

$$a^2\left(1-\frac{\delta}{\xi}\right)^2=A^2(1+A^2)$$

also für $\xi=\infty$

$$a^2=A^4+A^2$$

woraus sich ergibt [1])

---

1) Wählen wir für $a$ der Reihe nach Werte, welche bewirken, dass

$$\sqrt{1+4a^2}=3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

wird, so ergibt sich folgendes Schema

$$\begin{array}{llll}
\sqrt{1+4a_1^2}=3; & a_1=\sqrt{2}; & A_1=\sqrt{1} & -a_1=A_1A_2 \\
\sqrt{1+4a_2^2}=5; & a_2=\sqrt{6}; & A_2=\sqrt{2} & -a_2=A_2A_3 \\
\sqrt{1+4a_3^2}=7; & a_3=\sqrt{12}; & A_3=\sqrt{3} & -a_3=A_3A_4 \\
\sqrt{1+4a_5^2}=9; & a_5=\sqrt{20}; & A_4=\sqrt{4} & -a_4=A_4A_5
\end{array}$$

etc.

Man ersieht hieraus, dass, wenn $a$ die Quadratwurzel aus einer Barlong'schen Zahl ist, $A=$ der Quadratwurzel aus dem entsprechenden Gliede der natürlichen Zahlenreihe wird.

$$(a=\sqrt{n(n+1)}, \quad A=\sqrt{n})$$

$$A = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} \tag{9}$$

Führen wir nun in (1) ein

$$\eta = \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + B$$

dann haben wir:

$$a^2\xi^2(\xi-\delta)^2 = [\tfrac{1}{2}\xi^2(-1+\sqrt{1+4a^2}) + 2B\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + B^2]\,[\tfrac{1}{2}\xi^2(1+\sqrt{1+4a^2}) + 2B\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + B^2]$$

Dies teilweise ausmultiplicirt liefert:

$$-2a^2\xi^3\delta + a^2\xi^2\delta^2 = [2B\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + B^2]\xi^2\sqrt{1+4a^2}$$

nach Division mit $\xi^3$:

$$-2a^2\delta + a^2\frac{\delta^2}{\xi} = B[2\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})} + \frac{B}{\xi}]\sqrt{1+4a^2}$$

woraus für $\xi = \infty$ gefunden wird:

$$B = -\frac{a^2}{\sqrt{1+4a^2}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})}}\,\delta \tag{10}$$

Mithin haben die beiden Asymptoten die Gleichung

$$\eta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+4a^2})}\left[\xi - \delta\,\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{\sqrt{1+4a^2}}\right] \tag{11}$$

Aus dieser ersehen wir, dass der (natürlich in die Abscissenachse fallende) Schnitt derselben stets zwischen die Punkte $\left(\xi = \frac{\delta}{2}, \eta=0\right)$ und $(\xi = \delta, \eta = 0)$ zu liegen kommt, also in die zweite Hälfte der Strecke von $\xi = 0$ bis $\xi = \delta$, während, wie wir schon früher bemerkten (was erst aus Gl. (7) hervorgeht) die Projection der höchsten und tiefsten Punkte auf die Achse der $\xi$ im Gegensatze hierzu stets in der ersten Hälfte, zwischen den Punkten $(\xi = 0, \eta = 0)$, $\left(\xi = \frac{\delta}{2}, \eta = 0\right)$ enthalten ist.

Das bisher Gesagte genügt, um uns von der Gestalt der Curve eine richtige Vorstellung zu bilden. Es gilt diesbezüglich folgendes: 1) Die Punkte für die negat. $\xi$ gehören einem Aste derselben an, der überall der Abscissenachse die hohle Seite zukehrt, ferner 2) Es formiren die Curvenpunkte für die $\xi$ von $\xi = 0$ bis $\xi = \delta$ eine Schlinge und dann endlich 3) Es wendet die Curve in ihrem

weiteren Verlaufe anfangs der Abscissenachse die gewölbte und später bis ins Unendliche wieder die hohle Seite zu, so dass in dem letzteren Bezirke zwei, selbstverständlich bezüglich der Achse der $\xi$ symmetrisch gelegene Inflexionspunkte auftreten müssen. Die Berechnung derselben, die auf erhebliche Weitläufigkeiten führt, sei uns erlassen.

Wir gelangen nun zur Untersuchung der Schnittcurve einer kreuzrissprojicirenden Ebene: $\zeta = a(\eta - \delta)$. Die Gleichung der Projection derselben auf die Ebene der $\xi$, $\eta$ lautet

$$a^2 \xi^2 (\eta - \delta)^2 = \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) \tag{1}$$

Diese Curve enthält den Ursprung als Doppelpunkt und berührt in in demselben sich selbst längs der Ordinatenachse; denn setzt man in (1) $\eta = A\xi$, so findet man:

$$A^2 \xi^2 (1 + A^2) = a^2 (A\xi - \delta)^2$$

welcher Ausdruck für $\xi = 0$ nur für $A = \infty$ bestehen kann. — Isoliren wir in Gl. (1) $\xi^2$, dann ergibt sich:

$$\xi^2 = \frac{\eta^4}{a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2} \tag{1'}$$

eine zweite Form der Gleichung der Projectionscurve, aus der zu ersehen ist, dass diese Curve zwei zur $\xi$-Achse parallele Asymptoten besitzt, deren Gleichungen sind:

$$\eta = \frac{a}{a - 1}\delta, \quad \eta = \frac{a}{a + 1}\delta \tag{2}$$

Man bemerkt leicht, dass dieselben zu beiden Seiten der Abscissenachse zu liegen kommen, wenn (ohne Rücksicht auf das Zeichen) $a < 1$ ist, während im Gegenfalle ($a > 1$) beide auf derselben Seite sich vorfinden. Endlich coincidirt für die ganz specielle Annahme $a = \pm 1$ die eine mit der unendlich weiten Geraden und die andre erhält die Gleichung $\eta = \frac{1}{2}\delta$. — Untersuchen wir nun, ob es nicht auch schiefgerichtete Asymptoten gibt. Setzen wir zu dem Ende in (1') $\xi = A\eta$. Wir erhalten dann:

$$A^2 = \frac{1}{a^2\left(1 - \frac{\delta}{\eta}\right)^2 - 1}$$

woraus für $\eta = \infty$ hervorgeht:

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \tag{3}$$

Hierauf gesetzt

$$\xi = \frac{\eta}{\sqrt{a^2-1}} + B$$

gibt:

$$\frac{\eta^2}{a^2-1} + \frac{2B\eta}{\sqrt{a^2-1}} + B^2 = \frac{\eta^4}{a^2(\eta-\delta)^2-\eta^2}$$

nach Wegschaffung der Brüche

$$(\eta^2+2B\eta\sqrt{a^2-1}+B^2)[(a^2-1)\eta^2-2a^2\delta\eta+a^2\delta^2] = \eta^4(a^2-1)$$

Dies zum Teile reducirt, gibt weiters:

$$B[2\eta\sqrt{a^2-1}+B][(a^2-1)\eta^2-2a^2\delta\eta+a^2\delta^2]-a^2\delta\eta^2(2\eta-\delta)=0$$

und hieraus folgt endlich, wenn durch $\eta^3$ dividirt und hernach $\eta=\infty$ eingeführt wird:

$$B = \frac{a^2}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}\delta \tag{4}$$

Somit haben die beiden noch übrigen Asymptoten die Gleichung

$$\xi = \frac{\eta}{\pm\sqrt{a^2-1}} + \frac{a^2\delta}{\pm\sqrt{(a^2-1)^3}} \tag{5}$$

oder auf eine andre Form gebracht

$$\eta = \pm\xi\sqrt{a^2-1} - \frac{a^2}{a^2-1}\delta \tag{5'}$$

Man sieht, dass dieselben nur dann reell sind, wenn $a^2>1$ vorausgesetzt wird, was auch geometrisch evident ist. Ferner bemerkt man, dass für den Grenzfall $a^2=1$ dieselben mit der unendlich weiten Geraden coincidiren. — Aus all dem, was wir bisher bezüglich der in Betrachtung stehenden Curve gefunden haben, erhellt zur Genüge, dass die absolute Grösse von $a$ deren Gestalt wesentlich beeinflusst. Es wird sich dies noch weiters bestätigen, wenn wir untersuchen, ob nicht ausser dem Ursprung andere Punkte existiren, in welchen die Tangenten parallel zur $\eta$-Achse sind. — Wir bestimmen zu dem Behufe

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \xi'$$

$$\xi\xi' = \frac{2\eta^3[a^2(\eta-\delta)^2-\eta^2]-\eta^4[a^2(\eta-\delta)-\eta]}{[a^2(\eta-\delta)^2-\eta^2]^2}$$

$$= \eta^3\frac{a^2(\eta-\delta)(\eta-2\delta)-\eta^2}{[a^2(\eta-\delta)^2-\eta^2]^2}$$

$$\xi' = \frac{\eta^3}{\xi} \cdot \frac{a^2(\eta - \delta)(\eta - 2\delta) - \eta^2}{[a^2(\eta - \delta)^2 - \eta^2]^2} \tag{6}$$

$\xi'$ wird 0, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt ist:

$$a^2 = \frac{\eta^2}{(\eta - \delta)(\eta - 2\delta)} \tag{7}$$

welche auch geschrieben werden kann:

$$\eta^2(a^2 - 1) - 3a^2\delta\eta + 2a^2\delta^2 = 0 \tag{7'}$$

Diese Gleichung gibt aufgelöst:

$$\eta_{1,2} = \frac{3a^2\delta}{2(a^2-1)} \pm \frac{a\delta}{2(a^2-1)}\sqrt{a^2+8} \tag{8}$$

die Werte der Ordinaten der von uns gesuchten Punkte. Es sind diese beiden Werte positiv und ist der kleinere derselben bereits $> \frac{a\delta}{a+1}$ ($a$ ohne Zeichen zu nehmen), woraus schon hervorgeht, dass für $a^2 < 1$ die zugehörigen $\xi_{1,2}$ imaginär werden, also in dem Falle derlei Punkte nicht bestehen. Das letztere gilt auch für $a^2 = 1$; hingegen ergeben sich, wenn $a^2 > 1$, zwei zur $\eta$-Achse symmetr. für den grösseren der Werte $\eta_{1,2}$, da sich von diesem leicht nachweisen lässt, dass er nicht nur $> \frac{a\delta}{a+1}$, sondern auch $> \frac{a\delta}{a-1}$ ist, während der kleinere unter $\frac{a\delta}{a-1}$ bleibt und daher zu keinem reellen Punkte führen kann [1]). Eine Bestätigung werden diese Ergebnisse

---

1) Die Behauptung, dass der kleinere der Werte $\eta_{1,2}$ in dem gekennzeichneten Falle ($a > 1$) unter $\frac{a\delta}{a-1}$ bleibt, lässt sich auf folgende Art beweisen. Man setze

$$\frac{a\delta}{2(a^2-1)}\left(3a - \sqrt{a^2+8}\right) = \frac{a\delta}{2(a^2-1)}[2(a+1) - \nu] = \frac{a\delta}{a-1} - \nu\frac{a\delta}{2(a^2-1)} = \eta_2$$

dem augenscheinlich kleinerem Werte. Damit diese Annahme besteht, muss offenbar

$$\nu = 2 - a + \sqrt{a^2+8}$$

sein, welcher Wert für $a > 1$ stets positiv ausfällt, und daher ist

$$\eta^2 = \frac{a\delta}{a-1} - \nu\frac{a\delta}{2(a^2-1)}$$

factisch $< \frac{a\delta}{a-1}$. — Auf ähnliche Art lassen sich auch die anderen oben angeführten Tatsachen verificiren.

erfahren, wenn wir wieder den gewissen geometrischen Ort durch Elimination von $a$ aus (1') und (7) bestimmen. Wir finden als Gleichung desselben ohne Schwierigkeit:

$$\xi^2 \delta = \eta^2(\eta - 2\delta) \tag{9}$$

Die hiedurch charakterisirte Curve besitzt nur reelle Punkte für posit. Ordinaten $> 2\delta$; für $\eta = 2\delta$ ergibt sich $\xi = 0$ — ihr Scheitel. welcher demnach vom Ursprung weiter entfernt ist, als der Fusspunkt der einen Asymptote $\eta = \frac{a}{a+1}\delta$ von der Ordinatenachse. — Um diejenige Curve des Kegels kennen zu lernen, deren Grundriss die Gleichung (8) hat, verschaffen wir uns die Gleichung ihres Kreuzrisses. Selbe erhalten wir, wenn wir in (5) für $a \ldots \frac{\xi}{\eta - \delta}$ setzen; sie lautet:

$$\zeta^2 = \frac{\eta^2(\eta - \delta)}{\eta - 2\delta} \tag{10}$$

Die bisherigen Resultate genügen um die sypischen Formen der unserer Betrachtung unterzogenen Curve genau festzustellen. Wir heben Folgendes hervor:

1) Ist $a < 1$, so besteht die Curve aus zwei im Ursprunge längs der Achse der $\eta$ sich berührenden Zweigen, die zwei zur Achse der $\xi$ parallele und zu beiden Seiten derselben gelegene Asymptoten besitzen, wovon diejenige, welche den dritten und zweiten Quadranten durchquert, weiter von dieser Axe absteht, als die andere.

2) $a > 1$. In dem Falle besteht unsere Curve aus vier Aesten, von denen natürlich je zwei bezüglich der Achse der $\eta$ symmetrisch gelegen sind. Sie besitzt vier reelle Asymptoten. Zwei hiervon sind parallel zur Abscissenaxe und durchsetzen beide den ersten und vierten Quadranten, die übrigen sind zu den Axen schief gerichtet. Der gemeinsame Punkt der letzteren liegt auf der negat. $\eta$-Achse. Die beiden ausschliesslich im ersten und vierten Quadranten gelegenen Aeste der Curve haben keinen Contact mit einander. Sie schneiden die Achsen nicht, und von den zur $\xi$-Achse parallelen Asymptoten gehört ihnen die von die von dieser Axe weiter entfernte an. Dagegen haben die zum grössten Teile im zweiten und dritten Quadranten gelegenen Aeste mit den Coordinatenachsen den Ursprung gemein, in welchem sie sich längs der $\eta$-Achse berühren, und haben zur gemeinsamen Asymptote (von den beiden zur $\xi$-Achse parallelen) die derselben näher gelegene.

3) Für den Grenzfall $a = 1$ resultirt endlich eine Curve, welche aus zwei sich gleichfalls im Ursprung längs der Ordinatenachse be-

rührenden Zweigen besteht, die sich einerseits einer im ersten und vierten Quadranten gelegenen zur $\xi$-Achse parallelen Asymptote nähern und andrerseits parabolisch ins Unendliche sich erstrecken [1]).

Einfach gestaltet sich die Quadratur dieser Curven, denn man hat für den zwischen einem Bogen derselben, der Ordinatenachse und zweien zur Abscissenachse parallelen Geraden $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ gelegenen Flächenraum das Integral

$$S = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}}$$

welches mit Hilfe der bekannten Reductionsformeln zurückgeführt werden kann auf das folgende

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}} = (1-a^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\arcsin \frac{(1-a^2)\eta + a^2\delta}{a\delta}\right]_{\eta_1}^{\eta_2}$$

$$= (a^2-1)^{-\frac{1}{2}} \left[\log\text{nat}\left(-\frac{a^2\delta}{\sqrt{a^2-1}} + \eta\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta + (a^2-1)\eta^2}\right)\right]_{\eta_1}^{\eta_2}$$

Man findet nämlich:

---

1) In bemerkenswerter Beziehung steht zu dieser Curve die Neil'sche (semikubische) Parabel. Diese erscheint nämlich als Ort der Halbirungspunkte der durch den Doppelpunkt der ersteren gehenden Sehnen, wie aus nachstehender Rechnung hervorgehen wird. — Es sei die Gl. einer solchen Sehne

$$\xi = m\eta$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der der Curve

$$\xi^2 = \frac{\eta^4}{(\eta-\delta)^2 - \eta^2} = \frac{\eta^4}{\delta(\delta - 2\eta)}$$

so ergibt sich:

$$\eta^2 + 2m^2\delta\eta - m^2\delta^2 = 0$$

woraus zwei Werte $\eta_{1,2}$ für $\eta$ folgen, welche die Ordinaten der Endpunkte jener Sehne sind. Bedeutet $y$ die Ordinate und $x$ die Abscisse des Halbirungspunktes, dann hat man

$$y = \tfrac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = -m^2\delta, \qquad x = my$$

und mithin als Gleichung des Ortes dieser Halbirungspunkte

$$y^3 = -\delta x^2$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(1-a^2)^{-2}\left[\left\{[3a^2\delta - \eta(1-a^2)]\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}\right\}_{\eta_1}^{\eta_2}\right.$$

$$\left. + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{a^2(1+2a^2)\delta^2 . d\eta}{\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}}\right]$$

woraus sich z. B. für $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \frac{a}{1+a}\delta$ $(a < 1)$ ergibt:

$$S_1 = \frac{a^2}{2(1-a^2)^2\sqrt{1-a^2}}\left[(1+2a^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a\right) - 3a\sqrt{1-a^2}\right].\delta^2$$

und für $\eta_1 = -\frac{a}{1-a}\delta$, $\eta_2 = 0$

$$S_2 = \frac{a^2}{2(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}\left[(1+2a^2)\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin a\right) + 3a\sqrt{1-a^2}\right].\delta^2$$

so dass für $2(S_1 + S_2)$, das ist für die ganze von den Asymptoten und der Curve begrenzte (von der Achse der $\eta$ durchschnittene) Fläche resultirt

$$S = 2(S_1 + S_2) = \frac{a^2(1+2a^2)}{(1-a^2)^2\sqrt{1+a^2}}\delta^2\pi$$

Ist $a = 1$, dann erscheint bei Benutzung der obigen Formeln das Integral für die Fläche $S_1$ in unbestimmter Form. In dem Falle könnte man wol die Auswertung nach den Regeln der Differentialrechnung vornehmen, weit einfacher ist aber die directe Behandlung

Man hat, wenn $a = 1$ ist:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{a^2\delta^2 - 2a^2\delta\eta - (1-a^2)\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{\delta - 2\eta}}$$

welches Integral durch die Substitution

$$\delta - 2\eta = \delta\zeta^2$$

übergeht in das folgende:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\eta^2\,d\eta}{\sqrt{\delta-2\eta}}=-\tfrac{1}{4}\delta^2\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2}(1-\zeta^2)^2d\zeta=-\tfrac{1}{4}\delta^2\Big[\zeta-\tfrac{2}{3}\zeta^3+\tfrac{1}{5}\zeta^5\Big]_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

Setzen wir

$$\eta_1=0,\quad \eta_2=\frac{a}{a+1}\quad \delta=\tfrac{1}{2}\delta$$

also

$$\zeta_1=1,\quad \zeta_2=0$$

dann ergibt sich die von der Asymptote, der Curve und der $\eta$-Achse eingeschlossene Fläche $S_1$:

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\delta}\frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{\delta-2\eta}}=\tfrac{1}{4}\delta^2\Big[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big]=\frac{2}{15}\delta^2=\frac{8}{15}\cdot\Big(\frac{\delta}{2}\Big)^2$$

Hiermit wollen wir die Untersuchungen über die ebenen Schnitte des Kegels $\xi^2\zeta^2=\eta^2(\xi^2+\eta^2)$ abschliessen und übergehen zur Betrachtung der Projectionen einiger Durchdringungscurven desselben mit einfachen Flächen zweiter Ordnung. Wir fassen uns dabei sehr kurz und geben blos eine tabellarische Uebersicht, welche der Reihe nach enthalten wird die Projectionsgleichungen der Durchdringungscurven des Kreiscylinders $\xi^2+\eta^2=r^2$, des Rotationsparaboloids $\xi^2+\eta^2=p\zeta$, der parab. Cylinder $\eta^2=-p\zeta$, $\zeta^2=p\eta$ und endlich des hyp. Cylinders $\xi\zeta=a^2$.

$\xi^2+\eta^2=r^2$: $\xi^2\zeta^2=r^2(r^2-\xi^2)$ oder in Parameterdarstellung

$$\xi=r\cos u,\quad \zeta=r\,\mathrm{tg}\,u;\quad \eta^2\zeta^2=r^2(\zeta^2-\eta^2)\quad\text{oder}$$

$$\eta=r\sin u,\quad \zeta=r\sin u\,\mathrm{tg}\,u$$

$\xi^2+\eta^2=p\zeta$: $p^2\eta^2=\xi^2(\xi^2+\eta^2)$; die hierdurch charakterisirte Curve ist identisch mit dem Schnitte der Ebene $\zeta=p$. Die beiden übrigen Projectionen sind Curven dritter Ordnung

$$\xi^2=\frac{p^2\zeta}{p+\zeta},\quad \eta^2=\frac{p\zeta^2}{p+\zeta}$$

$\eta^2=-p\zeta$: Gibt denselben Aufriss wie $\xi^2+\eta^2=p\zeta$

$$\xi^2=\frac{p^2\zeta}{p+\zeta}$$

Der Grundriss hat dagen die Gleichung:

$$\xi^2\eta^2=p^2(\xi^2+\eta^2)$$

$\xi^2 = p\eta^2$: Blos bemerkenswert der Grundriss

$$\xi^2 = \frac{\eta^3}{\eta - \zeta}$$

eine Cissoide.

$\xi\zeta = a^2$: Auch hier nur die Grundrisscurve hervorzuheben, da selbe uns später wieder begegnet, Gleichung:

$$a^4 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2$$

Unserm Programme nach kommen wir nun zu den geraden Konoiden, deren Leitlinie die Schleifenlinie und deren Achse eine der Coordinatenachsen ist und zwar beschränken wir uns auf die, deren Achse die Achse der $\xi$ und $\zeta$ ist.

Eine Erzeugende des ersteren hat die Gleichungen:

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{y}{z} = \cos u, \quad \xi = x = r\cos^2 u$$

somit besteht zwischen den drei Coordinaten eines Punktes desselben die sehr einfache Beziehung:

$$\xi\zeta^2 = r\eta^2$$

Es ist dies Konoid also eine Fläche blos dritter Ordnung, wie man sieht. — Der Schnitt einer zur Grundrissebene parallelen Ebene $\zeta = \delta$ wird eine Parabel:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{r}\xi$$

und der Schnitt einer aufrissparallelen Ebene $\eta = \delta$ wird die Differentialcurve einer Parabel:

$$\xi\zeta^2 = r\delta^2$$

Bemerkenswerte Ergebnisse liefern noch die Schnitte von Ebenen, welche durch die $\eta$- oder $\zeta$-Achse hindurchgehen. So erhält man für $\zeta = m\xi$:

$$\xi^3 = \frac{r\eta^2}{m^2}$$

die Gleichung einer Neil'schen Parabel; für $\eta = m\xi$:

$$\zeta^2 = m^2 r\xi$$

die Gleichung einer gemeinen Parabel.

Von weiterem Interesse dürfte es sein, dass die Durchdringungscurve des Kreiskegels

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$$

mit dem Konoide sich auf die Ebene der $\xi$, $\eta$ als Cissoide des Diokles projicirt, denn man erhält durch Elimination von $\zeta$ aus den Gleichungen des Kegels und des Konoids:

$$\xi(\xi^2+\eta^2) = r\eta^2$$

oder

$$\eta^2 = \frac{\xi^3}{r-\xi}$$

Führt man diesen Wert von $\eta^2$ in die Konoidengleichung ein, so ergibt sich:

$$\zeta^2 = \frac{r\xi^2}{r-\xi}$$

die Gl. des Aufrisses der Durchdringungscurve. — Derlei einfache Projectionsgleichungen, wie die soeben erhaltene, haben auch die Durchdringungen $C_\xi$, $C_\eta$ der Kegel $K_\xi \ldots \xi^2 = \eta^2+\zeta^2$, $K_\eta \ldots \eta^2 = \zeta^2+\xi^2$. Man wird finden:

$$\left.\begin{aligned}\eta^2 &= \frac{\xi^3}{r+\xi}\\ \zeta^2 &= \frac{r\xi^2}{r+\xi}\end{aligned}\right\} C_\xi \qquad \left.\begin{aligned}\eta^2 &= \frac{\xi^3}{\xi-r}\\ \zeta^2 &= \frac{r\xi^2}{\xi-r}\end{aligned}\right\} C_\eta$$

Nun wollen wir die Projectionsgleichungen des Ortes der dem Konoide und dem Rotationsparaboloide $\eta^2+\zeta^2 = p\xi$ gemeinsamen Punkte aufstellen. Wir erhalten

$$\zeta^2(\eta^2+\zeta^2) = rp\eta^2$$

als Gl. des Kreuzrisses einer Curve, die uns hier schon wiederholt begegnet ist; ferner als Gleichungen des Auf- und Grundrisses:

$$\zeta^2 = p\,\frac{r\xi}{r+\xi}, \qquad \eta^2 = \frac{p}{r}\cdot\frac{r\xi^2}{r+\xi}$$

d. s. Gleichungen, welche Curven angehören, die affin sind mit kurz vorher gefundenen.

Zum Beschlusse geben wir eine Tabelle der Projectionen der Durchdringungen parab. und hyperb. Cylinder. In derselben erscheinen zum grossen Teile Parabeln höherer Ordnung, nebstdem auch Differentialcurven solcher Parabeln.

$$\eta^2 = p\xi: \quad \zeta = +\sqrt{rp}, \quad \zeta = -\sqrt{rp}$$

$$\xi^2 = p\eta: \quad \xi^3 = \frac{p^2}{r}\zeta^2, \quad \zeta^4 = \frac{r^2}{p}\eta^3$$

$$\zeta^2 = p\eta: \quad \xi = \frac{p}{r}\eta, \quad \zeta^2 = \frac{p^2}{r}\xi$$

$$\eta^2 = p\zeta: \quad \xi\zeta = rp, \quad \eta^2\xi = rp^2$$

$$\xi^2 = p\zeta: \quad \xi^5 = rp^2\eta^2, \quad \zeta^5 = \frac{r^2}{p}\eta^4$$

$$\zeta^2 = p\xi: \quad \zeta^2 = \frac{p^2}{r}\eta, \quad \xi = \frac{r^2}{p^2}\eta$$

$$\xi\eta = a^2: \quad \xi^3\zeta^2 = a^4 r, \quad \eta^3 = \frac{a^2}{r}\zeta^2$$

$$\eta\zeta = a^2: \quad \eta^4 = \frac{a^4}{r}\xi, \quad \xi\zeta^4 = a^4 r$$

$$\zeta\xi = a^2: \quad \eta^2\zeta = \frac{a^4}{r}, \quad \eta^2 = \frac{a^2}{r}\zeta$$

Wir gelangen jetzt zum $z$-Konoid. Die durch den Punkt $(x, y, z)$ der Schleifenlinie gehende Erzeugende desselben hat die Gleichungen:

$$\zeta = z = r\sin u, \qquad \frac{\eta}{\xi} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg} u$$

Demgemäss wird die Gleichung der Fläche sein:

$$\frac{\zeta^2}{r^2} = \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}$$

oder

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(\xi^2 + \eta^2)$$

Schneiden wir dieses Konoid durch die Ebenen $\xi = \delta$ und $\eta = \delta$, so erhalten wir als Gleichungen der Schnitte:

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(\delta^2 + \eta^2) \quad \text{und} \quad r^2\delta^2 = \zeta^2(\xi^2 + \delta^2)$$

Dieselben gehen für $\delta = r$ über in

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(r^2 + \eta^2) \quad \text{und} \quad r^4 = \zeta^2(\xi^2 + r^2)$$

welche Curven angehören, die als Berührungsgrössenlinien der Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ resp. $x^2 + z^2 = r^2$ erscheinen, und zwar ist die erstere die Tangenten-Ordinaten $(t, z)$ Curve und die letztere, die nebenbei bemerkt identisch ist mit der Aufrissprojection der Durchdringung des Cylinders $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ mit dem Kegel $\xi^2\zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$, ist die Tangenten-Abscissen-Curve, wie aus folgendem hervorgehen wird. Dieses Konoid ist bereits Gegenstand früherer Arbeiten gewesen, welche in der Schlussnote angeführt sind.

1) Wir haben für die Grösse der Tangente $t$ im Punkte $(y, z)$ des Kreises $y^2+z^2=r^2$ den Ausdruck:

$$t = r\frac{z}{y}$$

Setzen wir nun $\eta = t = r\frac{z}{y}$, $\zeta = z$ und eliminiren wir hieraus mit Hilfe von $y^2+z^2=r^2$ $y$ und $z$, so ergibt sich zunächst

$$r^2\frac{\zeta^2}{\eta^2}+\zeta^2 = r^2$$

geordnet $r^2\eta^2 = \zeta^2(r^2+\eta^2)$ übereinstimmend mit der Gleichung der obigen Schnittcurve. Die Bemerkung dieser Identität führt uns auch zur einfachen Parameterdarstellung der Curve. Man bekommt leicht

$$\eta = r\operatorname{tg} u, \qquad \zeta = r\sin u$$

2) Für die Tangente $t$ des Punktes $(x, z)$ am Kreise $x^2+z^2=r^2$ hat man analog

$$t = r\frac{z}{x}$$

Mithin sind die Coordinaten der Tangenten-Abscissen-Curve

$$\xi = t = r\frac{z}{x}, \quad \zeta = x$$

und die Gleichung derselben wird sein:

$$\zeta^2+\left(\frac{\xi\zeta}{r}\right)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \zeta^2(\xi^2+r^2) = r^4$$

Von Interesse sind weiter die Schnitte der Ebenen $\zeta = m\eta$ und $\zeta = m\xi$. — Der der ersteren dieser beiden Ebenen ist eine Ellipse, die sich auf die Grundrissebene als Kreis projicirt:

$$\xi^2+\eta^2 = \left(\frac{r}{m}\right)^2$$

und der der letzteren hat zum Grundriss wieder die wolbekannte Subtangenten-Ordinaten-Curve

$$\left(\frac{r}{m}\right)^2\eta^2 = \xi^2(\xi^2+\eta^2)$$

des Kreises

$$x^2+y^2 = \left(\frac{r}{m}\right)^2$$

Nunmehr führen wir noch einige Durchdringungscurven an. Zu-

nächst die des Kegels $\xi^2+\eta^2=\zeta^2$. Dieselbe hat zur Kreuzriss-projection die beiden Parabeln

$$\zeta^2=\pm r\eta$$

zum Aufriss die Curve

$$\zeta^4=r^2(\zeta^2-\xi^2)$$

d. i., wie man leicht findet, der Kreuzriss der Schleifenlinie und zum Grundriss die beiden Kreise

$$(\xi^2+\eta^2)=\pm r\eta$$

Diese Durchdringungscurve zerfällt also in zwei bezüglich der $\xi\zeta$-Ebene symmetrisch gelegene Raumcurven vierter Ordnung und zwar sind sie mit der als Leitlinie des Konoids fungirenden Schleifenlinie congruent. Bezüglich ihrer Lage ist zu bemerken, dass die beiden Doppelpunkte in den Ursprung fallen, und dass die Längssymmetrie-ebene beider die $\eta\zeta$-Ebene ist. — Von den Projectionen der Durchdringungscurve des Kegels $\eta^2+\zeta^2=\xi^2$ sind hervorzuheben der Grundriss und der Kreuzriss. Ersterer hat die Gleichung

$$\eta^2(r^2+\eta^2)=\xi^4$$

oder in Polarcoordinaten

$$\varrho=\frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{\cos2\vartheta}}$$

und letzterer

$$r^2\eta^2=\zeta^2(2\eta^2+\zeta^2)$$

welche durch die Substitution

$$\eta=\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$$

übergeht in

$$\frac{r^2}{2}\eta_1^2=\zeta^2(\eta_1^2+\zeta^2)$$

die Gleichung der Subtangenten-Ordinaten-Curve des Kreises

$$\eta^2+\xi^2=\frac{r^2}{2}$$

folglich ist jener Kreuzriss affin mit dieser Curve. Schreiben wir die Polargl. des Grundrisses in der Form

$$\varrho=r\frac{r\sin\vartheta}{r\sqrt{\cos2\vartheta}}$$

und setzen wir

$$r\sin\vartheta=\varrho_\varkappa,\quad r\sqrt{\cos2\vartheta}=\varrho_\lambda$$

wo $\varrho_\varkappa$ und $\varrho_\lambda$ beziehungsweise die Radien-Vectoren eines Kreis- und Lemniskatenpunktes bedeuten, dann haben wir die Beziehung

$$\varrho = r \frac{\varrho \varkappa}{\varrho \lambda}$$

Endlich sei noch erwähnt, dass Grundriss und Kreuzriss der Durchdringungscurve des Kegels $\zeta^2 + \xi^2 = \eta^2$ die Gleichungen haben:

$$\eta^2(\eta^2 - r^2) = \xi^4 \quad \text{und} \quad r^2\eta^2 = \zeta^2(2\eta^2 - \zeta^2)$$

Bezüglich des Kreuzrisses ist zu bemerken, dass derselbe affin ist mit der Subtangenten-Ordinaten-Curve der gleichseitigen Hyperbel

$$x^2 - y^2 = \frac{r^2}{2}$$

Man findet nämlich durch Elimination von $x$ und $y$ aus dieser Hypergleichung und aus $\eta = t' = \frac{x^2}{y}$, $\zeta = x$

$$\zeta^2 - \left(\frac{\zeta^2}{\eta}\right)^2 = \frac{r^2}{2} \quad \text{geordnet} \quad \zeta^2(\eta^2 - \zeta^2) = \frac{r^2}{2}\eta^2$$

und wenn man hierin statt $\eta$ setzt $\eta\sqrt{2}$, so erhält man:

$$\zeta^2(2\eta^2 - \zeta^2) = r^2\eta^2$$

die obige Kreuzrissgleichung. — Von den Durchdringungscurven der gewissen drei Rotationsparaboloide ist blos die von

$$\xi^2 + \eta^2 = p\zeta$$

bemerkenswert wegen ihres Kreuzrisses einer Neil'schen Parabel mit der Gleichung:

$$\zeta^3 = \frac{r^2}{p}\eta^2$$

Was nun noch folgt, ist eine Auswahl von Projectionsgleichungen der Durchdringungen einiger parab. und hyperb. Cylinderflächen. Die Resultate wurden wieder in eine Tabelle geordnet.

$\xi^2 = p\eta$: $r^2\xi^2 = \zeta^2(p^2 + \xi^2)$ identisch mit dem Schnitt der Ebene $\xi = p$; $\zeta^2 = \frac{r^2\eta}{p + \eta}$ der Kreuzriss.

$\eta^2 = p\xi$: $\zeta^2 = \frac{r^2 p}{\xi + p}$ (Different. C. einer Parabel); $r^2p^2 = \zeta^2(\eta^2 + p^2)$ für $p = r$ wird die Curve identisch mit dem Schnitt der Ebene $\eta = r$.

$\eta^2 = p\zeta$: $\eta^2(\xi^2 + \eta^2) = r^2p^2$, diese Curve trat bereits auf als Grundriss der Durchdringungscurve des hyperb. Cylinders $\xi\zeta = a^2$ mit dem Kegel $\xi^2\zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$.



$\zeta^2 = p\xi$: Bloss zu bemerken der Grundriss

$$\eta^2 = \frac{p\xi^3}{r^2 - p\xi} = \frac{\xi^3}{\frac{r^2}{p} - \xi}$$

— eine Cissoide des Diokles.

$\xi\zeta = a^2$: $r^2\xi^2\eta^2 = a^4(\xi^2 + \eta^2)$ identisch mit dem Grundriss der Durchdringung des parab. Cylinders $\eta^2 = p\zeta$ mit dem Kegel $\xi^2\zeta^2 = \eta^2(\xi^2 + \eta^2)$. — Durch Einfachheit der Gleichung bemerkenswert der Kreuzriss

$$a^4 = \eta^2(r^2 - \zeta^2)$$

in Parameterdarstellung

$$\eta = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{1}{\cos u}, \quad \zeta = r \sin u$$

---

Bemerkung zu Seite 205.

Näheres über dieses Konoid, welches nach Pabst den Namen „gerader parab. Cono-Cuneus“ trägt, findet sich in T. LIII. dieses Archivs in einer Arbeit von Dr. A. Hochheim (S. 350—363), ferner in T. II (2. Reihe): Die Cuno-Cunei von Dr. C. Pabst (S. 281—319 und S. 337—382) und endlich in einer neueren Arbeit von H. Brocard in T. VI der „Mathesis“ (S 126 u. f.)

Wien, im März 1889.

VIII.

# Ueber Parabeln höherer Ordnung.

Von

**Himstedt.**

§ 1. Einteilung der Parabeln höherer Ordnung. — Unter einer Parabel im allgemeinen versteht man eine ebene Curve, welche der Gleichung

$$y^m = a^{m-n} . x^n \tag{1}$$

entspricht. In dieser Gleichung bedeuten $x$, $y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines in der Ebene beweglichen Punktes, $a$ eine constante Strecke und $m$, $n$ zwei gegebene rationale Zahlen mit demselben Vorzeichen. (Haben $m$ und $n$ verschiedene Vorzeichen, so stellt obige Gleichung eine Hyperbel vor). Ueber die Zahlen $m$ und $n$ lassen sich noch einige Voraussetzungen machen, welche die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigen:

1) $m$ und $n$ sind beide positiv. Denn wären beide negativ, so könnten wir obige Gleichung durch Multiplication so umformen, dass die Exponenten positiv würden.

2) $m$ und $n$ sind ganze Zahlen. Denn wären sie Brüche, so könnten wir die Gleichung (1) durch Potenziren so umformen, dass die Exponenten dadurch zu ganzen Zahlen würden.

3) $m$ und $n$ sind relative Primzahlen. Denn hätten sie einen gemeinschaftlichen Factor $\lambda$, so könnten wir auf beiden Seiten der Gleichung (1) die $\lambda$te Wurzel ziehen, so dass die Exponenten dadurch zu relativen Primzahlen würden. Daher ist mindestens eine der beiden Zahlen $m$ und $n$ ungerade.

Ferner wollen wir noch in Betreff der Constanten $a$ bemerken, dass dieselbe stets als positiv vorausgesetzt werden kann. Denn wäre $a < 0$, so könnten wir bei derjenigen Achse, deren Coordinate einen ungeraden Exponenten hat, die positive Richtung mit der negativen vertauschen, wodurch dann $a$ ein positives Vorzeichen erhielte. —

Demgemäss haben wir nun zwei verschiedene Arten von Parabeln zu unterscheiden, je nachdem die beiden Exponenten $m$ und $n$ beide ungerade sind, oder der eine gerade und der andere ungerade. Im letztern Falle wollen wir dann stets den Exponenten von $y$ als gerade voraussetzen. Hätte man umgekehrt $y$ einen ungeraden und $x$ einen geraden Exponenten, so könnten wir durch Vertauschen der Achsen diesen Fall auf den angenommenen zurückführen.

Die Gleichung der Parabel erster Art heisst also

(2) $$y^{2p+1} = a^{2p-2q} x^{2q+1}$$

und die der Parabel zweiter Art

(3) $$y^{2p} = a^{2p-2q-1} . x^{2q+1}$$

Von den Parabeln der verschiedenen Ordnungen führen wir folgende an:

Die Parabel erster Ordnung, $y = x$, ist eine Gerade und gehört zu den Parabeln erster Art.

Die Parabel zweiter Ordnung, $y^2 = ax$, ist die bekannte Apollonische Parabel und gehört zu den Parabeln zweiter Art.

Der dritten Ordnung entsprechen zwei verschiedene Parabeln, nämlich:

$$a^2y = x^3 \quad \text{und} \quad ay^2 = x^3$$

jene ist eine Parabel erster Art; letztere ist semikubische Parabel und gehört zu den Parabeln zweiter Art.

In die vierte Ordnung gehören zwei Parabeln zweiter Art, nämlich:

$$y^4 = ax^3 \quad \text{und} \quad y^4 = a^3x$$

Die fünfte Ordnung umfasst vier verschiedene Parabeln, nämlich:

$$a^4y = x^5; \quad a^3y^2 = x^5; \quad a^2y^3 = x^5; \quad ay^4 = x^5$$

hiervon gehören zwei zu den Parabeln erster Art, die beiden andern zu denen zweiter Art.

Der sechsten Ordnung entsprechen wieder nur zwei Parabeln, beide von der zweiten Art:

$$y^6 = a^5 x; \qquad y^6 = a x^5$$

u. s. w. Um alle Parabeln $r$ter Ordnung zu finden, combinire man die Zahl $r$ mit allen positiven ganzen Zahlen, welche kleiner als $r$ sind und lasse diejenigen Combinationen unberücksichtigt, deren Elemente nicht relative Zahlen sind. Für die neunte Ordnung ergeben sich z. B. 8 verschiedene Combinationen: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89; von diesen kommen die dritte und die sechste nicht in Betracht, so dass wir im Ganzen 6 verschiedene Parabeln neunter Ordnung haben, nämlich:

$$a^8 y = x^9; \quad a^7 y^2 = x^9; \quad a^5 x^4 = x^9; \quad a^4 y^5 = x^9; \quad a^2 y^7 = x^9; \quad a y^8 = x^9$$

Von diesen gehören 3 der ersten Art und die drei andern der zweiten Art an. Ueberhaupt gilt die Regel, dass sich unter den Parabeln einer ungeraden Oudnung stets gleich viel von jeder Art befinden, (den Fall $r = 1$ ausgenommen), während die Parabeln gerader Ordnung nur solche der zweiten Art sein können.

§ 2. Lage und Gestalt der Curven. — Jede Parabel besteht aus 2 congruenten, sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen, welche im Coordinatenanfangspunkte zusammentreffen. Sind die Exponenten $m$ und $n$ beide ungerade, so sind die Coordinaten $xy$ entweder beide positiv oder beide negativ, wie sich aus der Gleichung (2) ergiebt. Hieraus folgt, dass alle Parabeln der ersten Art im ersten und dritten Quadranten gelegen sind. Dies ist z. B. der Fall bei der Parabel dritter Ordnung $a^2 y = x^3$. Ist dagegen $m$ gerade und $n$ ungerade, so ist die Abscisse $x$ stets positiv, denn für negative Abscissen werden die Ordinaten imaginair, wie sich aus der Gleichung (3) ergiebt. Jeder positiven Abscisse entsprechen alsdann zwei entgegengesetzt gleiche Ordinaten. Hieraus folgt, dass alle Parabeln zweiter Art (wie z. B. die Apollonische und die semikubische) im ersten und vierten Quadranten liegen und zwar symmetrisch zur positiven $x$-Achse.

Eine durch den Coordinatenanfangspunkt $O$ gezogene Gerade $y = \lambda x$ schneidet die Parabel ausser im Punkte $O$ noch in denjenigen Punkten, für welche

$$(4) \qquad x = \sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}}{\lambda^m}}, \qquad y = \sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}}{\lambda^n}}$$

ist. Bei den Parabeln erster Art ist die Differenz $m - n$ eine gerade Zahl, folglich liefern die Gleichungen (4) zwei verschiedene

Schnittpunkte, deren Coordinaten entgegengesetzt gleich sind. Der Coordinatenanfangspunkt ist demnach Mittelpunkt der Parabeln erster Art. Uebrigens sind jene Schnittpunkte reell oder imaginair, je nachdem $\lambda \gtrless 0$ ist. Für die Parabeln zweiter Art ist die Differenz $m-n$ eine ungerade Zahl, folglich liefern die Gleichungen (4) jetzt nur einen Schnittpunkt, und dieser ist für jedes $\lambda$ reell. Die Parabeln zweiter Art haben demnach in $O$ keinen Mittelpunkt.

Der Coordinatenanfangspunkt ist ein vielfacher Punkt der Parabel. Ist $m > n$, so ist $O$ ein $n$-facher Punkt, dessen $n$ Tangenten sämtlich mit der $y$-Achse zusammenfallen. Die Parabel kehrt dann der $x$-Achse ihre concave Seite zu, wie sich aus dem Vorzeichen des Productes

$$(5) \qquad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}-1\right)\frac{y^2}{x^2}$$

ergiebt. Ist dagegen $m < n$, so ist $O$ ein $m$-facher Punkt, dessen $m$ Tangenten sämtlich mit der $x$-Achse zusammenfallen. Die Parabel ist dann convex in Bezug auf die $x$-Achse.

Die Tangente des Anfangspunktes schneidet die Parabel in $m$, resp. $n$ zusammenfallenden Punkten, je nachdem $m > n$ oder umgekehrt. Folglich muss diese Tangente bei allen Parabeln erster Art die Curve im Anfangspunkte durchschneiden, d. h. dieser Punkt ist ein Wendepunkt der Curve. Bei den Parabeln zweiter Art haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $m > n$, so haben Curve und Tangente (hier die $y$-Achse) eine gerade Anzahl von zusammenfallenden Punkten, folglich berühren sich jene, ohne sich zu durchschneiden. Ist aber $m < n$, so so haben Curve und Tangente (jetzt die $x$-Achse) eine ungerade Anzahl von zusammenfallenden Punkten und durchschneiden sich daher im Anfangspunkte. Dieser ist jetzt aber kein Wendepunkt, sondern eine Spitze der Curve. Wir können demnach die Parabeln zweiter Art weiter einteilen in solche mit Spitze und solche ohne Spitze. Ein Beispiel für den ersten Fall bietet die semikubische Parabel, während die Apollonische ein Beispiel für den zweiten Fall ist.

§ 3. Die Parabeltangente. — Durch Differentiation ergiebt sich aus der Gleichung der Parabel

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{mx} = \operatorname{tg} \alpha$$

wenn wir mit $\alpha$ den Winkel bezeichnen, welchen die Tangente im Punkte $xy$ mit der positiven Richtung der $x$-Achse bildet.

Da dieser Quotient stets einen endlichen, von null verschiedenen Wert hat, so giebt es keine im Endlichen gelegene Tangente, welche senkrecht zur $x$-Achse steht oder mit ihr parallel läuft, ausgenommen jedoch die Tangente des Anfangspunktes, welche, wie im vorigen § gezeigt wurde, mit einer der beiden Coordinatenachsen zusammenfällt. Als Gleichung der Parabeltangente ergiebt sich

$$(7) \qquad ny\xi - mx\eta + (m-n)xy = 0$$

wo $\xi\eta$ die laufenden Coordinaten und $xy$ die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Die Construction der Tangente geschieht am einfachsten mit Hilfe der Abschnitte, welche dieselbe auf den Achsen bildet, und für welche wir aus Gleichung (7) die Werte

$$(8) \qquad \xi = \frac{n-m}{n}.x, \quad \eta = \frac{m-n}{m}.y$$

erhalten. Diese Abschnitte sind also den Coordinaten des Berührungspunktes proportional und können leicht construirt werden, wenn letztere bekannt sind. Für die Apollonische Parabel ($m=2$, $n=1$) ergiebt sich z. B. $\xi = -x$; $\eta = \frac{1}{2}y$ und für die semikubische ($m=2$, $n=3$) $\xi = \frac{1}{3}x$; $\eta = -\frac{1}{2}y$. Rückt der Berührungspunkt in unendliche Ferne, so werden seine Coordinaten beide unendlich gross, folglich auch die beiden Abschnitte (8), d. h. die Parabeln haben keine Asymptoten. —

Für die Längen der Subtangente und Subnormale ergeben sich ebenfalls leicht construirbare Ausdrücke, nämlich

$$\text{Subtangente} = \frac{m}{n}.x$$

$$\text{Subnormale} = \frac{n}{m}.\frac{y^2}{x}$$

Die Subtangente ist demnach bei allen Parabeln der Abscisse des Berührungspunktes proportional. In dem speciellen Falle der Apollonischen Parabel ($y^2 = ax$) kommen wir auf die beiden bekannten Sätze zurück, dass die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes ist, und dass die Subnormale eine constante Länge hat. Für die semikubische Parabel ($ay^2 = x^3$) haben wir die beiden entsprechenden Sätze: Die Subtangente ist der Abscisse des Berührungspunktes und die Subnormale dem Quadrate dieser Abscisse direct proportional.

§ 4. Krümmung der Parabeln. — Da bereits in § 2. von der Art der Krümmung die Rede war, so haben wir hier nur noch

die Krümmungsstärke der Curven zu untersuchen. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir die Gleichung (1) durch das System

$$x = at^m; \qquad y = a \cdot t^n \tag{9}$$

ersetzen, wo $t$ ein beliebiger Parameter ist. Nach bekannten Formeln erhalten wir dann für den Krümmungsradius der Curve

$$\varrho = \frac{a[m^2 t^{2(m-1)} + n^2 t^{2(n-1)}]^{\frac{3}{2}}}{mn(m-n)\, t^{m+n-3}}$$

oder

$$\varrho = \frac{a[m^2 t^{\frac{2}{3}(2m-n)} + n^2 t^{\frac{2}{3}(2n-m)}]^{\frac{3}{2}}}{mn(m-n)} \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass der Krümmungsradius im Coordinatenanfangspunkte ($t = 0$) entweder unendlich klein oder unendlich gross ist, je nachdem die hier auftretenden Exponenten des Parameters $t$ beide positiv oder einer von ihnen positiv und der andere negativ ist. (Der Fall, dass beide Exponenten negativ sind, kann offenbar nicht eintreten). Wenn nämlich

$$2 > \frac{m}{n} > \frac{1}{2} \tag{11}$$

so sind beide Exponenten von $t$ positiv, folglich $\varrho = 0$ für $t = 0$. In diesem Falle wächst der Krümmungsradius mit wachsendem $t$ continuirlich von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \infty$. Dies findet z. B. Statt bei der semikubischen Parabel $ay^2 = x^3$. —

Ist dagegen

$$\frac{m}{n} > 2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} > \frac{m}{n} \tag{12}$$

so ist von den Exponenten der Gleichung (10) der eine positiv und der andere negativ, folglich ist jetzt $\varrho = \infty$ für $t = 0$. In diesem Falle nimmt der Krümmungshalbmesser mit wachsendem $t$ zunächst von $\varrho = \infty$ bis zu einem gewissen Minimalwerte $\varrho = \varrho'$ ab, um dann wieder von $\varrho = \varrho'$ bis $\varrho = \infty$ zu wachsen. Dieser Minimalwert wird gefunden, indem wir die Gleichung $\frac{d\varrho}{dt} = 0$ nach $t$ auflösen und das Resultat

$$t^{m-n} = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m-2n}{2m-n}}$$

in die Gleichung (10) substituiren. Ein Beispiel hierfür bietet die Parabel dritter Ordnung $a^2y = x^3$. Der Krümmungsradius hat im Anfangspunkte den Wert $\varrho = \infty$, erreicht seinen Minimalwert

$$\varrho = \frac{3}{5} a \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$

in demjenigen Punkte, welcher dem Parameter $t = (45)^{-\frac{1}{4}}$ entspricht, und wächst von da an continuirlich bis $\varrho = \infty$.

Die obigen Sätze von der Krümmungsstärke gelten für alle Parabeln, mit alleiniger Ansnahme der Apollonischen, welche dem Grenzfalle $\frac{m}{n} = 2$ $\left(\text{resp. } \frac{m}{n} = \frac{1}{2}\right)$ enspricht. Hier hat der Krümmungsradius im Antangspunkte einen endlichen von null verschiedenen Wert, nämlich $\varrho = \frac{a}{2}$, und wächst von da continuirlich bis $\varrho = \infty$.

§ 5. Fortsetzung. — Aus dem vorhergehenden können wir schliessen, dass der Krümmungsradius für einen Wendepunkt nicht notwendig unendlich gross und für eine Spitze nicht notwendig unendlich klein sein muss. Da nämlich der Wert des Krümmungsradius im Anfangspunkte nur von dem Werte des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ abhängt und jener Punkt für alle Parabeln erster Art ein Wendepunkt, und, falls $m < n$, für alle Parabeln zweiter Art eine Spitze ist, so kann es geschehen, dass der Krümmungsradius eines Wendepunktes unendlich klein und derjenige einer Spitze undendlich gross wird. Betrachten wir z. B. die beiden Parabeln erster Art

$$a^2 y = x^3 \quad \text{und} \quad a^2 y^3 = x^5$$

Nach § 2. haben beide Curven im Anfangspunkte einen Wendepunkt, und doch ist nach § 4. nur für die erste $\varrho = \infty$, während für die zweite $\varrho = 0$ ist.

Ferner haben die beiden Parabeln zweiter Art

$$a y^2 = x^3 \quad \text{und} \quad a^3 y^2 = x^5$$

nach § 2. im Anfangspunkte eine Spitze, während nach § 4. $\varrho = 0$ für die erste und $\varrho = \infty$ für die zweite wird. Um dies geometrisch zu erklären, gehen wir von dem ursprünglichen Begriffe der Krümmung aus. Hiernach versteht man unter der Krümmung der Curve ihre Abweichung von der geradlinigen Form und demgemäss unter der Krümmungsstärke das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit der Curventangente zur Bahngeschwindigkeit des die Curve erzeugenden Punktes. Bezeichnen wir also den Winkel, welchen die Curventangente mit einer festen Geraden (z. B. mit der $x$-Achse) bildet, mit $\tau$, die Länge eines beliebigen Curvenbogens mit $s$ und die Zeit mit $t$, so ist die Winkelgeschwindigkeit der Tangente $= \frac{d\tau}{dt}$ und die Bahngeschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$, folglich

$$K = \frac{d\tau}{ds} : \frac{ds}{dt}$$

wenn wir mit $K$ die Krümmungsstärke der Curve bezeichnen. Nun ist jene dem Krümmungsradius $\varrho$ umgekehrt proportional, wie sich aus der Untersuchung über die Krümmung [eines Kreises ergiebt, folglich

$$\varrho = \frac{ds}{dt} : \frac{d\tau}{dt}$$

die beiden Quotienten, die hier auftreten, sind im allgemeinen endliche, von null verschiedene Grössen, können jedoch auch beide gleichzeitig unendlich klein werden, in welchem Falle $\varrho = \frac{0}{0}$, also unbestimmt wird. Liegen z. B., wie dies bei einem Wendepunkte stets der Fall ist, drei benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie, so fallen zwei benachbarte Tangenten zusammen, und der Quotient $\frac{d\tau}{dt}$ hat dann den Wert null. Liegen 4 benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie, wie z. B. bei der Parabel $y^4 = a^3x$, so fallen drei benachbarte Tangenten zusammen und es ist dann ebenfalls $\frac{d\tau}{dt} = 0$. Um aber diesen Fall von dem vorigen zu unterscheiden, setzen wir fest, dass dieser Quotient dort unendlich klein von der ersten Ordnung und hier unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Dies erkennen wir auch auf analytischem Wege, wenn wir in den Gleichungen (9) den Parameter $t$ als Zeit auffassen und dann jenen Quotienten berechnen. Allgemein können wir daher den folgenden Satz aufstellen: Wenn $r$ benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie liegen und demgemäss $(r-1)$ benachbarte Tangenten zusammenfallen, so ist der Quotient $\frac{d\tau}{dt}$ unendlich klein von der $(r-2)$ten Ordnung.

Was den Quotienten $\frac{ds}{dt}$ anbetrifft, so wird derselbe nur dann zu null, wenn 2 oder mehrere Curvenpunkte in einen einzigen zusammenfallen. Auch hier haben wir unendlich kleine Grössen verschiedener Ordnung zu unterscheiden und setzen fest, (in Uebereinstimmung mit den auf analytischem Wege sich ergebenden Resultaten) dass in dem Falle, wo 2, 3, 4 ... $r$ Curvenpunkte in einen einzigen zusammenfallen, der Quotient $\frac{ds}{dt}$ unendlich klein von der ersten, zweiten, dritten ... $(r-1)$ten Ordnung wird. — Dies vorausgesetzt, können wir nun den Krümmungsradius einer Parabel im Anfangspunkte $O$ einfach dadurch bestimmen, dass wir erstens untersuchen, wieviel Punkte mit $O$ in gerader Linie liegen, und zweitens,

wieviel Punkte mit $O$ zusammenfallen. Bezeichnen wir zur Abkürzung mit $A$ irgend eine endliche, von null verschiedene Grösse und mit $\delta_r$ eine unendlich kleine Grösse $r$ter Ordnung, so ergiebt sich Folgendes:

Bei der Parabel $a^2y = x^3$ liegen in der Nachbarschaft von $O$ drei Punkte in gerader Linie und $O$ ist ein einfacher Punkt. Folglich ist

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt} = A$$

mithin

$$\varrho = \frac{A}{\delta_2} = \infty$$

Die Parabel $a^2y^3 = x^5$ hat in $O$ einen dreifachen Punkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = \delta_2$$

Ferner schneidet die $x$-Achse die Curve in 5 Punkten, so dass, da $O$ dreimal zu zählen ist, im Ganzen 3 Punkte in gerader Linie liegen; folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_1 \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_2}{\delta_1} = 0$$

Die semikubische Parabel $ay^2 = x^3$ hat in $O$ einen Doppelpunkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = \delta_1$$

Die $x$-Achse schneidet die Curve in 3 Punkten, so dass, da $O$ doppelt zu zählen ist, nicht mehr als 2 benachbarte Curvenpunkte in gerader Linie liegen; folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = A \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_1}{A} = 0$$

Die Parabel $a^3y^2 = x^5$ hat in $O$ ebenfalls einen Doppelpunkt, so dass

$$\frac{ds}{dt} = \delta_1$$

Die $x$-Achse schneidet die Curve in 5 Punkten, folglich liegen, da $O$ doppelt zu zählen ist, 4 derselben in gerader Linie. Mithin ist

$$\frac{d\tau}{di} = \delta_2 \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \infty$$

Die Parabel $y^4 = a^3x$ hat in $O$ einen einfachen Punkt, folglich

$$\frac{ds}{dt} = A$$

Die $y$-Achse schneidet die Curve in 4 zusammenfallenden Punkten, welche hier als ebenso viele in gerader Linie liegende Curvenpunkte zu betrachten sind. Folglich

$$\frac{d\tau}{dt} = \delta_2 \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{A}{\delta_2} = \infty$$

u. s. w.

§ 6. Quadratur und Rectification der Curven. — Für die Fläche, welche von der Parabel, der $x$-Achse und einer beliebigen Ordinate begrenzt wird, erhalten wir

$$F = a^{\frac{m-n}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} \cdot a^{\frac{m-n}{m}} \cdot x^{\frac{m+n}{m}}$$

oder einfacher

$$F = \frac{m}{m+n} \cdot xy \tag{13}$$

Die Parabelfläche hat demnach stets ein rationales Verhältniss zu dem Rechtecke, welches die Grenzordinate mit der entsprechenden Abscisse bildet Für die Apollonische Parabel ($m = 2$, $n = 1$) ergiebt sich aus obiger Formel $F = \frac{2}{3}xy$; für die semikubische $F = \frac{3}{5}xy$. Je nachdem $m \gtrless n$, beträgt die Parabelfläche mehr oder weniger als die Hälfte jenes Rechtecks. Dies stimmt mit dem überein, was in § 2. über die Krümmung der Parabeln gesagt wurde.

Nicht so einfach ist die Rectification der Parabeln. Nach einer bekannten Formel erhalten wir für den vom Anfangspunkte an gerechneten Bogen

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \lambda^2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{2\lambda - 2}}\, dx \tag{14}$$

wo $\lambda = \frac{n}{m}$ zur Abkürzung dient. Um dieses Integral zu berechnen, führen wir eine neue Variabele ein, indem wir setzen

$$x = az^{\frac{1}{\lambda - 1}}$$

Dadurch geht die Gleichung (14) über in

(15) $$s = \frac{a}{\lambda - 1} \int \sqrt{1 + \lambda^2 z^2} \,.\, z^{\frac{2-\lambda}{\lambda-1}} dz$$

Dieses Integral kann in geschlossener Form angegeben werden, sobald der Exponent $\frac{2-\lambda}{\lambda-1}$ eine ganze Zahl ist. Dies ist aber der Fall, wenn

(16) $$\lambda = \frac{k+1}{k}$$

ist, wo $k$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. (Nur der Wert $k = -1$ muss ausgeschlossen werden, denn in diesem Falle wird $\lambda = 0$, was unmöglich ist). Die Rectification der Parabeln ist also durch Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen nur dann ausführbar, wenn die Differenz der Exponenten $m$ und $n$ gleich der Einheit ist. Dies ist z. B. der Fall bei der Apollonischen und bei der semikubischen Parabel. Für erstere erhalten wir aus Gleichung (14)

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} \,.\, dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{x(a+4x)} + \tfrac{1}{8} a \log\left(\frac{a + 8x + 4\sqrt{x(a+4x)}}{a}\right)$$

für letztere

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{a}}\, dx = a\left[\left(\frac{4}{9} + \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Loebau, Westpr., im April 1889.

IX.

# Miscellen.

---

1.

## Aehnlichkeitspunkt als Gleichgewichtspunkt der Anziehung ebener Flächenstücke.

Seien $AB$, $A'B'$, $A_0B_0$ drei Parallelen, welche die Schenkel eines Winkels $ACB$ verbinden, $\varphi$, $\psi$ die Richtungswinkel der Schenkel $AA$, $CB$ gegen eine beliebige $x$ Axe, $h$, $hv$, $h\varkappa$ die Lote von $C$ auf $AB$, $A'B'$, $A_0B_0$, dann ist die Componente der Anziehung von $A'B'$ auf $C$

$$X' = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{hv}$$

also $X'h\partial v$ die des Rechtecks $A'B'.h\partial v$, das ist eines Elements des Dreiecks $ABC$. Variirt $v$ von $\varkappa$ bis 1, so erzeugt dieses Element das Viereck $ABC_0A_0$, daher ist die Componente der Anziehung von $ABB_0A_0$ auf $C$

$$X = \int_{\varkappa}^{1} (\sin\varphi - \sin\psi)\frac{\partial v}{v} = (\sin\varphi - \sin\psi)\log\frac{1}{\varkappa}$$

Ist nun $AB$ eine Seite eines Vielecks, $A_0B_0$ die eines ähnlichen und ähnlich liegenden, $C$ Aehnlichkeitspunkt, so ist für alle entsprechenden Seitenpare $\varkappa$ gemeinsam, also

$$\Sigma X = \log\frac{1}{\varkappa}\,\Sigma(\sin\varphi - \sin\psi) = 0$$

Geht man bei unendlicher Seitenzahl zur Grenze über, so erstreckt sich die Eigenschaft des Vielecks auf beliebig begrenzte Flächen, und man hat den Satz:

„Die Anziehung der Ringfläche zwischen zwei geschlossenen und einander umschliessenden ähnlichen und ähnlich liegenden Linien auf den Aehnlichkeitspunkt ist null."

Anwendung auf den Fall $\varkappa = 0$ führt zu einem Trugschluss.

R. Hoppe.

---

2.

**Ein allgemeines Theorem aus der Theorie der recurrirenden Reihen.**

Für die recurrirenden Reihen besteht folgendes Theorem:

Sei durch

$$\sum_0^m a_k u_{n-k} = 0 \tag{1}$$

die sogenannte Scala relationis gegeben. Seien ferner

$$\eta_1 \ \eta_2 \ \ldots \ \eta_m$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_0^m a_k \eta^{m-k} = 0 \tag{2}$$

so lautet das allgemeine Glied in der independenten Form

$$u_n = \sum_1^m b_k \eta_k^n \tag{3}$$

wobei die Coeficienten $b_k$ aus den gegebenen Anfangsgliedern zu bestimmen sind. Der Beweis wird geführt dadurch, dass man die Gleichung 3) in die Gleichung 1) einsetzt und das Resultat in zwei Factoren zerlegt, deren einer eben die Gleichung 2) ist. Da nun der andere Factor nicht null sein kann, so ergibt sich hieraus zur Bestimmung von $\eta$ die Gleichung 2).

Für die bekannte Reihe von Lamé (Nouv. Corr. Mathem. Tom. I und V) ist

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0 \qquad u_1 = 1 \quad u_2 = 2$$

Wir haben also die Bestimmungsgleichung

$$\eta^2 - \eta - 1 = 0$$

welche

$$\eta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\eta_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

liefert. Also hat das allgemeine Glied die Form

$$u_n = b_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

wobei $b_0$ und $b_1$ aus den Gleichungen

$$1 = b_0 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$2 = b_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

zu bestimmen sind.

Prag, Januar 1889.

W. Láska.

---

3.

**Gleichgewicht der Anziehung einer ringförmigen Fläche.**

Der auf Seite 222 ausgesprochene Satz lässt sich erweitern.

Seien $L$ und $M$ zwei geschlossene Linien, die einander und den Punkt $C$ umschliessen; $C$ sei Anfang der rechtwinkligen $x$, $y$ und der Polarcoordinaten $\varrho$, $\varphi$. Das von den consecutiven Radienvectoren $\varphi$ und $\varphi + \partial\varphi$ und den Linienelementen von $L$ und $M$ begrenzte Viereck, d. i. ein Element der Ringfläche $R$ zwischen $L$ und $M$ lässt sich erzeugt denken durch eine transversale Gerade $NN' = l$ von constanter Richtung, welche auf $\varrho$ die Strecke $CN = \varrho v$ abschneidet, indem $v$ von $\varkappa$ bis 1 variirt, so dass $(\varrho, \varphi)$ und $(\varrho\varkappa, \varphi)$ die Schnittpunkte des Strahles $\varphi$ mit $L$ und $M$ bedeuten.

Bezeichnet $hv$ den normalen Abstand der Geraden $NN'$ von $C$, so ist das Dreieck

$$CNN' = \tfrac{1}{2} l . hv = \tfrac{1}{2}(\varrho v)^2 \partial\varphi$$

also

$$\frac{l}{(\varrho v)^2} = \frac{\partial\varphi}{hv}$$

Die Grösse zur Linken drückt die von $l$ uuf $C$ geübte Anziehung aus, deren Componenten also sind:

$$X' = \frac{\partial\varphi \cos\varphi}{hv}, \qquad Y' = \frac{\partial\varphi \sin\varphi}{hv}$$

Erzeugt nun $l$ das Flächenelement $l.h\partial v$, so sind die Componenten von dessen Anziehung

$$\partial^2 X = \frac{\partial v}{v}\partial\varphi \cos\varphi, \qquad \partial^2 Y = \frac{\partial v}{v}\partial\varphi \sin\varphi$$

folglich nach Integration die Componenten der Anziehung von $R$

$$X = \int\limits_0^{4R} \log\frac{1}{\varkappa}\cos\varphi\,\partial\varphi, \qquad Y = \int\limits_0^{4R} \log\frac{1}{\varkappa}\sin\varphi\,\partial\varphi$$

Setzt man

$$\log\frac{1}{\varkappa} = F(\cos 2\varphi)$$

so verschwinden $X$ und $Y$, denn nach Zerlegung des Integralintervalls in Quadranten zeigt sich, dass die 4 Teilintegrale gleichen absoluten Wert und parweise ungleiche Vorzeichen haben.

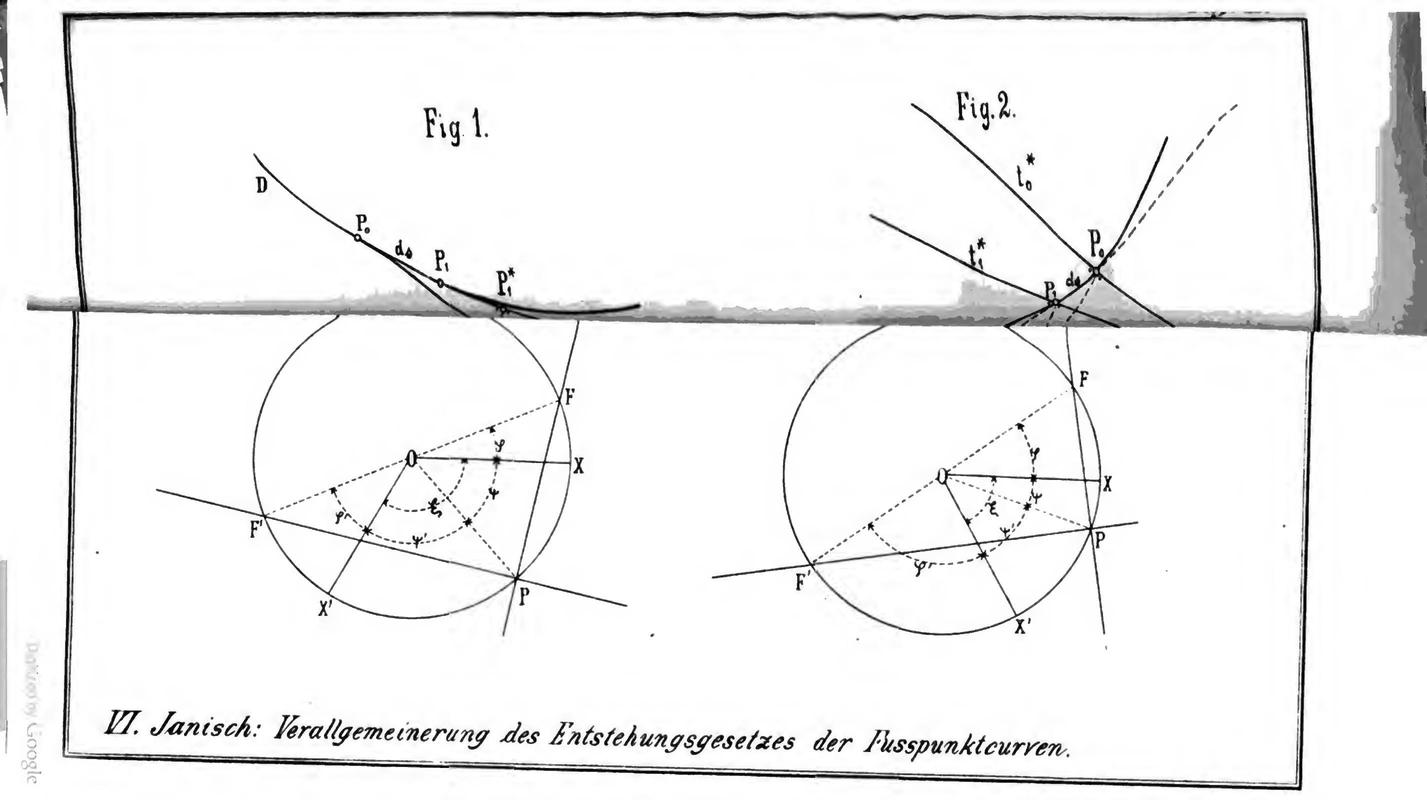
Schreiben wir einfacher

$$\varkappa = f(\cos 2\varphi)$$

so lautet das Resultat:

„Die Anziehung einer Ringfläche auf einen innern Punkt ist null, wenn das Verhältniss der von ihnen ausgehenden Radienvectoren beider Grenzlinien Function des Cosinus der doppelten Amplitude ist“.

R. Hoppe.



VI. Janisch: Verallgemeinerung des Entstehungsgesetzes der Fusspunktcurven.

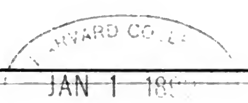

Der Sternenhimmel
zu jeder Stunde des Jahres.
Ausgabe für Mittel-Europa.

---

## INHALT.



Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.




# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Zweite Reihe.

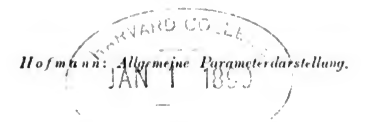
Achter Teil. Drittes Heft.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

---

**Leipzig.**
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1889.




X.

# Allgemeine Parameterdarstellung von Substitutionen involutorischen Charakters, welche eine rationale Function in sich selbst überführen.

Von

**Fritz Hofmann.**

---

## I. Lineare involutorisch-orthogonale Substitutionen.

### § 1. Zahl der homogenen Veränderlichen = 2.

Bildet man die Substitutionen

$$\text{A}\quad \begin{cases} X = -\dfrac{2\lambda}{N}x + \dfrac{1-\lambda^2}{N}y \\[2ex] Y = \dfrac{1-\lambda^2}{N}x + \dfrac{2\lambda}{N}y; \quad N = 1+\lambda^2 \end{cases}$$

deren orthogonale Eigenschaft evident ist, so erhält man durch Auflösung nach $x$ und $y$:

$$\text{A}\quad \begin{cases} x = -\dfrac{2\lambda}{N}X + \dfrac{1-\lambda^2}{N}Y \\[2ex] y = \dfrac{1-\lambda^2}{N}X + \dfrac{2\lambda}{N}Y; \quad N = 1+\lambda^2 \end{cases}$$

so dass also genau dieselben Gleichungen die $x$ und $y$ durch $X$ und $Y$ ausdrücken, welche auch $X$ und $Y$ durch $x$ und $y$ darstellen.

Dies steht im Gegensatze zu der gewöhnlich gegebenen Darstellung orthogonaler Substitutionen, wie man solche mit Hilfe der schiefen Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

zu bilden pflegt:

$$\text{A}' \quad \begin{cases} X = \dfrac{1-\lambda^2}{N} x + \dfrac{2\lambda}{N} y \\[2ex] Y = \dfrac{-2\lambda}{N} x + \dfrac{1-\lambda^2}{N} y; \quad N = 1+\lambda^2 \end{cases}$$

Der geometrische Sinn der „umkehrbaren“ Substitutionen A ist folgender:

Da diese Formeln A auch geschrieben werden können

$$\text{A}_1 \quad \begin{cases} X = -\sin\alpha . x + \cos\alpha . y \\ Y = \phantom{-}\cos\alpha . x + \sin\alpha . y \end{cases}$$

so kann man, wenn in der Figur $ox$ senkrecht auf $oy$, sowie $oX$ senkrecht auf $oY$, von einem Punkte $p$ der $xy$-Ebene aus Perpendikel fällen auf $oY$, $oX$: man erhält als Längen dieser Perpendikel genau jene Grössen $X$, $Y$, wie sie aus den Gleichungen A algebraisch berechnet werden könnten.

Man kann nun einen Punkt $P$ in der $xy$-Ebene construiren mit den so erhaltenen und als $x$ und $y$ zu behandelnden Coordinaten $X$, $Y$; dieser neue Punkt $P$ wird im allgemeinen von $p$ verschieden liegen (vergl. die Figur 1); jedoch

„fasst man $P$ auf als Punkt $g$ der $xy$-Ebene und wiederholt für ihn dieselbe Construction, die von $p$ nach $P$ führte (Senkrechte $X_g$, $Y_g$ fällend auf $oY$, $oX$) — so erhält man als letztes Constructionsresultat $G$ den ursprünglichen Ausgangspunkt $p$ wieder.“

Die Identitäten

$$-\sin\alpha\underset{}{[}\overset{(X)}{-\sin\alpha . x + \cos\alpha . y}] + \cos\alpha[\overset{(Y)}{\cos\alpha . x + \sin\alpha . y}] = x$$

$$+\cos\alpha[\overset{(X)}{-\sin\alpha . x + \cos\alpha . y}] + \sin\alpha[\overset{(Y)}{\cos\alpha . x + \sin\alpha . y}] = y$$

gestatten den Verlauf unserer Constructionen schrittweise zu verfolgen und unseren Satz zu bestätigen.

Dagegen würde die Durchführung desselben Processes für

$$A_1' \quad \begin{cases} X = \cos\alpha . x + \sin\alpha . y \\ Y = -\sin\alpha . x + \cos\alpha . y \end{cases}$$

aus dem Punkte $p$ ein an derselben Stelle liegendes $G(+x, +y)$ liefern **nur** für $\alpha = n.\pi$.

So sind demnach 2 verschiedene Classen der linearen orthogonalen Substitution vorhanden, von welchen die von uns betrachtete, A oder $A_1$, geometrisch wie algebraisch die Bezeichnung „involutorisch" verdient. —

Die Determinante dieser „involutorisch — orthogonalen" Substitution $A$ ist $-1$, daher ist genau die Hälfte aller überhaupt möglichen orthogonalen Substitutionen von unsrer speciellen Art (für den Fall von zwei Veränderlichen).

Sie sind — rein geometrisch — dadurch charakterisirt, dass der von den neuen Coordinatenaxen gebildete, körperliche Winkel **nicht** mit dem von den ursprünglichen Axen gebildeten zur Deckung gebracht werden kann.

Auch geometrisch stellt sich somit die Wahrscheinlichkeit: in einer beliebig vorgegebenen rechtwinkligen Coordinatenaxenstellung die „involutorische" Eigenschaft zu erkennen, gleich $\frac{1}{2}$ heraus.

Setzt man in den Formeln A statt $\lambda$ ein: $\frac{b-a}{b+a}$, so nehmen dieselben die Gestalt an

$$A_2 \quad \begin{cases} X = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}y \\[2ex] Y = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}x + \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y \end{cases}$$

diese Formeln $A_2$ enthalten den einzigen Parameter $a:b$; sie sind nur brauchbar, wenn

$$a^2+b^2 \lessgtr 0$$

im übrigen können $a$, $b$ reell oder rein imaginär sein. Für $a = 0$ erhält man eine sogenannte „Spiegelung", vgl. § 6, Anm. II.

Wir nennen $A_2$ die „Normalform" für die involutorisch-orthogonale Substitution — aus späterhin ersichtlichen Gründen.

## § 2. Zahl der homogenen Veränderlichen = 3.

Hier fragen wir nach der Existenz und Darstellbarkeit von orthogonalen Substitutionen

$$\begin{aligned} X &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z \\ Y &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z \\ Z &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z \end{aligned}$$

wobei aber gleichzeitig gefordert wird

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{31} = \alpha_{13}$$

Nun wird ein System von 3 orthogonalen Ebenen geliefert durch die Formeln

$$\text{F} \quad \left\{ \begin{aligned} NX &= (1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)x + 2(\lambda-\mu\nu)y + 2(\lambda\nu+\mu)z \\ NY &= -2(\lambda+\mu\nu)x + (1+\mu^2-\lambda^2-\nu^2)y + 2(\nu-\mu\lambda)z \\ NZ &= 2(\lambda\nu-\mu)x - 2(\nu+\lambda\mu)y + (1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)z \\ N &= 1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 \end{aligned} \right.$$

Dass aber unter diesen 9 Richtungscos. sich 3 Paare von je 2 gleichen befänden, ist aus obigem allgemeinen Systeme $F$ nicht zu schliessen; auch ein Vertauschen von Zeilen oder Reihen würde — im allgemeinen — die gewünschten 3 Paare $a_{ik} = a_{ki}$ nicht auftreten lassen.

Wir sind daher auf Ermittlung eines besonderen Kunstgriffs angewiesen, der die Formeln F in solche von der gewünschten involutorischen Eigenschaft verwandelt — die Formen F werden bei diesem Process einen ihrer Parameter verlieren.

Schreiben wir für $\lambda$, $\mu$, $\nu$ respective $\frac{c}{d}$, $\frac{-b}{d}$, $\frac{a}{d}$, so erhalten die 9 Coefficienten von $F$ folgende Gestalt [1]) (indem wir $d^2$ aus Zähler und Nenner, $N$, entfernen):

$$\text{F}_1 \quad \left| \begin{matrix} d^2+a^2-b^2-c^2 & 2(dc+ab) & 2(ac-bd) \\ +2(-dc+ab) & d^2-a^2+b^2-c^2 & 2(bc+ad) \\ +2(ae+bd) & +2(bc-ad) & d^2-a^2-b^2+c^2 \end{matrix} \right|$$

$$N_1 = a^2+b^2+c^2+d^2$$

---

1) Vom Verfasser mitgeteilt in einer Note: „Zeitschr. f. Math. u. Ph.", XXXIII. 384.

Diese Tabelle wurde abgeleitet unter der Voraussetzung eines nicht verschwindenden $d$; für jedes solche $d$ muss dieselbe orthogonale Substitutionen liefern, denn $F_1$ ist nur eine Umformung von $F$.

Da danach die 9 Glieder der Determinante für beliebig viele Werte von $d$ die Eigenschaft besitzen: jeder Zeile oder Reihe nach die Quadratsumme =

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

aufzuweisen, so muss die Determinante $F_1$ identisch diese Eigenschaft besitzen (man kann diesen Schluss leicht durch effective Herstellung der Quadratsumme bestätigen).

Wählen wir nun

$$d = 0$$

so ist auch

$$F_2 \quad \begin{vmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ba & -a^2+b^2-c^2 & 2bc \\ 2ca & 2cb & -a^2-b^2+c^2 \end{vmatrix}$$

$$N = a^2+b^2+c^2$$

eine orthogonale Substitution unter der Bedingung

$$a^2+b^2+c^2 \gtrless 0$$

Demnach erhielten wir durch eine Umformung der allgemeinen Formel $F$, welche a priori für unser Problem wenig förderlich erschien, das „involutorisch-orthogonale" System:

$$A_3 \quad \begin{cases} NX = (a^2-b^2-c^2)x + 2aby + 2acz \\ NY = 2bax + (-a^2+b^2-c^2)y + 2bcz \\ NZ = 2cax + 2cby + (-a^2-b^2+c^2)z \\ N = a^2+b^2+c^2 \gtrless 0 \end{cases}$$

welches 2 wesentliche Parameter $a:b:c$ enthält.

Der Wert der Coefficientendeterminante $F_2$ ist hier zunächst $=1$, kann aber (durch $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ statt $a$, $b$, $c$) auch $=-1$ gemacht werden.

In letzterem Falle kann der von den neuen Coordinatenaxen gebildete „Dreistuhl" nicht mehr mit dem ursprünglich gegebenen körperlichen Winkel der Axen zur Deckung gebracht werden. Immer-

hin besteht nach dem Vorhergehenden der geometrische Satz: „Unter den orthogonalen Systemen $XYZ$, durch welche die durch das System der Ebenen $xyz$ fixirten Raumpunkte transformirt werden können — ihre Anzahl ist $\infty^3$ — gibt es $\infty^2$ von involutorischer Eigenschaft, derart, dass ein transformirter Punkt $P$ (aus $p(xyz)$ entstanden), welchem als $xyz$-Coordinaten die Perpendikel $XYZ$ gegeben wurden, mit der Anfangslage $p$ zusammenfällt, sobald er als $y$ im $xyz$-System von neuem aufgefasst und demselben Process unterworfen wird, der von $p$ nach $P$ führte.":

Denn man hat, sich der Formeln $A_3$ bedienend durch Ausrechnen:

$$\begin{aligned}(a^2-b^2-c^2)[(a^2-b^2-c^2)x+2aby+2acz]\\ +2ba[2abx+(-a^2+b^2-c^2)y+2acz]\\ +2ca[2cax+2bcy+(-a^2-b^2+c^2)z]\\ =N^2x\end{aligned}$$

Zahlenbeispiel. $a=1,\ b=2,\ c=4$ gibt

$$\begin{aligned}21.X &= -19x+4y+8z\\ 21.Y &= 4x-13y+16z\\ 21.Z &= 8x+16y+11z\end{aligned}$$

ein Substitutionssystem, dessen Umkehrung dieselben Coefficienten an denselben Stellen auftreten liesse.

## § 3. Zahl der homogenen Veränderlichen $> 3$.

Von $n=4$ an verlieren die bisher gebrauchten Methoden, — nämlich: Vertauschung von Reihen, oder: Einführung homogener Parameter — ihre Wirksamkeit. Denn die nach dem Cayley-Hermite'schen Verfahren aus schiefen Determinanten herzustellenden Coefficientenreihen für allgemeine orthogonale Substitutionen geben z. B. für 4 Veränderliche 16 vollständig verschiedene Zahlen als Schlusssresultat, andrerseits aber sind die allgemeinen Ausdrücke, welche uns die Substitutionscoefficienten liefern, Brüche vom dritten Grade im Zähler (in Bezug auf die Parameter), vom vierten im Nenner, so dass ein Homogenmachen keinenfalls weiter hilft. (Vgl. Baltzer, Determinanten. V. Auflage. pag. 195).

Es bleibt uns der Analogieschluss, um aus der „Normalform" für $n=2$ und $n=3$ eine Coefficiententabelle, für $n=4$ etwa, aufzubauen. Wir bilden:

$A_4$

$$\begin{vmatrix} a^2-b^2-c^2-d^2 & 2ab & 2ac & 2ad \\ 2ba & -a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc & 2bd \\ 2ca & 2cb & -a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd \\ 2da & 2db & 2dc & -a^2-b^2-c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$N = a^2+b^2+c^2+d^2; \quad N \gtrless 0$$

und überzeugen uns nachträglich durch Ausrechnen, dass in dieser Tabelle alle wesentlichen Eigenschaften der „orthogonalen" Substitutionen sich finden, während zugleich ihr „involutorischer" Charakter in ihrer Bildung ausgesprochen ist.

Das Quadrat obiger Determinante, gebildet nach dem Multiplicationsgesetze der Determinanten, gibt $(a^2+b^2+c^2+d^2)^8$; daher ist die Determinante selbst $= -(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ — wie aus dem Vorzeichen von $a^8$ zu entnehmen.

Somit ist die Determinante der eigentlichen, mit dem Nenner zu versehenden Coefficienten unter allen Umständen $= -1$, mag man auch beliebig viele homolog benannte $\left.\begin{matrix}\text{Zeilen}\\ \text{Reihen}\end{matrix}\right\}$ gleichzeitig paarweise mit $-1$ multipliciren.

Die Zahl der orthogonalen und zugleich involutorischen Substitutionen für 4 Veränderliche ist daher $\infty^3$, denn $A_4$ enthält 3 unabhängige Parameter $a:b:c:d$.

Lehrsatz. Allgemein wird die „involutorisch-orthogonale" Substitutions-Coefficienten-Tabelle dargestellt durch $n-1$ unabhängige Parameter, wenn $n$ Veränderliche vorliegen (diese Zahl bleibt von $n > 2$ an hinter der für die „allgemeine" Orthogonalsubstitution giltigen Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ zurück).

Für ungerades $n$ kann der Wert der Coefficienten-Determinante nach Belieben als $+1$ oder $-1$ angegeben werden, durch eventuelle Anwendung der Parameter $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$ ... statt $a$, $b$ ...; für gerades $n$ ist derselbe immer $= -1$.

Der Beweis für diesen Satz ist einstweilen durch Ausrechnung

zu führen — eine strengere Ableitung desselben, als die bisherige, durch Induction gegebene, bleibt demnach wünschenswert [1]).

## §. 4. Directe geometrische Ableitung der Coefficienten-Tabellen.

Ist eine homogene quadratische Function von beliebig vielen, $n$, Veränderlichen gegeben in der speciellen Form

$$G \qquad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \dots$$

so kann

$$G = 0$$

gedeutet werden als die Gleichung eines $(n-2)$-dimensionalen Punktcontinuums im Raume von $(n-1)$ Dimensionen.

Beispiel. Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$$

stellt eine imaginäre Kugel vor im dreidimensionalen Raume; die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ist die eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{-1}$ in der Ebene.

Ein Punkt $a, b, c, d \dots$ **ausserhalb** dieser Fläche („Fläche" im übertragenen Sinne), für welchen also

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots \gtrless 0$$

kann dann mit einem Punkte $x, y, z, w \dots$ **auf** der Fläche durch eine Gerade verbunden werden Die Coordinaten $X, Y, Z, W \dots$ des zweiten Durchstosspunktes dieser Geraden mit der Fläche werden sich als **lineare** Functionen von $x, y, z\ w \dots$ einstellen; es sei etwa

$$X = \varphi_1 (x, y, z, w \dots)$$
$$Y = \varphi_2 (x, y, z, w \dots)$$
$$\text{u. s. w.}$$

Werden nun in der Gleichung

$$G = 0$$

1) Auf anderem Wege ist Herr Veltmann in „Zeitschrift für Mathem. u. Ph." Bd. 16., pag. 523 ff. auf ähnliche Bildungen gelangt.

überall an Stelle der $x, y, z, w \ldots$ diese Ausdrücke für $X, Y, Z, W \ldots$ substituirt:

$$G' \qquad [\varphi_1(x, y, z, w \ldots)]^2 + [\varphi_2(x, y, z, w \ldots)]^2 + \ldots = 0$$

so wird, wenn ein System von $n$ Zahlen $x, y, z, w \ldots$ der ursprünglichen $G$ genügt, auch der durch Rechnung, durch die Transformationsformeln $\varphi$ ihm zugeordnete Punkt (das System) $X, Y, Z, W \ldots$ der

$$G' = 0$$

genügen.

Ein Beweisversuch hierfür würde den Wert einer Tautologie haben; denn wir haben ja a priori unsere Formeln $\varphi$ so eingerichtet, dass eben der durch sie dem $x, y, z, w \ldots$ zugeordnete Punkt auf $G'$ liegen muss.

Einer logischen Tautologie muss, wenn zu ihrer Einkleidung mathematische Formeln verwendet werden können, die Mathematik mit einer nach ihren Operationsvorschriften darstellbaren Identität antworten. Somit ist sicher vorauszusagen: für jeden Punkt $x, y, z, w \ldots$, für welchen

$$G = 0$$

erfüllt ist, muss

$$G' = 0$$

identisch erfüllt sein, d. h. in geometrischer Sprechweise: die Fläche $G$ muss einen Teil von $G'$ bilden.

Da die Substitutionsformeln $\varphi$ sicher linear ausfallen werden, so muss überhaupt die Fläche $G'$ mit $G$ zusammenfallen; d. h. die Form $G'$ muss sich herausstellen als mit $G$ bis auf einen constanten Factor identisch.

Die Beziehung zwischen $(x, y, z, w \ldots)$ und $(X, Y, Z, W \ldots)$ ist geometrisch eine reciproke bei festliegendem Systeme $a, b, c, d \ldots$; demnach muss die Auflösung der Gleichungen

$$X = \varphi_1(x, y, z, w \ldots), \qquad Y = \varphi_2(x, y, z, w \ldots) \quad \text{u. s. w.}$$

nach den $x, y, z, w \ldots$ genau dieselben homolog gelegenen Coefficienten aufweisen, wie die Functionen $\varphi$ selbst deren besitzen: unsere Transformation wird eine „involutorische" sein und jedenfalls die „Fläche" $G$ in sich selbst transformiren. Die Herstellung eines geeigneten gemeinschaftlichen Nenners für die $\varphi$-Functionen — um die Substitutions-Determinante $= -1$ zu erhalten — bildet eine Hilfsaufgabe; ist dieselbe gelöst, so würde für die independente Darstellung von „involutorisch-orthogonalen" Substitutionen durch $n-1$ Parameter $a:b:c:d \ldots$ das Material gewonnen sein.

Wir schreiten nun zur effectiven Bestimmung der $\varphi$-Functionen. Der unbekannte Durchstosspunkt $X, Y, Z, W \ldots$ hat als Punkt der Verbindungslinie von $(a, b, c, d \ldots)$ nach $(x, y, z, w \ldots)$ die Coordinaten

S

$$\begin{cases} X = \mu a + \lambda x \\ Y = \mu b + \lambda y \\ Z = \mu c + \lambda z \\ W = \mu d + \lambda w \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Einführung dieser Ausdrücke in

$$G = 0$$

liefert

$$\mu^2(a^2 + b^2 + \ldots) + 2\lambda\mu(ax + by + cz + dw + \ldots) \\ + \lambda^2(x^2 + y^2 + \ldots) = 0$$

da aber nach Voraussetzung $(x, y, z, w \ldots)$ auf

$$G = 0$$

gelegen, also

$$x^2 + y^2 + \ldots = 0$$

so erhält man

$$\mu(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots) + 2\lambda(ax + by + cz + \ldots) = 0$$

Demnach hat man zu setzen:

$$\mu : \lambda = 2(ax + by + cz + \ldots) : -(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)$$

Somit wären die Coordinaten des Punktes $X, Y, Z, W \ldots$ bestimmt durch Einsetzen in $G$:

$$\varphi_1 = X = 2(ax + by + cz + \ldots) \cdot a - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)x$$
$$\varphi_2 = Y = 2(ax + by + cz + \ldots) \cdot b - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)y$$
$$\varphi_3 = Z = 2(ax + by + cz + \ldots) \cdot c - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots)z$$

u. s. w. [1])

In der Tat wird nun die Einführung dieser $\varphi$-Functionen statt der $x, y, z, w \ldots$ in die ursprüngliche Gleichung

$$G = 0$$

das Resultat ergeben: (unsere oben vorausgesagte „Tautologie")

---

1) Dieselben Formeln finden sich in dem Aufsatze von Herrn A. Voss: „Ueber orthogonale Substitutionen": Mathem. Annalen; Band 13. (1878) pag 341.

$$4(ax+by+cz+dw+\ldots)^2.(a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots)$$
$$-4(a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots).(ax+by+cz+dw+\ldots)^2$$
$$+(a^2+b^2+e^2+d^2+\ldots)^2.(x^2+y^2+z^2+w^2+\ldots)=0$$

oder

$$G'' \qquad (a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots)^2.G=0$$

Demnach hat die Einführung der $\varphi$ statt der $x, y, z, w \ldots$ die Wirkung einer „involutorisch-orthogonalen" Substitution für die homogene Function $G$ — zunächst aber noch bis auf das Hinzutreten des Factors $(a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots)^2$.

Die $\varphi$-Functionen sind, ausgerechnet:

$$T \quad \begin{cases} X=\varphi_1=(a^2-b^2-c^2-\ldots)x+2ab\,y+2acz+\ldots \\ Y=\varphi_2=2ba\,x+(-a^2+b^2-c^2-d^2-\ldots)y+2bcz+\ldots \\ Z=\varphi_3=2ca\,x+2cb\,y+(-a^2-b^2+c^2-d^2-\ldots)z+\ldots \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Dividirt man aber jede derselben durch

$$N=a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots$$

so wird dieser gemeinschaftliche Nenner $N$ in der umgeformten quadratischen Function $G$ durchweg im Quadrat auftreten, somit sich gegen den Factor $(a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots)$ im Ausdrucke für $G''$ fortheben.

Wir fügen, der bessern Uebersicht wegen, die Coefficienten als Determinante zusammengestellt, hier ein:

T

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2-\ldots & 2ab & 2ac & \ldots \\ 2ba & -a^2+b^2-c^2-d^2-\ldots & 2bc & \ldots \\ 2ca & 2cb & -a^2-b^2+c^2-d^2-\ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Hiermit erscheint unser Problem für homogene Functionen, die nur Quadrate der Veränderlichen enthalten, vollständig gelöst.

Die Formeln $T$ sind im Einklange mit den früher durch Induction gefundenen Ausdrücken $A_4$; den Beweis für ihre Eigenschaften brauchen wir nicht mehr durch Ausrechnung zu erbringen; er liegt in dem Gedankengange, dem sie ihre Existenz verdanken.

## II. Lineare involutorische Substitution für allgemeine quadratische Formen.

### § 5. Herstellung der Substitutions-Coefficienten; Eigenschaften ihrer Determinante.

Wir werden im Folgenden die rasch fördernde Methode der symbolischen Rechnung ausschliesslich benutzen — durch ihre Anwendung wird sich die Lösung der uns vorliegenden Aufgabe, sowie der Nachweis für einige merkwürdige, höchst allgemeine Determinanten-Relationen besonders übersichtlich gestalten.

Es sei eine homogene quadratische Form von $\mu$ Variabeln vorgelegt:

$$\text{A} \qquad a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 \equiv d_x^2 \ldots$$

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_\mu x_\mu$$

dann kann ein Punkt $y$ ausserhalb der Fläche

$$A = 0$$

fest angenommen werden, so dass also:

$$a_y^2 \lessgtr 0$$

Wird dieser Punkt $y$ mit einem auf der Fläche sich vorfindenden Punkte $x$ verbunden, so müssen, wie in § 4., die Coordinaten des zweiten Durchstosspunktes $X$ mit der Fläche — auf der Verbindungsgeraden von $x$ nach $y$ — sich einstellen als lineare Functionen von $x_i$.

Man hat nun für $X$, eben weil auf jener Verbindungsgeraden gelegen:

$$X_i = \mu y_i + \lambda x_i; \qquad i = 1, 2, 3 \ldots$$

und daher zur Bestimmung von $\mu : \lambda$ die Gleichung

$$A' = 0$$

oder

$$\mu^2 a_y^2 + 2\lambda a_x a_y + \lambda^2 a_x^2 = 0$$

Da nach der Voraussetzung

$$a_x^2 = 0$$

so erhält man

$$\mu : \lambda = 2(a_x a_y) : - a_y^2$$

demnach die „involutorischen" Substitutionen:

$$\text{F} \qquad N . X_i = 2(a_x a_y) y_i - a_y^2 . x_i$$

Um für diese $X$ einen Nenner $N$ zu bestimmen, welcher nach der Transformation die Form $a_x^2$ vollständig identisch mit sich selbst — ohne Zahlenfactor — erscheinen lässt, haben wir nachträglich die Wirkung der Substitutionen $F$ in

$$\text{A} = 0$$

zu untersuchen.

Die Substitutionen $F$ ergeben nun:

$$\text{A}' \qquad 4(a_x a_y)(d_x d_y) b_y^2 - 4(a_x a_y) . c_y^2 b_x b_y + (c_y^2)(d_y^2) . b_x^2 = 0$$

Man erkennt dies durch wirkliche Einführung der für die $X$ bestimmten Ausdrücke:

$$\text{A}' \qquad [2(a_x a_y) . b_y - c_y^2 . b_x]^2 = 0$$

denn dies gibt, nach Taylor's Theorem entwickelt, genau unsere obige Form — indem wir weitergehend noch neue Symbole einführten, um im Resultate $A'$ die Vieldeutigkeit der symbolischen Ausdrücke zu vermeiden.

Die beiden ersten Glieder der Summe $A'$ zerstören sich nun identisch, somit wird durch die Verwendung der $X$-Formeln sich die Gleichung

$$A = 0$$

mit dem constanten Factor $(a_y^2)(b_y^2)$ behaftet — einstellen; dividirt man also gleichmässig sämtliche $X$ durch (die Zahl) $a_y^2$, so wird identisch

$$A' \equiv A$$

Wir stellen demnach die Tabellen $T_X$, $T$ der „involutorischen" Substitution auf, welche „die Form $A$ identisch in sich selbst transformirt":

Tx $$a_y^2 \,.\, X_i = 2(a_x a_y) y_i - (a_y^2) x_i$$

oder (beispielsweise ausgerechnet für $\mu = 3$):

$$\mathrm{T} \quad \begin{vmatrix} \frac{2y_1(a_1 a_y) - a_y^2}{N} & \frac{2y_1(a_2 a_y)}{N} & \frac{2y_1(a_3 a_y)}{N} \\ \frac{2y_2(b_1 b_y)}{N} & \frac{2y_2(b_2 b_y) - b_y^2}{N} & \frac{2y_2(b_3 b_y)}{N} \\ \frac{2y_3(c_1 c_y)}{N} & \frac{2y_3(c_2 c_y)}{N} & \frac{2y_3(c_3 c_y) - c_y^2}{N} \end{vmatrix}$$

$$N = d_y^2 \lesseqgtr 0$$

Ohne jede Ausrechnung können wir aus der geometrischen Entstehungsart dieser Determinante, wonach die Substitutionen $T$ involutorisch sein müssen, voraussagen:

„Es sei in der Determinante $T$ das $k$te Glied der $i$ten Zeile mit $a_{ik}$ bezeichnet, ferner mit $A_{ik}$ die Unterdeterminante der Stelle $a_{ik}$. Man hat dann identisch:

$$a_{ik} = A_{ki}\ ^{1)}$$

Schreibt man nämlich die $Tx$ Substitutionen mit Hilfe der $a$:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ X_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ X_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}$$

so ist nach unserer geometrischen Herleitungsweise erwiesen, dass umgekehrt:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \\ x_2 &= a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \\ x_3 &= a_{31} X_1 + a_{22} X_2 + a_{33} X_3 \end{aligned}$$

Aber nach den Regeln der Algebra würde man erhalten haben:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= A_{11} X_1 + A_{21} X_2 + A_{31} X_3 \\ \Delta x_2 &= A_{12} X_1 + A_{22} X_2 + A_{32} X_3 \\ \Delta x_3 &= A_{13} X_1 + A_{23} X_2 + A_{33} X_3 \end{aligned}$$

wobei $\Delta$ die ausgerechnete Determinante $T$. Um nun $T$ auszuwerten, lassen wir zunächst zur Einfachheit den Nenner weg — und können die so entstandene Determinante $\Delta'$ nach den Potenzen der 3 in der Diagonale sich hervorhebenden Glieder $a_y^2$, $b_y^2$, $c_y^2$ entwickeln.

1) Obige Fassung gilt für unser Beispiel einer $T$-Determinante für $\mu = 3$; allgemein ist dagegen

$$\varepsilon a_{ik} = A_{ki}, \quad \varepsilon = (-1)^{\mu-1}$$

Wir erhalten zunächst als Product dieser drei Grössen: $-(a_y^2)^3$.

Fassen wir dann die Producte von je zweien jener 3 Grössen ins Auge, so finden wir als weiteres Glied der Entwicklung:

$$a_y^2 . b_y^2 . 2y_3(c_3 c_y) + b_y^2 . c_y^2 . 2y_1(a_1 a_y) + c_y^2 . a_y^2 . 2y_2(b_2 b_y)$$
$$= 2(a_y^2)^2\{y_3 d_3 d_y + y_2 d_2 d_y + y_1 d_1 d_y\}$$
$$= 2(a_y^2)^2 . d_y^2 = 2(a_y^2)^3$$

Um jene Glieder von $\varDelta'$ zu bestimmen, welche $a_y^2$, $b_y^2$, $c_y^2$ gar nicht enthalten, haben wir an Stelle dieser Grössen 0 einzusetzen; so erhalten wir als Factor von $(a_y^2)^0$:

$$2y_1 . 2y_2 . 2y_3 . \begin{vmatrix} a_1 a_y & a_2 a_y & a_3 a_y \\ b_1 b_y & b_2 b_y & b_3 b_y \\ c_1 c_y & c_2 c_y & c_3 c_y \end{vmatrix}$$

was offenbar verschwindet —; der gleiche Schluss würde auch gelten für die Factoren — etwa $\begin{vmatrix} a_1 a_y & a_2 a_y \\ b_1 b_y & b_2 b_y \end{vmatrix}$ der ersten Potenzen — etwa $c_y^2$ — jener 3 hervorgehobenen Glieder.

Demnach ist

$$\varDelta' = -(a_y^2)^3 + 2(a_y^2)^3 = +(a_y)^3$$

dies gibt nach Division mit dem Kubus des Nenners $(a_y^2)$ den Wert $\varDelta$, oder $T = +1$.

(Im allgemeinen Falle ist $\varDelta = (-1)^{\mu-1}$).

Zu unseren Formeln für $\varDelta . x_i$ und $x_i$ zurückkehrend, finden wir somit den ausgesprochenen Satz

$$a_{ik} = A_{ki}$$

bestätigt.

Zahlenbeispiel für Aufstellung einer Coefficiententabelle und deren Untersuchung.

Der Kreis

$$K \qquad x_1^2 + x_2^2 - 12x_3^2 + 6x_2 x_3 + 4x_3 x_1 = 0$$

mit dem Mittelpunkte $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ und vom Radius $= 5$ kann transformirt werden mit Zugrundelegung eines Punktes, wie

$$1, \quad 2, \quad 1$$

der nicht auf ihm gelegen, $((a_y^2) = 9)$.

Die Tabelle $F$ der $X$-Substitutionen ergibt sich als

$$9X_1 = 2[(x_1+2x_3).1+(x_2+3x_3).2+(2x_1+3x_2-12x_3.1].1-9x_1$$
$$9X_2 = 2[(x_1+2x_3).1+(x_2+3x_3).2+(2x_1+3x_2-12x_3).1].2-9x_2$$
$$9X_3 = 2[(x_1+2x_3).1+(x_2+3x_3).2+(2x_1+3x_2-12x_3).1].1-9x_3$$

oder ausgerechnet:

$$9X_1 = -\ 3x_1+10x_2-\ 8x_3$$
$$9X_2 = \ 12x_1+11x_2-16x_3$$
$$9X_3 = \ 6x_1+10x_2-17x_3$$

Diese Formeln geben also zunächst, wenn ein Punkt beliebig auf der Kreisperipherie vorgegeben, etwa 1, 1, 1, denjenigen Punkt $X$, wo die Verbindungslinie vom festen Punkte 1, 2, 1 nach dem beweglichen Punkte (1, 1, 1) hin zum zweitenmale den Kreis trifft. Dem Punkte 1, 1, 1 entspräche

$$9X_1 = -1, \quad 9X_2 = 7, \quad 9X_3 = -1$$

Zweitens aber werden die Formeln für die $X_i$, an Stelle der $x_i$ in die Kreisgleichung eingeführt, dieselbe identisch in sich transformiren; und schliesslich ergibt sich durch Auflösung der 3 Gleichungen nach $x_i$:

$$9x_1 = -\ 3X_1+10X_2-\ 8X_3$$
$$9x_2 = \ 12X_1+11X_2-16X_3$$
$$9x_3 = \ 6X_1+10X_2-17X_3$$

Wie unsre früher gegebenen Formeln (§§ 1.—4.) nur äusserst specialisirte Fälle des in diesem Paragraphen gelösten, viel allgemeineren, Problems bilden, kann an dieser Stelle am besten überschaut werden. Die dort in die Substitutionsformeln eingeführten Summen:

$$2(ax+by+cz+\ldots) \qquad \text{oder} \qquad (a^2+b^2+c^2+\ldots)$$

sind nichts andres als die Polaren und Formen $2(a_x a_y)$, $a_y^2$ dieses Paragraphen; die feste Gruppe $a, b, c, d \ldots$ entspricht dem nunmehr benutzten festen Punkte $y$.

Ist der zu transformirende Punkt $x$ so gelegen, dass

$$(a_x a_y) = 0$$

so fällt $X$ mit $x$ zusammen, wie aus den Formeln $F$ ersichtlich.

## § 6. Formale Erweiterungen der gefundenen Formen, sowie verallgemeinerte Anwendungen derselben.

Wenn wir die Formeln $T$ des letzten Paragraphen ins Auge fassen und uns daran erinnern, dass die Coordinaten $y$ fest gegebene Zahlen vorstellen, so lehrt eine kurze Ueberlegung, dass für unser ganzes Transformationsproblem nicht die einzelnen Coefficienten $a_{ik}$ der zu transformirenden Form $a_x^2$ wesentlich sind, sondern immer nur gewisse Verbindungen derselben mit den Zahlen $y$, nämlich die Ausdrücke $(a_1 a_y)$, $(a_2 a_y)$ ... $(a_\mu a_y)$; so dass man also recht wol den Coefficienten $a_{ik}$ ganz neue Werte geben kann, wenn nur jene Verbindungen, beispielsweise

$$(a_1 a_y) = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + \ldots + a_{1\mu} y_\mu$$

bei gleichgebliebenen $y_i$ ihren effectiven Zahlenwert nicht ändern.

Man kann also jene Ausdrücke gleichsetzen resp. $(\beta_1 \beta_y)$, $(\beta_2 \beta_y)$ ... $(\beta_\mu \beta_y)$, entstanden aus einer ganz neuen Form $\beta_x^2$. So wird also durch die Transformation $T$ nicht nur die Form $a_x^2$ in sich transformirt, sondern auch die mit vollständig verschiedenen Coefficienten versehene Form $\beta_x^2$, wenn eben nur immer

$$(\beta_1 \beta_y) = \varrho (a_1 a_y), \qquad (\beta_2 \beta_y) = \varrho (a_2 a_y) \quad \text{u. s. w.}$$

Hier stehen rechts auszurechnende Zahlengrösssen — im ganzen erhält man $\mu$ Gleichungen für $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ wesentliche Unbekannte, nämlich die neuen Coefficienten $\beta_{ik}$.

Zahlenbeispiel. Es sei vorgegeben gewesen die Summe $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; sowie der „transformirende Punkt“ $y(1, 2, 3)$. Man erhält zunächst

$$(a_1 a_y) = 1, \quad (a_2 a_y) = 2, \quad (a_3 a_y) = 3$$

Stellt man nun die Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
\beta_1 \beta_y &= \beta_{11} . 1 + \beta_{12} . 2 + \beta_{13} . 3 = \varrho . 1 \\
\beta_2 \beta_y &= \beta_{21} . 1 + \beta_{22} . 2 + \beta_{23} . 3 = \varrho . 2 \\
\beta_3 \beta_y &= \beta_{31} . 1 + \beta_{32} . 2 + \beta_{33} . 3 = \varrho . 3
\end{aligned}$$

welches System beispielsweise befriedigt wird durch $(\beta_{ki} = \beta_{ik})$:

$$\varrho = 27; \quad \beta_{11} = 15, \quad \beta_{12} = -3, \quad \beta_{13} = 6, \quad \beta_{22} = 12, \quad \beta_{23} = 11,$$
$$\beta_{33} = \tfrac{53}{3}$$

so würde die auf den Punkt $y(1, 2, 3)$ sich stützende orthogonal-involutorische Transformation der Summe $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, nämlich (§ 4.)

$$\begin{aligned} NX_1 &= -12x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ NX_2 &= 4x_1 - 6x_2 + 12x_3 \\ NX_3 &= 6x_1 + 12x_2 + 4x_3, \quad N = 14 \end{aligned}$$

eine solche sein, dass sie auch den Kegelschnitt

$$\beta_y^2 \equiv 15x_1^2 - 6x_1x_2 + 12x_2^2 + 12x_1x_3 + 22x_2x_3 + \tfrac{53}{3}x_3^2 = 0$$

in sich transformirt — sie würde nebenbei auch die Punkte dieses Kegelschnitts involutorisch ordnen.

Ueber 4 Coefficienten $\beta_{ik}$ kann hier vor Auflösung der sie definirenden Gleichungen

$$\beta_i \beta_y = a_i a_y$$

willkürlich verfügt werden — allgemein über $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$; aber trotzdem wäre es ein Cirkelschluss, wenn man annehmen wollte, dass durch diese Verfügungsfreiheit über die $\beta$ etwa eine Verallgemeinerung in der Parameterdarstellung der involutorisch-orthogonalen Substitutionen erreicht wäre.

Nachdem wir nun für die Entstehung der Formeln eine Erweiterung erreicht haben — wenigstens eine formale — kann auch eine Ausdehnung ihrer Verwendbarkeit nachgewiesen werden.

Wir wissen, dass die Formeln $F$, $T_X$ involutorischen Charakter haben — zunächst in geometrischer Weise und zwar für Punkte der Fläche

$$a_x^2 = 0$$

die Coefficienten- und Variabeln-Verbindungen aber, wie sie vom Verein der Transformationsformeln vorgestellt werden, bringen diesen Charakter auch algebraisch zum Ausdruck durch das Bestehen von formalen Identitäten, wie etwa die wichtigste

$$F(X) = x$$

in welchen dann den Symbolen $x$ für die Veränderlichen nicht mehr die Beschränkung anhaftet nur als Coordinaten von Punkten auf einer gewissen Fläche anerkannt zu werden.

Demnach transformiren alle bisher gebrachten Transformationsformeln nicht nur die Punkte der jeweilig ins Auge gefassten Fläche

$$a_x^2 = 0$$

in Punkte derselben Fläche, sondern sie ordnen in involutorisch-collinearer Weise alle Punkte des $(\mu-1)$-dimensionalen Raumes einander paarweise zu.

Für diese involutorische Raumtransformation ist nach dem Schlusse von § 5. die Fläche

$$a_x a_y = 0$$

der Ort der sich selbst zugeordneten Punkte:

$$X = x$$

Unsere Formeln $Tx$ gestatten überdies noch eine einfache Ableitung des Satzes:

„Die Fläche

$$a_x a_y = 0$$

trennt mit dem festen Punkte $y$ jedes sich entsprechende Punktepaar $x$, $X$ harmonisch."

Denn es sei $x'$ ein auf der Fläche

$$a_x a_y = 0$$

gelegener Punkt, daher

$$a_{x'} . a_y = 0$$

wir wollen dann zum Punkte

$$y_i + \lambda x'_i = \sigma z_i$$

den nach unseren Formeln conjugirten Punkt $Z$ bestimmen.

Das Einsetzen in die Tabelle $Tx$ ergibt als zugeordneten Punkt $Z$:

$$\varrho . Z_i = 2(a_y^2 + \lambda a_x' . a_y) y_i - a_y^2 . (y_i + \lambda x'_i)$$

da aber

$$a_x' . a_y = 0$$

so hat man

$$\varrho . Z = a_y^2 . \{y_i - \lambda x'_i\}$$

demnach

$$\sigma . z_i = y_i + \lambda x_i ; \quad \varrho . Z_i = y_i - \lambda x_i'$$

was zu beweisen war.

Zusammenfassend also und wieder anknüpfend an das im Eingange Bemerkte: Nachdem eine Fläche

$$a_x^2 = 0$$

aufgestellt und benutzt worden ist, um eine involutorische Raum-Transformation zu liefern, ist es nicht mehr nötig, sie für jene durch sie erzeugte Transformation ausschliesslich beizubehalten — im Gegenteile sind dann unendlich viele Flächen

$$\beta_x^2 = 0$$

nachweisbar als geeignet die Stelle der

$$a_x^2 = 0$$

zu ersetzen; das Charakteristische einer solchen Transformation ist vereinigt in den $\mu$ Coordinaten $(a_i a_y)$ der ebenen Fläche

$$a_x a_y = 0$$

Oder auch: Bei Involutionen dieser Art darf der transformirende Punkt $y$, sowie die Zahlenwerte der Coordinaten der Fläche der Doppelelemente beliebig vorgegeben sein, — nachträglich können dann Flächen

$$a_x^2 = 0$$

gefunden werden, die gleichfalls geeignet wären jene Transformation zu ermitteln.

Anm. I. Von Herrn Mansion, Nouvelle correspondance de mathématiques, Bnd. IV., p. 257. wurde bewiesen, dass jede lineare involutorische Zuordnung von der Art sein muss wie unser aufgestelltes System, d. h. dass sie sich stützen muss auf einen „transformirenden Punkt", sowie ein lineares Gebilde, welches die Doppelelemente der Zuordnung enthält.

Anmerkung II. Ist vorgegeben

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{\mu-1} = 0; \quad y_\mu \gtrless 0$$

sowie als Gleichung der Fläche der sich selbst entsprechenden Elemente

$$a_y = 0$$

die folgende

$$x_\mu = 0$$

so nehmen wir als transformirende Fläche zweiten Grades

$$\beta_x^2 = 0$$

die folgende

$$x_\mu^2 = 0$$

Ihre Anwendung gibt die Transformationsformeln

$$\begin{cases} (a_\mu y_\mu) \,.\, X_i = -(a_\mu y_\mu) \,.\, x_i; \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots (\mu - 1) \\ (a_\mu y_\mu) \,.\, X_\mu = +(a_\mu y_\mu) \,.\, x_\mu \end{cases}$$

Für 3 oder 4 Veränderliche kann man mit

$$x_\mu = 0$$

die Vorstellung der Gleichung einer endlichen Coordinatenfläche (— Axe für $\mu = 3$), oder der Gleichung der sogenannten „unend-

lich fernen" Punkte verbinden. Man erhält dann als geometrische Deutung unsrer algebraischen Specialisirung in dem einem Falle jene Transformation, für welche die Bezeichnung „Spiegelung" üblich; im andern Falle jene Zuordnung, wo zwei Punkte $X$ und $x$ jeweilig die entgegengesetzt gleiche Entfernung und Richtung vom sogenannten „Anfangspunkte" 0, 0, 0, ... 1 aus aufweisen. Der involutorische Charakter dieser beiden Transformationen ist evident.

## III. Involutorische Transformationen von Formen dritten Grades.

### § 7. Involutorisch-rationale Transformation einer homogenen Form 3ten Grades in sich selbst.

1. Es sei vorgegeben

$$a_x^3 = b_x^3 = c_x^3$$

sowie ein Zahlensystem (Punkt) $y$, für welches

$$a_y^3 = 0$$

erfüllt ist.

Die Verbindungsgerade

$$X = \mu y + \lambda x$$

trifft, wenn $x$ ein beliebiger Punkt auf der Fläche

A $$a_x^3 = 0$$

diese Fläche zum drittenmale in einem Punkte $X$, dessen Coordinaten rational ausdrückbar sein müssen durch die von $x$, sowie jene des festen Punktes $y$.

Wie früher schliessen wir weiter: angenommen, man habe Formeln $\overset{(y)}{\varphi_i}(x)$ construirt, welche in ihrem geometrischen Aufbau uns verbürgen, dass immer der Punkt

$$X_i = \varphi_i$$

auf der Fläche A:

$$a_x^3 = 0$$

sich befindet, wenn $y$ und $x$ darauf liegen, so muss — als mathematische Identität — sich beim Einsetzen dieser $\varphi$-Functionen in die Flächengleichung:

A'
$$a_\varphi^3 = 0$$

ergeben, dass $A$ ein Divisor von $A'$ ist.

Denn stellen wir uns einen der unendlich vielen Punkte der Fläche

$$a_x^3 = 0$$

vor, etwa $x'$, so weiss man schon, dass nach effectiver Berechnung der $\varphi$-Functionen bei Einsetzung der Zahlen $x_1', x_2', \ldots x_\mu'$ in

$$A' = 0$$

(welch letzeres die Symbole $x_1, x_2 \ldots$ enthält), $A'$ deswegen verschwindet, weil der Punkt $\varphi$ auf $A$ gelegen.

Da dies nun aber für jeden der unendlich vielen Punkte $x'$ auf $A$ gilt, so muss der algebraische Ausdruck von $A'$ — der durch die Allgemeinheit seiner alle Zahlen umfassenden Buchstabenzeichen $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ alle Punkte einer Fläche $A$ aufzunehmen geeignet ist, indem man eben nach

$$a_x^3 = 0$$

nebenbei schreibt —, durch eine zwischen $A$ und $A'$ bestehende Identität von der Form

$$A = f \,.\, A'$$

die logisch festgestellte Tatsache sichtbar machen, dass eine beliebige Zahlengruppe $x_1' \ldots x_\mu'$ mit

$$A = 0 \quad \text{auch} \quad A' = 0$$

erfüllt ($f$ darf dabei selbst eine Function der $x$ sein). D. h. die Ausrechnung wird und muss zum Ausdruck bringen, dass die Fläche

$$A = 0$$

einen Teil der transformirten Fläche

$$A' = 0$$

bildet.

Um die Transformation wirklich herzustellen, setzen wir

$$X_i = \mu y_i + \lambda x_i \quad \text{in} \quad a_x^3 = 0$$

ein, um zu erhalten:

A
$$\mu^3 a_y^3 + 3\mu^2\lambda\, a_y^2 a_x + 3\mu\lambda^2 a_y a_x^2 + \lambda^3 a_x^3 = 0$$

wobei vorausgesetzt wird:

$$a_y^3 = 0, \qquad a_x^3 = 0$$

Wir finden:

$$\mu a_y^2 a_x + \lambda a_y a_x^2 = 0$$

daher

$$\mu : \lambda = (a_y a_x^2) : -(a_y^2 a_x)$$

Schliesslich hat man

$$T_X \qquad X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

Diese Zuweisung $T$ ist eine involutorische; denn wäre $y$ sowie ein bestimmtes, aus $x'$ errechnetes $X'$, vorgegeben, so würde sich als dritter Schnittpunkt mit der Fläche auf der Verbindungsgeraden $yX'$ offenbar wieder der Punkt $x'$ einstellen müssen, der zur Herstellung von $X'$ gedient hat [1]).

Durch Einsetzen des Wertes von $X$ in die Flächengleichung erhalten wir $A'$ und erfahren dabei, welches der Factor $f$ ist, um welchen $A'$ gegen $A$ multiplicativ vermehrt erscheint:

$$A'\,{}^{2)} \quad (a_y a_x^2)^3 . c_y^3 - 3(a_y a_x^2)^2 . (b_y^2 b_x) c_{y_i}^2 . c_x + 3(a_y a_x^2) . (b_y^2 b_x)^2 . c_y c_x^2 - (b_y^2 b_x)^3 . c_x^3 = 0$$

(hierzu ist die Gleichung $A$ mit dem Symbole $c$ geschrieben worden, ebenso $T_X$ mit $a$ und $b$).

Nun ist nach der Voraussetzung

$$c_y^3 = 0$$

Demnach erscheint die ursprüngliche Form behaftet mit dem Kubus eines linearen Factors $-(b_y^2 b_x)$. Will man demnach Formeln aufstellen, für deren Anwendung die Ueberführung von $A$ nach $A'$ eine vollständig identische ist, auch der Form nach, so hat man statt $T_X$ verbessernd zu schreiben:

$$NX_i = -(a_y a_x^2) y_i + (a_y^2 a_x) x_i; \quad N = (a_x a_y^2)$$

Es sei bemerkt, dass für den Punkt

$$x_i = y_i$$

alle Transformationsformeln illusorisch werden. Denn man hat, mit oder ohne Nenner schreibend:

---

1) Es sei hervorgehoben, dass der involutorische Charakter der Involution $T_x$ nur erkannt ist, so lange Punkte der vorgegebenen Fläche $A$ transformirt werden. Dass obige Formeln überhaupt involutorisch sind, für alle Punkte $(x_1, x_2 \dots x_\mu)$, wird später (§§ 8—10.) erwiesen werden.

2) Hier bedeuten die Klammern, dass jeder in ihnen enthaltene Ausdruck durch effective Bestimmung der Symbole ausgerechnet und dann erst Potenzirt werden soll. Strenger wäre $(a_x^2 a_x) . (d_x^2 d_y) . (e_x^2 e_y)$ u. s. w

$$X_i = (a_y^3)y_i - (a_y^3)x_i = 0$$

wegen

$$a_y^3 = 0$$

Andrerseits entspricht jedem Punkte $x'$, für welchen

$$a_y^2 a_x' = 0 \quad \text{ist,}$$

$$X_i = (a_y a_{x'}^2) y_i$$

d. h. der ganzen Fläche

$$a_y^2 a_x = 0$$

entspricht der einzige Punkt $y$.

Die $\mu$ Ausdrücke der $X_i$ stellen also Flächen zweiten Grades vor, die den Punkt $y_1, y_2 \ldots y_\mu$ gemeinschaftlich besitzen; man kann aber leicht zeigen, dass sie sich sämtlich dort berühren [1])

Um dies nachzuweisen, bilden wir die Gleichung der Polarfläche einer solchen Fläche $X_i$, genommen für den Punkt $y_1, y_2 \ldots y_\mu$ als Pol und geschrieben mit $z$ als laufenden Coordinaten.

$$X_i = (a_y a_z^2) y_i - (a_z a_y^2) z_i$$

gibt polarisirt:

$$2(a_y \,.\, a_y \,.\, a_z) y_i - a_y^2\{y_i a_z + z_i a_y\} = y_i \,.\, (a_y^2 a_z)$$

da

$$a_y^3 = 0$$

Diese Tangentenfläche ist daher dieselbe für alle $\mu$ Flächen $X_i$; sie ist überdies die Tangentenfläche an die vorgegebene Fläche dritten Grades

$$a_x^3 = 0$$

Wir werden diese geometrischen Untersuchungen später erledigen und kehren zu unsern Formeln für $NX$ zurück, um denselben den Satz zu entnehmen:

„Für eine Function von höherem Grade als dem zweiten ist es — im allgemeinen und auf einen beliebigen Punkt $y$ sich stützend — nicht möglich durch ganze Functionen der Variabeln als Transformationsformeln $X$ die Form in sich selbst ohne Factor überzuführen."

Specielle Beispiele für $\mu = 3$.

A $$\alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + \gamma x_3^3 + 6k \,.\, x_1 x_2 x_3 = 0$$

liefert

1) Diese Berührung ist nicht die gewöhnliche, sondern die innigste zunächst der Identität.

$$(a_y{}^2 a_x) = x_1(\alpha y_1{}^2 + 2k y_2 y_3) + x_2(\beta y_2{}^2 + 2k y_3 y_1) + x_3(\gamma y_3{}^2 + 2k y_1 y_2) = N$$

$$(a_y a_x{}^2) = y_1(\alpha x_1{}^2 + 2k x_2 x_3) + y_2(\beta x_2{}^2 + 2k x_3 x_1) + y_3(\gamma x_3{}^2 + 2k x_1 x_2) = M$$

Die Substitutionen:

$$-N.X_i = My_i - N.x_i$$

liefern **ersten s**, wenn 2 Punkte der Curve $A$ bekannt sind, $y$ und $x$, den dritten Schnittpunkt der Geraden $xy$ mit der Curve, $X$, rational; sie besitzen zweitens die involutorische Eigenschaft, d. h. sie geben nach $x_i$ aufgelöst genau dieselben Functionen $\varphi_i$ in den $X_i$, welche aus den $x_i$ die $X_i$ direct zu bilden gestatten; und ihre Einführung in die Gleichung der Curven dritter Ordnung $A$, an Stelle der $y$, wird diese Gleichung identisch in sich überführen.

Zahlenbeispiel. Sei vorgegeben

$$\alpha = \beta = \gamma = 1; \quad k = -\tfrac{5}{6}$$

d. h.

A $$x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 - 5x_1 x_2 x_3 = 0$$

als $y$ sei gewählt der Punkt

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1$$

Die ausgerechneten Transformationsformeln sind

$$\varrho . X_1 = 2x_2{}^2 + x_3{}^2 - 4x_1 x_2 - x_1 x_3 - \tfrac{5}{3}(x_2 x_3 - 2x_1{}^2)$$
$$\varrho . X_2 = 2x_1{}^2 + 2x_3{}^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \tfrac{5}{3}(4x_1 x_3 - x_2{}^2)$$
$$\varrho . X_3 = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - x_1 x_3 - 4x_2 x_3 - \tfrac{5}{3}(x_1 x_2 - 2x_3{}^2)$$

Die Einsetzung

$X_1{}^3 + X_2{}^3 + X_3{}^3 - 5X_1 X_2 X_3$ gibt $(x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 - 5x_1 x_2 x_3).(x_1 - x_2 + x_3)^3$

bis auf einen Zahlenfactor; die 3 Kegelschnitte $X_1 X_2 X_3$ gehen durch den Punkt 1, 2, 1; in demselben die Curventangente desselben Punktes, nämlich

$$x_1 - x_2 + x_2 = 0$$

berührend.

Dass sich die 3 Kegelschnitte $X$ in $y$ sogar **dreipunktig** berühren, wird später gezeigt werden.

## § 8. Geometrische Eigenschaften der Functionen, welche die involutorische Substitution vermitteln.

Setzen wir einen der 3 allgemeinen Ausdrücke $\varphi_i$ für die transformirten Coordinaten $X_i$, etwa $\varphi_3$, $= 0$, so hat man

$$\varphi_3 = (a_y a_x^2) y_3 - (a_x a_y^2) x_3 = 0; \quad = X_3$$

Demnach wird jeder Punkt $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, welcher

$$\varphi_3 = 0$$

befriedigt und der Curve

$$a_x^3 = 0$$

angehört, transformirt in einen Punkt

$$\begin{cases} X_1' = \text{endlich} \\ X_2' = \text{endlich} \\ X_3' = 0 \end{cases}$$

demnach liegen alle jene Curvenpunkte $X'$, welche durch unsre Transformationen zugewiesen werden den Schnittpunkten des Kegelschnitts

$$\varphi_3 = 0$$

und der Curve

$$a_x^3 = 0$$

auf der Geraden

$$x_3 = 0$$

Nun hat aber diese Gerade mit der Curve dritten Grades nur 3 Schnittpunkte gemeinschaftlich — daher kann der Kegelschnitt

$$\varphi_3 = 0$$

mit der Curve nur 3 von $y$ verschiedene Schnittpunkte aufweisen; er muss demnach in $y_1 y_2 y_3$ die Curve

$$a_x^3 = 0$$

dreipunktig berühren.

Wir können diesen Schluss leicht verallgemeinern und zugleich neue Sätze gewinnen.

Wenn 3 Punkte $X^I$, $X^{II}$, $X^{III}$ der Curve

$$a_x^3 = 0$$

gleichzeitig auf der Geraden

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

liegen, so ist auch für jeden der drei Punkte $x'$ auf derselben Curve, welche die drei $X$ durch Transformation erzeugt haben:

$$a[(a_y a_{x'}^2) . y_1 - (a_x a_y^2) x_1'] + b[(a_y a_{x'}^2) y_2 - (a_x a_y^2) x_2'] + c[(a_y a_{x'}^2) y_3 - (a_x a_y^2) x_3'] = 0 \qquad \text{D}$$

dazu noch

$$a_{x'}^3 = 0$$

sie sind also Schnittpunkte des Kegelschnitts $D$ mit der Curve.

Dieser Kegelschnitt $D$ nun hat an der Stelle $y$ genau dieselbe Tangente

$$a_x a_y^2 = 0$$

wie die 3 einzelnen Kegelschnitte $\varphi_i$, aus welchen er additiv zusammengesetzt ist; d. h. $D$ berührt die vorgegebene Curve

$$A = 0 \quad \text{oder} \quad a_x^3 = 0$$

im Punkte $y$ —; einstweilen also wäre eine — zweipunktige Berührung in $y$ erkannt.

Nun gilt aber als Anwendung des bekannten Schnittpunktsatzes von 3 Curven 3ter Ordnung durch 8 Punkte der Lehrsatz:

„Liegen die 3 Punkte $X^I$, $X^{II}$, $X^{III}$ einer Curve dritter Ordnung auf einer Geraden, und sind $x^I$, $x^{II}$, $x^{III}$ deren Projectionen auf dieselbe Curve von einem festen Curvenpunkte $y$ aus, so berührt jener Kegelschnitt $D$, welcher durch $x^I$, $x^{II}$, $x^{III}$ sowie durch zwei in $y$ unmittelbar benachbarte Curvenpunkte geführt werden kann, die Curve dritter Ordnung 3punktig in $y$ [1])".

Demnach berührt unser obiger Kegelschnitt, der durch Transformation aus

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

entstand, in $y$ die vorgegebene Curve dritten Grades

$$a_x^3 = 0$$

dreipunktig.

Somit wird jeder Kegelschnitt von der Form

$$a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 = 0$$

die Curve

$$a_x^3 = 0$$

in $y$ dreipunktig berühren. Denn er geht durch die Projectionen $x$ der 3 Punkte $X$, in welchen die Gerade

---

1) Dieser Satz ist umkehrbar.

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$$

die Curve schneidet — berührt seiner additiven Zusammensetzung nach die Curve zweipunktig, somit nach dem geometrischen Satze sogar dreipunktig.

Anmerkung I. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen gebrauchte einfache Form der Transformation lässt diese Verhältnisse noch deutlicher werden. Der Kegelschnitt $\varphi_3$ für $Z$, nämlich

$$\mathfrak{z} \qquad -(yz + axy + by^2 + cx^2) = 0$$

ist im Endlichen gelegen und schneidet die vorgegebene Curve

$$\mathfrak{a} \qquad yz^2 + z(axy + by^2 + cx^2) + \{\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3\} = 0$$

im Endlichen. Ist nun für einen bestimmten Punkt $x'y'$

$$-(y' \,.\, 1 + ax'y' + by'^2 + cx'^2) = 0$$

zugleich

$$\mathfrak{a} = 0$$

so liegen die transformirten Punkte $X'Y'$ auf der Curve unendlich fern, da der Nenner $Z'$ verschwindet.

Somit liegen die 3 transformirten Punkte der Curve, wie sie den 3 Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{z}$ zuzuordnen sind, auf der unendlich fernen Geraden.

Andrerseits könnte man auf die Lage der transformirten Punkte auch aus der Gleichung schliessen, die für den Punkt $x'y'$ erfüllt sein muss:

$$\alpha x'^3 + \beta x'^2 y' + \gamma x' y'^2 + \delta y'^3 = 0$$

sie gibt 3 Richtungen $\frac{y'}{x'}$, an, in welchen erstens die endlichen Schnittpunkte $x'y'$ der Curve mit dem Kegelschnitte

$$\varphi_3 = 0$$

liegen müssen, ist aber dabei identisch mit der Gleichung, welche die Richtungen der drei unendlich fernen — auf einer Geraden gelegenen — Curvenpunkte bestimmt hätte.

## § 9. Formale Erweiterungen der Transformationsformeln; das Netz von Curven dritter Ordnung, die durch dieselbe involutorisch-quadratische Substitution in sich transformirt werden.

Immer deutlicher tritt der geometrische Charakter unsrer $\varphi$-Functionen, nämlich der einer quadratischen Cremona-Transformation

mit 3 zusammen fallenden Hauptpunkten[1]) hervor — aber wir sind noch nicht berechtigt gewesen diese Bezeichnung principiell anzuwenden, da wir bisher immer nur Geometrie auf einer Curve getrieben haben und nur für deren Transformation, nicht für die ganze Ebene, unsre Formeln construirt wurden. — Die formalen Erweiterungen dieses Paragraphen bereiten den Uebergang von der einzelnen Curve auf die Ebene vor.

Wie früher, bei dem Falle von quadratischen Formen können wie uns fragen nach den Zahlen, welche bei unsrer Transformation von Curven dritter Ordnung in sich selbst wesentlich sind. Stellt sich hierbei heraus, dass deren Anzahl geringer als die der Coefficienten einer solchen Curve, und dass diese 9 Coefficienten nur in gewissen Verbindungen auftreten, deren Anzahl $< 9$, so ist damit die Aussicht eröffnet, dass unendlich viele Curven — wenn eben nur ihre Constanten in jene Zahl von Bedingungen sich fügen, gleichzeitig durch genau identische Substitutionen in sich transformirt werden.

„Für die Transformation einer Curve dritter Ordnung, die sich auf den Curvenpunkt $y$ stützen will, sind nur die 6 Grössen

$$a_1^2 a_y; \quad a_2^2 a_y; \quad a_3^2 a_y; \quad a_{23} a_y; \quad a_{31} a_y; \quad a_{12} a_y$$

wesentlich; d. h. die 6 Coefficienten des Kegelschnitts

$$a_y a_x^2 = 0."$$

Beweis. Man hat zu zeigen: 1) dass jede Curve 3ter Ordnung, für welche 6 Gleichungen bestehen

$$S \quad \begin{cases} \beta_1^2 . \beta_y = a_1^2 . a_y; & \beta_{23} . \beta_y = a_{23} . a_y \\ \beta_2^2 . \beta_y = a_2^2 . a_y; & \beta_{31} . \beta_y = a_{31} . a_y \\ \beta_3^2 . \beta_y = a_3^2 . a_y, & \beta_{12} . \beta_y = a_{12} . a_y \end{cases}$$

den Punkt $y$ enthält, wenn

$$a_y^3 = 0$$

2) dass die Transformationsformeln $\varphi_i$ für die $\beta$-Curve identisch sind mit jenen für die $a$-Curve, solange sich beide auf den Punkt $y$ stützen.

ad 1) Die Gleichung

$$\beta_y^3 = 0$$

kann geschrieben werden:

---

1) Salmon-Fiedler: Höhere ebene Curven. Art. 330.

$$\begin{vmatrix} \beta_1{}^2\beta_y & \cdot\, y_1{}^2 + 2\beta_{23}\beta_y & y_2 y_3 \\ +\beta_2{}^2\beta_y & \cdot\, y_2{}^2 + 2\beta_{31}\beta_y & y_3 y_1 \\ +\beta_3{}^2\beta_y & \cdot\, y_3{}^2 + 2\beta_{12}\beta_y & y_1 y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$a_y{}^3 = 0$$

ferner sind alle hier vorhandenen links vom Striche stehenden Grössen nach der Voraussetzung S gleich den für $a$ entsprechend gebildeten; das Zusammenhalten dieser beiden Voraussetzungen zeigt, dass die Zahlen $y_1 y_2 y_3$ oben eingesetzt die Bedingung

$$a_y{}^3 = 0$$

befriedigen.

2) Ist das System S erfüllt, so sind die beiden Kegelschnitte

$$a_y a_x{}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_y \beta_x{}^2 = 0$$

vollständig identisch. Bildet man nun die Polare des nämlichen Punktes $y$ (seine Tangente) in Bezug auf

$$a_y a_x{}^2 = 0 \quad \text{als} \quad a_y \,.\, a_y \,.\, a_x = a_y{}^2 a_x = 0$$

und andrerseits in Bezug auf

$$\beta_y \beta_x{}^2 = 0 \quad \text{als} \quad \beta_y{}^2 \beta_x = 0$$

so müssen beide Gleichungen der Tangente vollständig übereinstimmen. D. h.

$$a_y{}^2 a_x = 0$$

muss in allen darin vorkommenden 3 Coefficienten identisch sein mit

$$\beta_y{}^2 \beta_x = 0$$

Wenn man will, kann man diesen Schluss deutlich machen durch das Hinschreiben von $\beta_y \beta_x{}^2 = 0$:

$$\begin{vmatrix} \beta_1{}^2\beta_y & \cdot\, y_1 x_1 + \beta_{21}\beta_y & \cdot\, y_1 x_2 + \beta_{31}\beta_y & \cdot\, y_1 x_3 \\ \beta_{12}\beta_y & \cdot\, y_2 x_1 + \beta_2{}^2\beta_y & \cdot\, y_2 x_2 + \beta_{32}\beta_y & \cdot\, y_2 x_3 \\ \beta_{13}\beta_y & \cdot\, y_3 x_1 + \beta_{23}\beta_y & \cdot\, y_3 x_2 + \beta_{33}\beta_y & \cdot\, y_3 x_3 \end{vmatrix}$$

wo wiederum links vom Striche Zahlen stehen, für deren Gleichheit mit den für

$$a_y a_x{}^2 = 0$$

giltigen durch das System S Sorge getragen wurde.

Demnach sind die Formeln

$$\varphi_i = X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i$$

und

$$\varphi_i = X_i = (\beta_y \beta_x^2) y_i - (\beta_x \beta_y^2) x_i$$

identisch bei Bestehen der 6 Relationen S.)

Somit werden durch ein solches, einmal aufgestelltes System der $\varphi_i$ unendlich viele Curven dritter Ordnung mit gemeinschaftlichem Punkte $y$ (und gemeinschaftlicher Tangente in ihm) gleichzeitig in sich selbst transformirt und keine diese Curven ist vor den übrigen ausgezeichnet.

Es sei bemerkt, dass die 4 Punkte, in welchen die 4 von $y$ aus an eine solche Curve möglichen Tangenten dieselbe berühren, auf dem festen Kegelschnitte $(a_y a_x^2) = 0$ liegen; somit auch die Doppelpunkte der im Systeme vorkommenden Curven vom Geschlechte 0. Dass solche Curven

$$\beta_x^2 = 0$$

sich überhaupt unseren Bedingungen $S$ fügen können, wird durch die geringe Zahl der letztern erwiesen.

Unser oft gebrauchtes Beispiel

$$y + axy + by^2 + cx^2 + \{\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3\} = 0$$

gibt bei der Verfügbarkeit über $\alpha\beta\gamma\delta$ die Existenz jenes Curvensystems von gleichen Transformationen nochmals zu erkennen.

## § 10. Erweiterung der Anwendbarkeit der für ebene Curven dritter Ordnung gefundenen Transformationsformeln; Bildung von involutorisch-quadratischen Cremona-Substitutionen der Ebene.

Die Curven

$$\beta_x^3 = 0$$

welche einer vorgegebenen Curve

$$a_x^3 = 0$$

in der Weise des vorigen Paragraphen zugeordnet sind durch die 6 Relationen $S$, überdecken die ganze Ebene. Denn man hat Freiheit genug bei der Bestimmung von ihren 9 Coefficienten um dieselben durch einen beliebigen Punkt $z$ der Ebene hindurchzuführen.

Lehrsatz. „Die Transformationen

$$T\chi \qquad \varphi_i = X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y)^2 x_i$$

ausgerechnet mit Zugrundelegung einer vorgegebenen Curve

$$a_x^3 = 0$$

und eines festen Punktes $y$ auf ihr, sind, wenn angewendet für einen beliebigen Punkt der Ebene, eindeutig umkehrbar und zwar identisch umkehrbar. Man kann ohne Ausrechnung schliessen: setzt man in die Ausdrücke für die $X_i$ nochmals an Stelle der $x_i$ die für $X_i$ gebildeten Ausdrücke ein, so erhält man identisch die Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ wieder (allerdings behaftet mit dem sich gleichmässig einstellenden Factor

$$f = (a_y^2 a_x)^3).“$$

Beweis. Für die Punkte der Curve

$$a_x^3 = 0$$

ist der Satz aus der geometrischen Entstehung (§ 7.) der $\varphi$-Formeln zu folgern.

Ist nun ein Punkt $z$ vorgegeben, so kann man durch ihn eine Curve dritter Ordnung

$$\beta_x^3 = 0$$

legen, mit gleichzeitiger Erfüllung der 6 Bedingungen

$$S \qquad \begin{cases} \beta_1^2 \beta_y = a_1^2 a_y; & \beta_{23} \beta_y = a_{23} a_y \\ \beta_2^2 \beta_y = a_2^2 a_y; & \beta_{31} \beta_y = a_{31} a_y \\ \beta_3^2 \beta_y = a_3^2 a_y; & \beta_{12} \beta_y = a_{12} a_y \end{cases}$$

(dass $\beta_y^3 = 0$ folgt hieraus)

Wendet man auf den Punkt $z$ dieser neuen Curve $\beta$ die Transformation

$$T\chi^{(\beta)} \qquad \varphi_i = X_i = (\beta_y \beta_x^2) . y_i - (\beta_x \beta_y^2) x_i$$

an, welche vollständig in den darin vorkommenden Zahlen mit der für die $a$-Curve gebildeten identisch ist, so entsteht aus dem Curvenpunkte $z$ jener Punkt als zugehöriger $Z$, in welchem die Verbindungsgerade von $y$ nach $z$ die Curve

$$\beta_x^3 = 0$$

schneidet. Wendet man auf $Z$ nun nochmals dieselbe zuletzt gebrauchte Transformation $T\chi^{(\beta)}$ an, so muss man wieder den Punkt $z$ erhalten — weil eben für alle Punkte auf

$$\beta_x^3 = 0$$

die Zuordnung $T\chi^{(\beta)}$ eine involutorische ist.

Nachdem dieses bewiesen, können wir die Hilfscurve

$$\beta_x^3 = 0$$

ganz eliminiren; wir können uns vorstellen als sei fortwährend nur mit der für

$$\alpha_x^3 = 0$$

giltigen $T\chi$-Formeln operirt worden ohne die Curve

$$\beta_x^3 = 0$$

jemals effectiv hergestellt zu haben — und gewinnen, da ja die $T_x$-Formeln, als mit den $T\chi^{(\beta)}$-Formeln identisch, mit letzteren übereinstimmende Schlussresultate liefern müssen, den Satz: die Formeln $T\chi$ führen bei zweimaliger Anwendung den vorgegebenen Punkt $z$ in sich selbst zurück; ihre Umkehrung ist demnach für jeden Punkt der Ebene eine eindeutige und involutorische; d. h. jeder transformirte Punkt $Z$ liefert, wenn der ihn erzeugende Punkt $z$ nicht gegeben wäre, denselben durch Anwendung der Transformationsformeln auf Z.

Auch die directe Ausrechnung der Formeln

$$\varphi_i = X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i$$

müsste die Umkehrbarkeit ergeben; aber es schien uns wissenschaftlicher auf diesen für alle Punkte der Ebene giltigen involutorischen Charakter der Formeln zu schliessen, als ihn durch Rechnung zu erholen. Jeder algebraische (wie logisch-geometrische) Satz ist eine Identität, d. h. eine Banalität — nur durch das Vermeiden jedes Beweises, der sich auf directes Ausrechnen einer Formel stützen wollte, nur bei consequenter ausschliesslicher Verwendung der Phantasie, die mit ihren Schlüssen dem Rechner vorauseilt, verdient die Geometrie den Namen der ἔλεγχος πραγμάτων οὐ βλεπομένων und ihre Existenzberechtigung. Dieses Gefühl liess es uns entschuldbar scheinen, wenn — zur Constatirung des eigentlichen Charakters unsrer Transformation bei ihrer Anwendung auf die Paragraphen 8 und 9 als vorbereitend eingefügt wurden.

Die Curven dritter Ordnung gewähren somit die Möglichkeit involutorisch-quadratische, d. h. Cremona-Transformationen, zu bilden,

und zwar erscheint hierbei von letzteren der specialisirende Fall, wo 3 Hauptpunkte der Transformation in **einen** zusammengerückt sind. —

## § 11. Independente Herstellung von Beispielen für involutorisch-quadratische Transformationen.

Nicht jede Zusammenstellung von 3 Ausdrücken zweiten Grades $\varphi_i$, die man willkürlich gebildet hätte

$$X_1 = \varphi_1(x), \quad X_2 = \varphi_2(x), \quad X_3 = \varphi_3(x)$$

würde eine eindeutig umkehrbare Transformation der Ebene vorstellen — höchstens würden jene Formel ausreichen eine vorgegebene **Curve** in eine andre zu transformiren (Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curv. Art. 341).

Noch viel weniger würden beliebig gebildete Ausdrücke obiger Art, identisch umkehrbare Transformationen vorstellen. Beispielsweise ist die von Salmon a. a. O. Art. 330 gegebene Substitution:

$$\varrho X_1 = x_1 x_2; \quad \varrho X_2 = x_2^2; \quad \varrho X_3 = x_2 x_3 - m x_1^2$$

trotz ihrer grossen Einfachheit **nicht** identisch umkehrbar; sondern die Auflösung nach den $x_i$ ergibt:

$$x_1 = X_1 X_2; \quad x_2 = X_2^2; \quad x_3 = X_2 X_3 + m X_1^2$$

Auf die Frage nun: „wie kann man Beispiele bilden von identisch umkehrbaren Cremona-Transformationen mit zusammenfallenden Hauptpunkten?“ vermag die von uns vorgetragene Theorie der Transformation von ebenen Curven dritten Grades vollständige Antwort zu geben.

Durch Annahme einer willkürlichen Curve dritter Ordnung können wir, nach dem Vorhergehenden, Transformationen der ganzen Ebene bilden, die identisch umkehrbar sind.

Zweck des gegenwärtigen Paragraphen soll es sein, uns auch von der Heranziehung solcher Curven zu emancipiren und wo möglich direct involutorisch-quadratische Transformationen zu bilden. In diesen Formeln wird in nichts mehr — äusserlich — der Gedankengang erkennbar sein, dem sie ihre Existenz verdanken; aber eben hinter dieser Bildungsweise verstecken sich Curven dritter Ord-

nung — die übrigens niemals effectiv zu machen sind — und nur die Vorstellung von dem Bestehen einer solchen Curve dritter Ordnung wird uns das Mittel geben, die identische Umkehrbarkeit der aufzustellenden quadratischen Transformationen zu beweisen.

Lehrsatz. „Sind $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ 6 beliebig vorgegebene Grössen, und erfüllen die Zahlen $y_1$, $y_2$, $y_3$ die Bedingung:

$$f(y) \equiv a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2(a_{23}y_2y_3 + a_{31}y_3y_1 + a_{12}y_1y_2) = 0$$

dann hat die Transformation

$$\varrho X_i = f(x).y_i - \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}x_3\right\}.x_i$$

nicht nur den Charakter einer Cremona-Transformation mit 3 in $y$ zusammenfallenden Hauptpunkten, sondern die Formeln für $X_i$ sind identisch umkehrbar."

Beispiel:

$$X_1 = 3(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_1$$
$$X_2 = 4(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_2$$
$$X_3 = 5(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (3x_1 + 4x_2 - 5x_3)x_3$$

ist entstanden aus der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = f(x)$$

welche von

$$y_1 = 3, \quad y_2 = 4, \quad y_3 = 5$$

erfüllt wird.

Die Ersetzung der $x_i$ in diesen Formeln durch ihre homologen Ausdrücke $X_i$ selbst muss als Resultat $x_i$ erscheinen lassen, behaftet mit dem Kubus der linken Seite der Tangentengleichung für 3, 4, 5 an die 3 Kegelschnitte

$$X_i = 0$$

Beweis. Man unterwerfe die Coefficienten einer Curve dritten Grades folgenden 6 Bedingungen, wo $y$ dem $f(y) = 0$ genügt:

$$a_1^2 a_y = a_{111}y_1 + a_{112}y_2 + a_{113}y_3 = \varrho . a_{11}$$
$$a_2^2 a_y = a_{221}y_1 + a_{222}y_2 + a_{223}y_3 = \varrho . a_{22}$$
$$a_3^2 a_y = a_{331}y_1 + a_{332}y_2 + a_{333}y_3 = \varrho . a_{33}$$
$$2a_{23}a_y = 2(a_{231}y_1 + a_{232}y_2 + a_{233}y_3) = 2.\varrho . a_{23}$$
$$2a_{31}a_y = 2(a_{311}y_1 + a_{312}y_2 + a_{313}y_3) = 2.\varrho . a_{31}$$
$$2a_{12}a_y = 2(a_{121}y_1 + a_{122}y_2 + a_{123}y_3) = 2.\varrho . a_{12}$$

In diesen 6 Gleichungen sind die $y_1 y_2 y_3$ sowie die 6 Grössen (Coefficienten) $a_{ik}$ bekannt, für die 11 Unbekannten $a_{ikl}$, $\varrho$ ergibt sich demnach noch grosse Bewegungsfreiheit.

Stellen wir nun die 10 Coefficienten uns als fixirt vor, d. h. als wirklich gegebene Zahlen, so können wir die 6 Gleichungen multipliciren mit den 6 Grössen $y_1^2$, $y_2^2$, $y_3^2$, $y_2 y_3$, $y_3 y_1$, $y_1 y_2$ respective. Wir erhalten rechts

$$a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2(a_{23} y_2 y_3 + a_{31} y_3 y_1 + a_{12} y_1 y_2)$$

was nach der Voraussetzung $= 0$, links entsteht

$$a_y^3 = 0$$

d. h. der Punkt $y$ liegt auf der den Bedingungen entsprechend bestimmten Curve dritter Ordnung.

Diese Curve kann nun benutzt werden, um eine für die ganze Ebene brauchbare involutorisch-quadratische Cremona-Transformation zu liefern:

$$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_x a_y^2) x_i$$

aber man überzeugt sich leicht, dass $(a_y a_x^2)$ zusammenfällt mit

$$a_{11} x_1^2 + \ldots = f(x)$$

ebenso, dass $(a_x a_y^2)$ identisch ist mit

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3\right)$$

Denn es ist beispielsweise in $(a_x a_y^2)$ der Factor von $x_1$:

$$(a_1^2 a_y . y_1 + a_{12} a_y . y_2 + a_{13} a_y . y_3)$$

dies gibt aber nach der obigen Tabelle über die Werte der Coefficienten

$$(a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

Die Transformation durch die quadratischen Functionen unsres Lehrsatzes ist also dieselbe, welche — mit Hilfe einer bestimmbaren Curve dritter Ordnung gebildet — die Ebene involutorisch abbildet. Dies war zu beweisen.

Beim Gange des Beweises war es niemals nötig die Coefficienten $a_{ikl}$ wirklich zu bilden —; auch wenn wir im folgenden Zahlenbeispiele eine Curve dritter Ordnung effectiv herstellen, so geschieht es nicht um den Beweis unsres Satzes irgendwie zu bekräftigen, sondern

um das Material zu liefern zu nachträglicher, rechnerischer Bestätigung unsrer Schlüsse.

Zahlenbeispiel. Wenn vorgegeben

$$f(y) = -5y_1^2 - 6y_1^2 + 17y_3^2 + 2(8y_2y_3 + 7y_3y_1 - 18y_1y_2)$$

so wird

$$f(x) = 0$$

befriedigt von

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1$$

Wir finden als eine der unendlich vielen Curven dritter Ordnung, deren Coefficienten den 6 Bedingungsgleichungen genügen, die folgende:

$$\begin{gathered} 2x_1^3 - x_2^3 + 5x_3^3 \\ + 3\{4 . x_2^2 x_3 + 7 . x_3^2 x_1 - 8x_1^2 y^2\} \\ + 3\{5 . x_2 x_3^2 + 1 . x_3 x_1^2 - 9 . x_1 x_1^2\} \\ - 6x_1 x_2 x_3 = 0 \end{gathered}$$

Beide Curven, der Kegelschnitt wie die kubische Curve liefern dann die Substitutionen

$$\begin{aligned} X_i &= 1 . f(x) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} 1 + \frac{\partial f}{\partial x_3} 1\right) x_i \\ &= 1\,[-5x_1^2 - 6x_2^2 + 17x_3^2 + 2(8x_2x_3 + 7x_3x_1 - 18x_1x_2)] \\ &\qquad - (-16x_1 - 16x_1 + 32x_3) x_i \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho . X_1 &= \phantom{-}11x_1^2 - 6x_2^2 + 17x_3^2 + 16x_2x_3 - 18x_3x_1 - 20x_1x_2 \\ \varrho . X_2 &= -5x_1^2 + 10x_2^2 + 17x_3^2 - 16x_2x_3 + 14x_3x_1 - 20x_1x_2 \\ \varrho . X_3 &= -5x_1^2 - 6x_2^2 - 15x_3^2 + 32x_2x_3 + 30x_3x_1 - 36x_1x_2 \end{aligned}$$

Diese Formeln haben involutorischen Charakter; ersetzt man in ihnen die $x_i$ durch das homologe $X_i$, so erhält man wiederum $x_i$, mit dem Factor

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^3 \quad \text{behaftet.}$$

Zweites Beispiel. Unsere schon benutzten einfachen Formeln § 7. Schluss:

$$X = -xy, \quad Y = -y^2, \quad Z = zy + axy + by^2 + cx^2$$

welche bei beliebigem $a$, $b$, $c$ die Eigenschaft besitzen, identische Umkehrungen zuzulassen, sind entstanden aus der Function:

$$2zy + axy + by^2 + cx^2 = 0$$

und dem Punkte 0, 0, 1. — Denn man erhält in der Tat

$$X_1 = 0 . f - x . y$$
$$X_2 = 0 . f - y . y$$
$$X_3 = f - yz = zy + axy + by^2 + cx^3$$

da hier

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} x_3\right) = y$$

## IV. Die Sylvester-Cayley'sche Methode der Zerspaltung der involutorisch-quadratischen Transformation einer Curve dritter Ordnung.

### § 12. Beweis für die Möglichkeit, eine Transformation einer Curve dritter Ordnung in sich selbst aus zwei eben solchen Transformationen *additiv* zusammenzusetzen.

Liegt die Gleichung einer Curve dritten Grades vor, geschrieben in der Form

A $$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6 x_1 x_2 x_3 = 0$$

so kann man auf dieselbe unsere quadratisch-involutorischen Substitutionen

Tx $$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

anwenden, nachdem ein Punkt $a$, $b$, $c(y)$ der Curve bekannt ist und findet (vergl. die Zahlenbeispiele am Schlusse von Abteil. 1. von § 7.):

$$\begin{aligned}
X_1 &= ab x_2^2 + ac x_3^2 - b^2 x_1 x_2 - c^2 x_1 x_3 + 2k\{a^2 x_2 x_3 - bc x_1^2\}\\
X_2 &= bc x_3^2 + ba x_1^2 - c^2 x_2 x_3 - a^2 x_2 x_1 + 2k\{b^2 x_3 x_1 - ca x_2^2\}\\
X_3 &= ca x_1^2 + cb x_2^2 - a^2 x_3 x_1 - b^2 x_3 x_2 + 2k\{c^2 x_1 x_2 - ab x_3^2\}\\
&= \Phi_1 (x_1 x_2 x_3) + 2k \Psi_1 (x_1 x_2 x_3)\\
&= \Phi_2 (x_1 x_2 x_3 + 2k \Psi_2 (x_1 x_2 x_3)\\
&= \Phi_3 (x_1 x_2 x_3) + 2k \Psi_3 (x_1 x_2 x_3).
\end{aligned}$$

Herr Sylvester hat bemerkt, dass man die Voraussetzung

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2k\, abc = 0$$

benutzend, für obige Formeln als identisch die Proportionen:

$$X_1 : X_2 : X_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3$$

nachweisen kann (für jeden Punkt der Curve $A$) — vgl. die ersten Seiten seines Aufsatzes über „Cubische Curven“ im Bande III des American Journal of Mathematics.

Herr Cayley hat hinzugefügt, dass nicht nur eine Curve $A$ identisch in sich selbst transformirt wird durch die Substitutionen

$$X_i = \Phi_i \quad \text{oder} \quad X_i = \Psi_i$$

welche Formeln, für die Curve gleichberechtigt mit der Substitution

$$X_i = \Phi_i + \Psi_i$$

vor letzterer den Vorzug grösserer Einfachheit haben — sondern dass auch die beiden Systeme

$$X_i = \Phi_i, \quad X_i = \Psi_i$$

ohne allen Zusammenhang mit einer Curve, bei beliebigen $a$, $b$, $c$ — die Punkte der Ebene involutorisch ordnen; so dass also die Auflösung der $\Phi_i$ nach den $x_i$ für letztere dieselben Formeln — zu schreiben in den $X_i$ — liefert, wie sie oben ausgerechnet stehen, geschrieben in den $x_i$ — dasselbe gilt für die $\Psi_i$ (John Hopkins University Circulars, pag. 178).

Zahlenbeispiel. Die Curve (§ 7., 1) mit dem Punkte 1, 2, 1

$$A \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5x_1 x_2 x_3 = 0, \quad k = -\tfrac{5}{2}$$

wird nicht nur durch die dort gegebene zusammengesetzte Transformation in sich selbst transformirt, sondern auch durch

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2 x_3 - 2x_1^2 \\ X_2 &= 4x_1 x_3 - x_2^2 \\ X_3 &= x_1 x_2 - 2x_3^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} X_1 &= 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - x_1 x_3 \\ X_2 &= 2x_1^2 + 2x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 \\ X_3 &= x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 x_3 - 4x_2 x_3 \end{aligned}$$

Beide Systeme sind, jedes für sich, für alle Punkte der Ebene involutorisch.

Wir geben für diese durch Ausrechnung gewonnenen Sätze folgenden

Beweis.

Wir wenden auf die vorgegebene Curve

$$A \qquad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2k x_1 x_2 x_3 = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 2k\, a\, b\, c = 0 \end{cases}$$

die Transformationen $\Psi$

$$\left.\begin{aligned} \varrho X_1 &= bc x_1^2 - a^2 x_2 x_3 \\ \varrho X_2 &= ca x_2^2 - b^2 x_3 x_1 \\ \varrho X_3 &= ab x_3^2 - c^2 x_1 x_2 \end{aligned}\right\} \quad \Psi$$

an und erhalten als transformirte Curve in der $X$-Ebene, durch Elimination von 4 Grössen aus 4 Gleichungen: $A$, $\Psi_i$, eine Curve 6ten Grades deren rechnerisch entwickelte Form unten folgt.

Ueber die Gestaltung dieser Curve können wir einiges geometrisch schliessen: wendet man auf die 9 Wendepunkte der Curve die $\Psi$-Transformationen an, so entspricht dem $x$-Punkte

| | $x$-Punkt | | | $X$-Punkt |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $0, -1, 1$ | der $X$-Punkt | 1)' | $a, c, b$ |
| 2) | $1, 0, -1$ | | 2)' | $c, b, a$ |
| 3) | $-1, 1, 0$ | | 3)' | $b, a, c$ |
| 4) | $0, -\varepsilon, 1$ | | 4)' | $a, c\varepsilon, b\varepsilon^2$ |
| 5) | $0, 1, -\varepsilon$ | | 5)' | $a, c\varepsilon^2, b\varepsilon$ |
| 6) | $1, 0, -\varepsilon$ | | 6)' | $c, b\varepsilon, a\varepsilon^2$ |
| 7) | $-\varepsilon, 0, 1$ | | 7)' | $c, b\varepsilon^2, a\varepsilon$ |
| 8) | $-\varepsilon, 1, 0$ | | 8)' | $b, a\varepsilon, c\varepsilon^2$ |
| 9) | $1, -\varepsilon, 0$ | | 9)' | $b, a\varepsilon^2, c\varepsilon$ |

Man findet, dass nicht nur die ausgerechneten 9 Punkte $X$: 1' ... 9' der Curvengleichung $A$ genügen, sondern auch jeweilig mit dem zugehörigen Wendepunkte auf einer Geraden durch $a$, $b$, $c$ liegen.

Wollte man die 9 ausgerechneten Punkte als Punkte der $x$-Ebene auffassen und in die $X$-Ebene transformiren, so würden sich genau entsprechend die 9 Wendepunkte, diesmal der $X$-Ebene zugerechnet, wieder einstellen.

Demnach werden bei Anwendung der $\Psi$-Transformation 18 Punkte der Curve $A$ in 18 Punkte derselben Curve übergeführt.

Dies ist nur möglich, wenn die durch die $\Psi$-Transformation aus $A$ abgeleitete Curve $A'$ als Bestandteil die Curve $A$ enthält (da 18 Punkte der transformirten Curve $A'$ auf einer Curve dritter Ordnung liegen, so trennt sich zunächst von $A'$ eine solche Curve ab; diese ist identisch mit $A$, weil sie mit $A$ 18 Punkte gemeinschaftlich hat) [1].

---

1) In der Tat ist die transformirte Gleichung ausgerechnet

$$A' = (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 2k X_1 X_2 X_3) \times$$

Demnach der Sylvester-Cayley'sche Satz; erster Teil: 7) „Die Curve $\Delta$ wird, wenn $a$, $b$, $c$ auf ihr gelegen, durch die Substitutionen $\Psi$ in sich transformirt."

Was die früher discutirte Determinante

$$\Delta \quad \begin{vmatrix} bc x_1^2 - a^2 x_2 x_3 & ca x_2^2 - b^2 x_3 x_1 & ab x_3^2 - c^2 x_1 x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

anlangt, so kann man für deren identisches Verschwinden aus dem soeben Gesagten einen Beweis ableiten. Bei beliebigem $a$, $b$, $c$ genügen ihr die Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ jener 9 Wendepunkte 1—9; nebst den zugeordneten Punkten 1'—9'. Nehmen wir nun weiter einen beliebigen Punkt dazu, etwa 0, 0, 1, der für allgemeine $a$, $b$, $c$ **nicht** auf der zugehörigen Curve liegen wird, so zeigt das Einsetzen der Coordinaten des dazu gehörigen $X$-Punktes in $\Delta$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

dass auch für

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

$\Delta$ verschwindet. Da somit die Gleichung dritten Grades

$$\Delta = 0$$

erfüllt ist für 18 Punkte einer Curve dritter Ordnung, sowie für einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt 0, 0, 1, so muss sie eine Identität sein für **alle Punkte der Ebene**, bei beliebigem $a$, $b$, $c$.

Man schliesst nun weiter für die Punkte der Curve $\Delta$:

Ist der Curvenpunkt $z$ gegeben, und $Z$ construirt worden durch die $\Psi$-Functionen, so kann man zu $Z$ den entsprechenden weiter transformirten Punkt $Z'$ der $X$-Ebene suchen, nachdem $Z$ als $x$-Punkt aufgefasst worden. $Z'$ muss erstens der Curve angehören (Satz 7), zweitens auf der Geraden von $Z$ nach $a, b, c$ liegen ($\Delta$=0);

---

$$(a^3 b^3 X_3^3 + b^3 c^3 X_1^3 + c^3 a^3 X_2^3 - 3a^2 b^2 c^2 X_1 X_2 X_3)$$
$$= (X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + 2k X_1 X_2 X_3) \times$$
$$(bc X_1 + ca X_2 + ab X_3)(bc X_1 + ca\varepsilon X_2 + ab\varepsilon^2 X_3)(bc X_1 + ca\varepsilon^2 X_2 + ab\varepsilon X_3)$$

muss demnach mit dem a priori gewählten Curvenpunkte $z$ zusammenfallen, der mit $Z$ auf einer Geraden lag.

Daher der Satz:

8) „Die Formeln $\Psi$ liefern, angewendet auf die Curve $A$, je zwei involutorisch einander zugeordnete Punkte."

Die Erweiterung dieses Satzes wurde am Schlusse des „Excurses" mitgeteilt, von ihr ist obige auf eine Curve bezügliche Aussage nur eine specialisirende Anwendung. [Es sei hier eingefügt, dass die Frage: „welches ist der Ort der $x$-Punkte, die mit ihren zugeordneten Punkten $X$ Verbindungsgerade durch einen von $a$, $b$, $c$ verschiedenen Punkt $d$, $e$, $f$ liefern?" auf eine zerfallende Curve führen muss. Denn jener Bedingung genügen erstens die $x$-Punkte die Verbindungsgeraden von $d$, $e$, $f$ nach $a$, $b$, $c$, zweitens aber die Punkte des Kegelschnittes $B$ in Satz 2) des Excurses].

Wir vollenden nunmehr das Theorem. Die Formeln

$$\begin{aligned}\varrho X_1 &= \Phi_1(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_1(x_1 x_2 x_3)\\ \varrho X_2 &= \Phi_2(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_2(x_1 x_2 x_3)\\ \varrho X_3 &= \Phi_3(x_1 x_2 x_3) + 2k\Psi_3(x_1 x_2 x_3)\end{aligned}$$

haben, da sie — in toto genommen, ohne Trennung — direct nach früheren Methoden abgeleitet wurden, die Eigenschaft einen bestimmten Punkt $z_1 z_2 z_3$ der vorgegebenen Curve $A$ überzuführen in einen Punkt $Z_1 Z_2 Z_3$ derselben Curve, der mit $a$, $b$, $c$ und $z$ auf einer Geraden liegt.

Die ausgerechneten Zahlen $Z_1 Z_2 Z_3$ sind definirt durch

$$\begin{aligned}\varrho Z_1 &= \Phi_1(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_1(z_1 z_2 z_3)\\ \varrho Z_2 &= \Phi_2(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_2(z_1 z_2 z_3)\\ \varrho Z_3 &= \Phi_3(z_1 z_2 z_3) + 2k\Psi_3(z_1 z_2 z_3)\end{aligned}$$

Hätten wir aber die $\Psi$-Functionen allein angewendet, so hätten wir hierbei ebenfalls aus $z_1 z_2 z_3$ einen mit $z$ und $abc$ auf einer Geraden liegenden Punkt erhalten. Dieser durch die $\Psi$-Functionen ausschliesslich bestimmte Punkt kann kein andrer sein, als der vorhin bestimmte Punkt $Z$. Demnach genügen die 3 vorhin errechneten Zahlen $Z_1 Z_2 Z_3$ den Gleichungen

$$\begin{aligned}\sigma Z_1 &= \Psi_1(z_1 z_2 z_3)\\ \sigma Z_2 &= \Psi_2(z_1 z_2 z_3)\\ \sigma Z_3 &= \Psi_3(z_1 z_2 z_3).\end{aligned}$$

Die Grössen $\Phi_i$ müssen demnach der Proportion:

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \Phi_1(z_1 z_2 z_3) : \Phi_2(z_1 z_2 z_3) : \Phi_3(z_1 z_2 z_3)$$

genügen, für jeden Punkt der Curve $A$.

Kürzer: 9) „Für die Punkte der Curve $A$ ist die quadratische Cremona-Transformation $\Phi$ vollständig in ihrer Wirkung identisch mit der $\Psi$-Function. Beide liefern bei vorgegebenem Punkte $x$ der Curve den auf der Verbindungsgeraden von $a$, $b$, $c$ nach $x$ liegenden Curvenpunkt als zugehöriger $X$-Punkt.“

In der Fassung:

$$\begin{cases} \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 2k\,abc = 0 \end{cases}$$

findet sich der Satz an den beiden citirten Stellen ausgesprochen.

In der rechnerischen Durchführung des Beweises für diese Identitäten wird die gegebene Voraussetzung auftreten; denn beide Substitutionen $\Phi$ und $\Psi$ sind a priori fast vollständig (für die Ebene) verschiedenartig, selbst wenn die Werte der sie jeweilig bestimmenden Constanten $a$, $b$, $c$ gleich sind für beide Formeln — ; sie können gleiche Wirkung nur haben für eine ganz bestimmte Curve, deren Lage von den Constanten $a$, $b$, $c$ abhangen muss.

Wir geben schliesslich einige Resultate für die $\Phi$-Functionen, wie sie aus obigen Sätzen folgen:

10) „Dieselben teilen mit den $\Psi$-Functionen alle Eigenschaften, die sich auf die Lage der der Transformation unterworfenen Curvenpunkte beziehen.“

11) „Aber sie können mit den $\Psi$-Functionen nicht dieselben 3 Hauptpunkte gemeinschaftlich haben, mit Ausnahme von $a$, $b$, $c$.“

Beweis. Die $\Psi$-Functionen verschwinden an den 3 Stellen $a$, $b$, $c$; $a$, $b\varepsilon$, $c\varepsilon^2$; $a$, $b\varepsilon^2$, $c\varepsilon$. Aber die zusammgesetzten Formeln

$$\varrho X_i = \Phi_i + 2k\Psi_i$$

können ihrer Entstehung nach nur für den einzigen „transformirenden Punkt“ $a$, $b$, $c$ illusorisch, d. h. gleichzeitig $= 0$ werden. Demnach müssen die $\Phi$-Functionen für die beiden $x$-Punkte: $a$, $b\varepsilon$, $c\varepsilon^2$; $a$, $b\varepsilon^2$, $c\varepsilon$, für welche die $\Psi$ verschwinden, von null verschiedene Werte ergeben.

12) „Demnach ist für jede $T_X$-Transformation quadratisch-involutorischen Charakters

$$X_i = (a_y a_x^2) y_i - (a_y^2 a_x) x_i$$

eine Zerteilung der drei einzelnen Summen, welche jeweilig ein $X_i$ vorstellen, möglich, so dass für Punkte der Curve $a_x^3 = 0$ identisch

$$X_i^2 = \Phi_i + 2k\Psi_i$$

und gleichzeitig

$$\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3$$

Aber diese Zerteilung setzt die Kenntniss der Wendepunkte der vorgegebenen Curve, d. h. die Auflösung einer Gleichung vierten Grades voraus."

XI.

# Ein Satz über Binomialcoefficienten.

Von

**J. Hermes.**

---

In der 6ten Note der algebraischen Analysis beweist Cauchy unter andern ähnlichen Sätzen auch den folgenden:

„Multiplicirt man die Binomialcoefficienten $\beta$ irgend einer Potenz z. B. der vierten: 1, −4, 6, −4, 1, mit abwechselnden Zeichen genommen, der Reihe nach mit den aufeinander folgenden figurirten Zahlen einer höchstens eben so hohen Ordnung z. B. mit: 3, 6, 10, 15, 21 und addirt die Producte: 3, −24, 60, −60, 21, so erhält man stets null, nur zuletzt: $\pm 1$.“

Mit Anwendung der bekannten Symbole für Combinationsanzahlen ohne Wiederholungen:

$$\beta = \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

und mit Wiederholungen:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 \\ k+1 \end{bmatrix}$$

lässt sich der Satz in die etwas allgemeinere Formel 1)

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \begin{bmatrix} m+k \\ \varrho \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} m+n \\ \varrho - n \end{bmatrix}$$

zusammenfassen und leicht durch Schluss von $n$ auf $n+1$, wie folgt beweisen. Man addire zur letzten Gleichung, falls sie schon gelten möchte, die dann auch geltende:

$$\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\begin{bmatrix}m+1+k\\ \varrho\end{bmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{bmatrix}m+1+n\\ \varrho-n\end{bmatrix}$$

in der Art hinzu, dass jedes $k$te Glied der ersten Summe mit dem $(k+1)$ten Gliede der zweiten Summe vereinigt wird, so ergiebt sich, da

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$$

ist, Formel 1) für $n+1$, nämlich:

$$\sum_{k=0}^{k=n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}\begin{bmatrix}m+k\\ \varrho\end{bmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{bmatrix}m+n+1\\ \varrho-n-1\end{bmatrix}$$

Für $n=1$ geht aber Formel 1) in:

$$\begin{bmatrix}m\\ \varrho\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m+1\\ \varrho\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}m+1\\ \varrho-1\end{bmatrix}$$

über, was nach der Definition der figurirten Zahl [ ] für jedes $m$ richtig ist, $m$ und $\varrho$ zunächst als positive ganze rationale Zahlen gedacht. Für negatives $\varrho$ ist

$$\begin{bmatrix}m\\ \varrho\end{bmatrix}=0$$ [1]

Die beiden Symbole ( ) und [ ], welche ja auch nicht wesentlich von einander verschieden sind, da

$$\begin{bmatrix}-n\\ k\end{bmatrix}=(-1)^k\binom{n}{k}\quad\text{und}\quad\binom{-n}{k}=(-1)^k\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}$$

gilt, kann man offenbar durch ein drittes

$$\delta=\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}n+2\\ k+1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}n+1\\ k+1\end{matrix}\right\}$$

ergänzen und so fort.

---

1) Bekanntlich gilt auch

$$\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+1\\ n-1\end{bmatrix}\quad\text{und}\quad\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Für $k=0$ und $k=n$ ist

$$\binom{n}{k}=1$$

für $k<0$ und $k>n$ ist

$$\binom{n}{k}=0$$

Wir gewinnen dann folgenden Satz 2)

$$\sum_{k=0}^{k=\varrho}(-1)^k\binom{n-2k}{\varrho-k}\left\{\frac{r}{k}\right\}=(-1)^\varrho\left[\begin{matrix}r-n\\ \varrho\end{matrix}\right];\quad \varrho \overline{\overline{<}} \frac{n}{2}$$

der als speciellen Fall

$$n=r=2\varrho=2m$$

(nach Division mit $n$) zwar ebenfalls die Formel:

$$\sum_{k=0}^{k=m}(-1)^k\binom{m}{k}\left[\begin{matrix}m\\ k\end{matrix}\right]=0$$

enthält, aber doch nicht direct mit einem der Cauchy'schen Sätze, etwa mit Formel 9 a. a. O. identisch sein möchte [1]).

### Beweis von Satz 2)

Ist derselbe auch ebenso einfach wie der vorher zu 1) gegebene, so wollen wir doch des Folgenden wegen vorher noch näher auf die $\delta=\left\{\begin{matrix}n\\ k\end{matrix}\right\}$ eingehen.

Erheben wir die Differenz

$$\partial=M-M^{-1}$$

auf die $n$te Potenz und bezeichnen $M^r+(-1)^rM^{-r}$ mit $\partial_r$, so erhalten wir

$$\partial^n=\partial_n-\binom{n}{1}\partial_{n-2}+\binom{n}{2}\partial_{n-4}-\binom{n}{3}\partial_{n-6}+\ldots$$

Indem hierin $\partial_{n-2}$, $\partial_{n-4}$, $\partial_{n-6}$ wiederum durch Potenzen ausgedrückt werden, entstehen die Ergänzungscoefficienten $\delta$. Es wird

$$\partial_n=\partial^n+\left\{\begin{matrix}n\\ 1\end{matrix}\right\}\partial^{n-2}+\left\{\begin{matrix}n\\ 2\end{matrix}\right\}\partial^{n-4}+\ldots$$

Multiplicirt man nämlich $\partial_g$ mit $\partial_G$, worin $g$ und $G$ gerade Zahlen und $G>g$ angenommen, so ergiebt sich:

$$\partial_g\partial_G-\partial_{G-g}=\partial_{G+g}$$

und analog für ungerade Indices:

1) Indirect hangen diese Sätze offenbar alle mit einander als Idenditäten zusammen. Vgl. auch: Baltzer, Determinanten § 3, 7 und 10.

$$\partial_u \partial_U + \partial_{U-u} = \partial_{U+u}\ ^{1)}$$

nebst

$$\partial_u \partial_G + \partial_{G-u} = \partial_{G+u} \quad \text{und} \quad \partial_g \partial_U - \partial_{U-g} = \partial_{U+g}.$$

Zur Recursion sind nun am bequemsten die zweite und dritte Formel für $u = 1$ zu benutzen; zugleich erhellt, dass

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{Bmatrix} \quad \text{also} \quad \delta = \begin{Bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix}$$

wird.

Um also eine Tafel für die $\delta$ zu entwerfen, hat man zunächst

$$u = U = 1$$

zu setzen

$$\partial_u \partial_u = \partial_1 \partial_1 = 1\partial^2 \quad \text{und} \quad \partial_{U-u} = \partial_0$$

muss hier natürlich 2 sein, sonst = 1, weil dann eben die 2 schon als Coefficient berücksichtigt ist.

$$\partial_{U+u} = \partial_2$$

wird also $1\partial^2 + 2$ Wird dies von neuem mit

$$\partial_u = \partial_1$$

genommen und

$$\partial_{2-1} = 1\partial$$

hinzugefügt, so folgt

$$\partial_3 = 1\partial^3 + 3\partial$$

Schreiben wir nur die Coefficienten $\delta$, indem sich die stets geraden resp. stets ungeraden Potenzen von $\partial$ von selbst verstehen, so lässt sich die Construction der Tafel für die $\delta$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\partial_0 =$ | | | | | | | $\begin{cases}1\\1\end{cases}$ |
| $\partial_1 =$ | | | | | | 1 | |
| $\partial_2 =$ | | | | | 1 | 2 | |
| $\partial_3 =$ | | | | 1 | 3 | | |
| $\partial_4 =$ | | | | 1 | 4 | 2 | |
| $\partial_5 =$ | | | 1 | 5 | 5 | | |
| $\partial_6 =$ | | 1 | 6 | 9 | 2 | | |
| $\partial_7 =$ | 1 | 7 | 14 | 7 | | | |

---

1) In diesem der vier Fälle, wo $\partial_u \partial_U$ mit $uU\partial^2$ und $\partial_{U-u}$, wie immer bei geradem Index, mit 2 schliesst, ist $\partial_{U-u}$ um eine Stelle nach rechts auszurücken.

$$\begin{array}{lcccccc}
\partial_8 = & & 1 & 8 & 20 & 16 & 2 \\
\partial_9 = & 1 & 9 & 27 & 30 & 9 & \\
\partial_{10} = 1 & 10 & 35 & 50 & 25 & 2 &
\end{array}$$

folgendermassen zusammenfassen: „Werden je zwei aufeinander folgende Zeilen addirt und das Resultat um eine Stelle nach links gerückt, so erhält man die Coefficienten der nächstfolgenden Zeile".
Zur Probe $\partial_{10}$ nach Formel

$$\partial_u \partial_v + \partial_{v-u} = \partial_{v+u} \quad \text{hat man:}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
\partial_7 = \ldots & & 1 & 7 & 14 & 7 & \\
\partial_3 = & & & & 1 & 3 & \\
\hline
& & 3 & 21 & 42 & 21 & \\
& 1 & 7 & 14 & 7 & & \\
\hline
& 1 & 10 & 35 & 49 & 21 & \\
\partial_{7-3} = \partial_4 = \ldots & & & & 1 & 4 & 2 \\
\hline
\partial_{10} = & 1 & 10 & 35 & 50 & 25 & 2
\end{array} \quad \text{also}$$

$$= \partial^{10} + 10\partial^8 + 35\partial^6 + 50\partial^4 + 25\partial^2 + 2$$

$$\left\{ \begin{matrix} 10 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1; \quad \left\{ \begin{matrix} 10 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 10; \quad \left\{ \begin{matrix} 10 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 35 \ldots$$

Auch ist die Summe der in einer Colonne befindlichen Zahlen $= 3 \cdot 2^r$; die vorletzte Zahl in einer $2q$ten Reihe ist $q^2$ etc.

Die Entstehung dieser Zahlen giebt nun unmittelbar:

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 1 \end{matrix} \right\} = r$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 2 \end{matrix} \right\} = \binom{r-1}{2} - 1 = \frac{r(r-3)}{1.2} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.(r-1)(r-2)}$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ 3 \end{matrix} \right\} = \binom{r-2}{3} - \binom{r-4}{1} = \frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{1.2.3(r-1)(r-2)(r-3)}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} = \binom{r-(k-1)}{k} - \binom{r-(k+1)}{k-2}$$

$$\begin{Bmatrix} r \\ k+1 \end{Bmatrix} = \binom{r-k}{k+1} - \binom{r-(k+2)}{k-1}$$

$$= \binom{r-(k+1)}{k} + \binom{r-(k+1)}{k+1} - \binom{r-(k+3)}{k-2} - \binom{r-(k+3)}{k-1}$$

$$= \begin{Bmatrix} r-1 \\ k+1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r-2 \\ k \end{Bmatrix}$$

wenn das erste und dritte, das zweite und vierte Glied vereinigt werden. Dies führt für $r-2=n$ auf obige Definition von $\delta$ nämlich auf

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n+2 \\ k+1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix}$$

zurück. Es ist aber auch:

$$\begin{Bmatrix} r \\ \varrho \end{Bmatrix} = \frac{r(r-\varrho-1)(r-\varrho-2)\ldots(r-2\varrho+1)}{1.2.3\ldots\varrho}$$

Denn addiren wir

$$\begin{Bmatrix} r+1 \\ \varrho+1 \end{Bmatrix} = \frac{(r+1)(r-\varrho-1)(r-\varrho-2)\ldots(r-2\varrho+1)(r-2\varrho)}{1.2.3\ldots\varrho.(\varrho+1)}$$

hinzu, so resultirt

$$\frac{(r-\varrho-1)\ldots(r-2\varrho+1)}{1\ldots\varrho}\left\{\frac{r\varrho+r+r^2-2r\varrho+r-2\varrho}{\varrho+1}\right\}$$

$$= \frac{(r+2)(r+2-(\varrho+2))\ldots(r+2-(2\varrho+1))}{1.2\ldots(\varrho+1)} = \begin{Bmatrix} r+2 \\ \varrho+1 \end{Bmatrix}$$

wie oben, also muss auch, da beide Male dasselbe Gesetz erhalten wird, und der Anfang identisch ist:

$$\binom{r-\varrho+1}{\varrho} - \binom{r-\varrho-1}{\varrho-2} = \frac{r(r-\varrho-1)(r-\varrho-2)\ldots(r-2\varrho+1)}{1.2.3\ldots\varrho}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-2\varrho+1)}{1.2\ldots\varrho(r-1)(r-2)\ldots(r-\varrho)}$$

$$= \binom{r}{\varrho}\frac{(r-(\varrho+1))\ldots(r-2\varrho+1)}{(r-1)\ldots(r-\varrho+1)}$$

gelten, was auch leicht direct folgt.

Beispiel:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{10.7}{1.2} = 35 = \binom{9}{2} - \binom{7}{0} = 45\cdot\frac{7}{9}$$

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{10.6.5}{1.2.3} = 50 = \binom{8}{3} - \binom{6}{1} = 120\cdot\frac{6.5}{9.8}$$

Es liegt auch nahe, obige Tafel zu erweitern, indem z. B.

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \end{Bmatrix} = \frac{10(-1)(-2)\ldots(-9)}{1.2\ldots10} = -1$$

wäre. Dadurch würde dann die Giltigkeit des Satzes 2) über die für

$$\delta = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

ursprünglich vorhandenen Grenzen ausgedehnt sein. Wir erhalten somit die **erweiterte Tafel** für $\delta$

| $n$ | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3 | | | | | | | | | | 1 | −3 | 9 | −28 |
| −2 | | | | | | | | | 1 | −2 | 5 | −14 | 42 |
| −1 | | | | | | | | 1 | −1 | 2 | −5 | 14 | −42 |
| 0 | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | | | | | 1 | 1 | −1 | 2 | −5 | 14 | −42 | 132 |
| 2 | | | | | 1 | 2 | −1 | 2 | −5 | 14 | −42 | 132 | −429 |
| 3 | | | | 1 | 3 | 0 | 1 | −3 | 9 | −28 | 90 | −297 | 1001 |
| 4 | | | 1 | 4 | 2 | 0 | −1 | 4 | −14 | 48 | −165 | 572 | |
| 5 | | 1 | 5 | 5 | 0 | 0 | 1 | −5 | 20 | −75 | 275 | $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ | |
| 6 | 1 | 6 | 9 | 2 | 0 | 0 | −1 | 6 | −27 | 110 | | | |

Es gelte nun für **ein** $r$ bereits:

$$\pm\left[\begin{Bmatrix} r \\ 0 \end{Bmatrix}\binom{n}{\varrho} - \begin{Bmatrix} r \\ 1 \end{Bmatrix}\binom{n-2}{\varrho-1} + \begin{Bmatrix} r \\ 2 \end{Bmatrix}\binom{n-4}{\varrho-2} - \ldots\right] = \begin{bmatrix} r-n \\ \varrho \end{bmatrix}$$

$$\varrho \overset{=}{<} \frac{n}{2}$$

und in Bezug auf $n-2$ für ein **beliebiges** $r$ schon:

$$\pm\left[-\begin{Bmatrix} r-1 \\ 0 \end{Bmatrix}\binom{n-2}{\varrho-1} + \begin{Bmatrix} r-1 \\ 1 \end{Bmatrix}\binom{n-4}{\varrho-2} - \ldots\right] = \begin{bmatrix} r-1-(n-2) \\ \varrho-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r-n+1 \\ \varrho-1 \end{bmatrix}$$

so folgt durch Addition:

$$\pm\left[\begin{Bmatrix} r+1 \\ 0 \end{Bmatrix}\binom{n}{\varrho} - \begin{Bmatrix} r+1 \\ 1 \end{Bmatrix}\binom{n-2}{\varrho-1} + \begin{Bmatrix} r+1 \\ 2 \end{Bmatrix}\binom{n-4}{\varrho-2} - \ldots\right]$$

$$= \begin{bmatrix} r+1-n \\ \varrho \end{bmatrix}$$

daher ist der Satz für jedes folgende $r$ in Bezug auf $n$ richtig und in analoger Weise auch für jedes vorhergehende, wenn nur noch

gezeigt wird, dass er für ein $r$ gilt, etwa für $r = n$. Es folgt aber aus

$$\partial^n = \partial_n - \binom{n}{1}\partial_{n-2} + \binom{n}{2}\partial_{n-4} - \ldots \quad \text{und} \quad \partial_n = \partial^n + \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}\partial^{n-2} + \left\{\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right\}\partial^{n-4} + \ldots$$

$$\partial^{n-2} = \partial_{n-2} - \binom{n-2}{1}\partial_{n-4} + \ldots \qquad \Bigg| \qquad \partial_{n-2} = \partial^{n-2} + \left\{\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right\}\partial^{n-4} + \ldots$$

etc. | etc.

oder auch

$$\partial^n = \partial^n + \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}\partial^{n-2} + \left\{\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right\}\partial^{n-4} + \ldots \qquad \Bigg| \qquad \partial_n = \partial_n - \binom{n}{1}\partial_{n-2} + \binom{n}{2}\partial_{n-4} - \ldots$$

$$- \binom{n}{1}\partial^{n-2} - \binom{n}{1}\left\{\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right\}\partial^{n-4} - \ldots \qquad \Bigg| \qquad + \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}\partial_{n-2} - \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}\binom{n-2}{1}\partial_{n-4} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . . . . .

durch Vergleichung:

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} - \binom{n}{1}\left\{\begin{matrix} n-2 \\ k-1 \end{matrix}\right\} + \binom{n}{2}\left\{\begin{matrix} n-4 \\ k-2 \end{matrix}\right\} - \ldots = 0$$

und

$$\binom{n}{k} - \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}\binom{n-2}{k-1} + \left\{\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right\}\binom{n-4}{k-2} - \ldots = 0$$

in welche Formel der zu beweisende Satz für $r = n$ übergeht. Zugleich ergiebt sich, dass in Formel 2) eine Vertauschung der ( ) und { } unter einander eintreten kann, vgl. Beispiel A) und B)

A)

| | | | | | $\delta$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta = 1$ | $-7$ | 21 | $-35$ | | 1 | … 1 | $-7$ | 21 | $-35$ |
| | 1 | $-5$ | 10 | | 10 | | 10 | $-50$ | 100 |
| | | 1 | $-3$ | | 35 | | | 35 | $-105$ |
| | | | 1 | | 50 | | | | 50 |
| es resultiren: | | | | | | 1 | 3 | 6 | 10 |

B)

| | | | | | | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta = 1$ | 10 | 35 | 50 | 25 | 2 | 1 |
| | 1 | 8 | 20 | 16 | 2 | $-10$ |
| | | 1 | 6 | 9 | 2 | 45 |
| | | | 1 | 4 | 2 | $-120$ |
| | | | | 1 | 2 | 210 |
| | | | | | 1 | $-252$ |
| wir erhalten: 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Ehe wir eine Anwendung hievon auf das Crelle Bd 87. pag. 107 ff. behandelte Curvensystem $\Sigma c_r \partial_{ru} \equiv 0$ mod. $p$ machen, wollen wir die Congruenz $\mathfrak{C}_\nu$ nämlich

$$qu \equiv \pm r \bmod 2^\nu$$

in welcher $u$ und $q$ ungerade Zahlen bedeuten sollen, darauf hin untersuchen, ob der Rest $r$ numerisch kleiner oder grösser als $2^{\nu-2}$ ist.

Findet dies Letztere statt, muss also mit dem halben Modul $2^{\nu-1}$ reducirt werden, so möge es durch einen dem Reste zugesetzten Punkt angedeutet sein[1]). Die Reste sind nun zwar schliesslich alle numerisch als positiv zu denken doch müssen die, welche sich ursprünglich negativ ergaben, markirt (etwa unterstrichen) werden. Benutzen wir die halbirende Anordnung, so gilt der Satz 3): „Ein mit Punkt versehener markirter Rest etwa $\underline{r}.$ in $\mathfrak{C}_\nu$ wird an correspondirender Stelle in $\mathfrak{C}_{\nu+1}$ durch das nicht markirte Supplement $2^{\nu-1} - r$ (ob mit oder ohne Punkt, entscheiden die folgenden Sätze) ersetzt und ein mit Punkt versehener, nicht markirter Rest $r.$ durch $\underline{2^{\nu-1} - r}$, denn auf eine Periode, schematisch durch

| $m2^\nu$ | | $m2^\nu + 2^{\nu-1}$ | | $(m+1)2^\nu$ |
|---|---|---|---|---|
| ohne Punkt; | mit Punkt (markirt); | mit Punkt; | ohne Punkt (markirt) | |

dargestellt, kommen zwei Perioden von $\mathfrak{C}_{\nu-1}$

ohne, mit; mit, ohne | ohne, mit; mit, ohne |

so dass also die markirten von $\mathfrak{C}_\nu$ nur den nicht markirten mit Punkt, oder auch den markirten ohne Punkt entsprechen können.

Hervorzuheben ist, dass die jedesmaligen Gruppen der Reste unverändert in ihrem Zusammenhange bleiben.

Satz 4) In der kleinsten Gruppe von vieren sind stets drei Reste oder nur ein Rest mit Punkt versehen. Beweis.

Die Gruppe sei:

$$\begin{array}{cc} qu & 2^{\nu-2} - qu \\ 2^{\nu-2}q - uq & 2^{2\nu-4} - (q+u)2^{\nu-2} + qu \end{array}$$

Da

1) Hiermit hangen, wie leicht ersichtlich, die Vorzeichen der cos in der Determinante $D_\nu$ zusammen. vgl. Archiv der Math. u. Phys. 2te Reihe. T. VI. pag 276.

$$\nu \overline{\gtrsim} 4$$

ist, so ist

$$2^{\nu-4} \overline{\gtrsim} \nu \quad \text{also} \quad 2^{2^{\nu-4}} \equiv 0 \bmod 2^{\nu}$$

Ist nun $q$ nicht $\equiv u \bmod. 4$, so sind beide Reste in der Hauptdiagonale entweder mit Punkt versehen oder beide ohne Punkt. Es sei $u \equiv 1 \bmod. 4$, so ist, je nachdem $uq \equiv r$; $-r$; $2^{\nu-1}+r$; $2^{\nu-1}-r$ mod $2^{\nu}$, offenbar: $2^{\nu-2}-qu \equiv 2^{\nu-2}-r$; $+2^{\nu-1}-(2^{\nu-1}-r)$; $+2^{\nu-1}+(2^{\nu-2}-1)$; $-(2^{\nu-2}-r) \bmod. 2^{\nu}$. Das kann also für $u \equiv 1 \bmod. 4$ zusammengefasst werden in: „nicht markirte Paare sind entweder beide mit Punkt versehen oder beide ohne, markirte Paare sind in Rücksicht auf den Punkt verschiedenartig". Bei $u \equiv -1 \bmod. 4$ sind markirte gleichartig, nicht markirte verschieden. Hieraus folgt denn auch schon Satz 4).

Endlich gilt noch, wie leicht zu beweisen, für den Rest $r'''$ in $\left\{\begin{matrix} r_{,} \\ r_{,,} \\ r_{,,,} \\ r_{,,,,} \end{matrix}\right.$, wenn mit $r_{,}$ die Gruppe von 16 zusammengehörigen Resten beginnt, dass in der linken Hälfte von $\mathfrak{C}_{\nu}$ dieselbe entweder mit $r_{,}$ und $r_{,,}$ (wenn diese in Bezug auf den fehlenden oder vorhandenen Punkt gleichartig sind) ebenfalls gleichartig ist oder andernfalls mit dem kleinern übereinstimmt, dass aber in der rechten Hälfte $r_{,,,}$ mit $r_{,}$ und $r_{,,}$ ungleichartig ist oder mit dem grössern stimmt.

Dieser Satz 5) gilt auch ebenso für $r_{,}$ in Bezug auf $r_{,,,}$ und $r_{,,,,}$. Auch kann er statt in verticaler Richtung, natürlich ebenso in horizontaler angewandt werden; (obere und untere Hälfte von $\mathfrak{C}_{\nu}$).

6) Ferner gilt er für $r_{,,,,}$ in Bezug auf $r_{,}$ und $r_{,,,}$ etc. ... jedoch dann für halb sogrosse Räume, (linkes Viertel$_{(1)}$, rechtes Viertel$_{(1)}$, linkes Viertel$_{(2)}$, rechtes Viertel$_{(2)}$) und so fort. ... Mit Hilfe dieser Regeln kann man nun $\mathfrak{C}_{\nu-1}$ aus $\mathfrak{C}_{\nu}$ ohne eine Nebenrechnung hinschreiben.

Ist ein Rest

$$r = qu$$

so bleibt er fortan für alle grösseren $\nu$ natürlich ohne Punkt. Es ist also hiedurch, wenn man so will, die Multiplication der Zahlen auf Addition und Subtraction der Potenzen von Zwei untereinander gebracht, was wol die natürlichste Einführung in das diadische System sein dürfte.

Wir lassen $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_6$ folgen [1])

$\mathfrak{C}_4 = \{$

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 3 | 1.} |

$\mathfrak{C}_5 = \{$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 3 | 5 |
| 7 | 1. | 5. | 3 |
| 3 | 5. | $\underline{7}$. | $\underline{1}$. |
| 5 | 3 | $\underline{1}$. | $\underline{7}$} |

$\mathfrak{C}_6 \{$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 7 | 9. | 3 | 13 | 5 | 11 |
| 15 | 1. | 9. | 7 | 13. | 3 | 11 | 5. |
| 7 | 9. | $\underline{15}$ | $\underline{1}$ | $\underline{11}$. | $\underline{5}$. | 3. | 13 |
| 9 | 7 | $\underline{1}$ | $\underline{15}$. | $\underline{5}$. | $\underline{11}$ | 13. | 3. |
| 3 | 13. | $\underline{11}$. | $\underline{5}$. | 9 | 7. | 15 | 1. |
| 13 | 3 | $\underline{5}$. | $\underline{11}$ | 7. | 9. | 1 | 15 |
| 5 | 11 | 3. | 13. | 15 | 1. | $\underline{7}$. | $\underline{9}$ |
| 11 | 5. | 13 | 3. | 1. | 15 | $\underline{9}$ | 7} etc. |

Indem wir nun in

$$\Sigma_r^{2^{r-1}-1} e_r \partial_r \equiv 0 \bmod. p \text{ [2])}$$

die Substitution

$$M = M^u$$

machen wollen, wo

$$M^{2^\nu} \equiv 1 \bmod. p$$

vorausgesetzt, werden sich wegen $(-1)^r$ in

$$\partial_r = M^r + (-1) M^{-r}$$

für ungerades $r'$ die Punkte bei nicht markirten Resten wie in $\mathfrak{C}_\nu$ vorfinden, bei markirten jedoch da vorhanden sein (resp. fehlen), wo sie dort fehlen (resp. vorhanden sind).

Für gerade $r' \equiv 2 \bmod. 4$ werden sie mit denen in $\mathfrak{C}_{r-1}$ übereinstimmen, (wenn zuvor jede zweite Zeile ausgelassen, dann in entgegengesetztem Sinne mit Punkten versehen wird, wie die darüberstehende); für gerade $r' \equiv 4 \bmod. 8$ mit denen von $\mathfrak{C}_{r-2}$, wenn je drei Zeilen zuvor ausgelassen und dann die erste von diesen mit Punkten in demselben Sinne, wie die darüberstehende, die beiden andern im entgegengesetzten Sinne versehen werden und so fort ...

---

1) Die Anzahl der Punkte ist 1, 6, 26, 122, 478, 2030 ... allgemein?

2) Dies System Congruenzen ergiebt sich unmitelbar aus den: Bachmann, Kreisteilung X. Vorl. pag. 127. aufgestellten Jacobi'schen Congruenzen.

Wir haben z. B.:

$$\mathfrak{C}_4 = \left\{ \begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 1\ 3 \\ 0 & 2. & 3\ 1. \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{C}_5 = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 4 & 2\ 6 & 1\ 7 & 3\ 5 \\ 0 & 4 & 2.\ 6. & 7\ 1. & 5.\ 3 \\ \hline 0 & 4. & 6\ 2. & 3\ 5. & 7\ 1 \\ 0 & 4. & 6.\ 2 & 5\ 3 & 1\ 7. \end{array} \right\}$$

Der Punkt bei $r'$ deutet dann an, dass in der betreffenden Congruenz $c_r \partial_{r'}$ negativ zu nehmen ist. Eine Folgerung hievon ist, dass 7)

$$\Sigma_u \partial_{ru} . \partial_{r_1 u} \equiv 0$$

während

$$\Sigma \partial_{ru}^2 \equiv (-1)^r 2v \quad \text{und} \quad \Sigma \partial_0^2 = v$$

statthat, die Summe über

$$v = 2^{\nu-3}$$

Glieder ausgedehnt.

Setzen wir jetzt

$$c_r = u \,.\, \Sigma x_r^{(s)} \partial^s$$

wo $s$ jenachdem $r$ gerade oder ungerade nur gerade oder ungerade Werte annimmt $< v$ {$c_0$ enthält noch das Glied $x_0^{(\nu)} \partial^\nu$} und fragen, welchen Coefficient (abgesehen von Factor $u$) hat wol $\partial_{2t} \times x_r^{(s)}$ für ein gegebenes $u$?

Da

$$\partial_{r'} = \partial^{r'} + \left\{ \begin{matrix} r' \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{r'-2} + \ldots$$

ist, so wird das Product, wenn

$$s + r' = n \quad \text{ist:}$$

$$\pm x_r^{(s)} \left( \partial^n + \left\{ \begin{matrix} r' \\ 1 \end{matrix} \right\} \partial^{n-2} + \left\{ \begin{matrix} r' \\ 2 \end{matrix} \right\} \partial^{n-4} + \ldots \right)$$

Nun aber ist:

$$\begin{array}{ll|l} \partial^n & = \partial_n - \binom{n}{1} \partial_{n-2} + \binom{n}{2} \partial_{n-4} - \ldots & \cdot \left\{ \begin{matrix} r' \\ 0 \end{matrix} \right\} \\ \partial^{n-2} & = \partial_{n-2} - \binom{n-2}{1} \partial_{n-4} + \ldots & \cdot \left\{ \begin{matrix} r' \\ 1 \end{matrix} \right\} \end{array}$$

Es wird also von $\partial_{2t} x_r^{(s)}$ der Coefficient

$$\pm(-1)^{\varrho}\sum_{k=0}^{k=\varrho}(-1)^{k}\binom{n-2k}{\varrho-k}\left\{\begin{matrix} r' \\ k \end{matrix}\right\} \quad \text{für} \quad \varrho=\frac{n}{2}-t=\frac{s+r'}{2}-t$$

lauten, das ist nach Formel 2)

$$\pm(-1)^{2\varrho}\begin{bmatrix} r'-n \\ \varrho \end{bmatrix}=\pm(-1)^{2\varrho}\begin{bmatrix} -s \\ \varrho \end{bmatrix}=\pm(-1)^{3\varrho}\binom{s}{\varrho}$$

also ein Binomialcoefficient $\pm(-1)^{\varrho}\binom{s}{\varrho}$, wo $+$ oder $-$ davon abhängt, ob in $\mathfrak{C}_{\nu}'$ der Rest

$$r' \equiv u\, r \bmod. 2^{\nu}$$

ohne oder mit Punkt versehen ist; jedoch ist bei der Formel 2) wie vorhin bewiesen ja die Giltigkeit über die für $\delta$ ursprünglich vorhandenen Grenzen ausgedehnt; (nur bei $r'=0$ nicht). Da gleichwol aber diese Grenzen vorhanden, so müssen wir, wenn

$$\varrho \overset{=}{>} r'$$

ist, etwa um $\varrho'$ die Summe

$$(-1)^{\varrho-r'}\sum_{k=0}^{k=\lambda}(-1)^{k}\binom{n-2r'-2k}{\varrho'-k}\left\{\begin{matrix} r' \\ r'+k \end{matrix}\right\}$$

in Abzug bringen. Es ist aber, wie sich aus der erweiterten Tafel für die $\delta$ ergiebt,

$$\left\{\begin{matrix} r' \\ r'+k \end{matrix}\right\}=(-1)^{r'-1}\left\{\begin{matrix} -r' \\ k \end{matrix}\right\}$$

mithin erhalten wir nach Formel 2) für die eben erwähnte Summe den Wert

$$(-1)^{\varrho-r'+\varrho'+r'-1}\cdot\begin{bmatrix} -r'-n+2r' \\ \varrho' \end{bmatrix}$$

$$=-(-1)^{\varrho+\varrho'}\begin{bmatrix} r'-n \\ \varrho' \end{bmatrix}=-(-1)^{\varrho}\binom{n-r'}{\varrho'}=-(-1)^{\varrho}\binom{s}{\varrho'}$$

und im ganzen, da dieser Wert abzuziehen ist, als Coefficienten von $\partial_{2t} \times x_{r}^{(s)}$ den Ausdruck:

$$\pm(-1)^{\varrho}\left\{\binom{s}{\varrho}+\binom{s}{\varrho'}\right\}$$

wo

$$\varrho=\frac{s+r'}{2}-t$$

und

$$\varrho'=\frac{s-r'}{2}-t$$

Der Coefficient $K^{(U)}{}_{3v+2(t-1)}$ [1]) von $\partial_{2t}$ wird demnach 8)

$$\Sigma_r \Sigma_s (\pm)(-1)^\varrho \left\{ \binom{s}{\bar{\varrho}} + \binom{s}{\varrho'} \right\} x_r^{(s)} + (-1)^t x_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

$$0 \leqq r < 2v-1$$

und

$$0 \leqq s \leqq v$$

Für $r = r' = 0$ würde

$$\binom{s}{\bar{\varrho}} = \binom{s}{\varrho'}$$

es ist aber aus dem oben angeführten Grunde dennoch nicht zu verdoppeln. Z. B. wird, wenn die Ordnung $\nu = 6$, also $\nu = 8$ ist,

$$\begin{aligned} K_{30}^{(1)} = x_0^{(8)} - 20x_8^{(6)} + 6x_8^{(4)} - 2x_8^{(2)} + x_8^{(0)} + 1x_1^{(7)} \\ -6x_4^{(6)} + 1x_4^{(4)} \qquad\qquad -1x_{15}^{(7)} \\ -6x_{12}^{(6)} + 1x_{12}^{(4)} \qquad\qquad -35x_7^{(3)} + 10x_7^{(5)} - 3x_7^{(3)} \\ + x_7^{(1)} \\ +1x_2^{(6)} \qquad\qquad +35x_9^{(7)} - 10x_9^{(5)} + 3x_9^{(3)} \\ - x_9^{(1)} \\ +1x_{14}^{(6)} \qquad\qquad -7x_3^{(7)} + 1x_3^{(5)} \\ +15x_6^{(6)} - 4x_6^{(4)} + 1x_6^{(2)} \qquad\qquad +7x_{13}^{(7)} - 1x_{13}^{(5)} \\ +15x_{10}^{(6)} - 4x_{10}^{(4)} + 1x_{10}^{(2)} \qquad\qquad +21x_5^{(7)} - 5x_5^{(3)} + 1x_5^{(3)} \\ +21x_{11}^{(7)} + 5x_{11}^{(5)} - 1x_{11}^{(3)} \end{aligned}$$

In das System der Grössen $K^{(U)}$ führen wir linear

$$x_r^{(s)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leqq \frac{v-s}{2}} \left\{ \begin{matrix} s+2\lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\} y_r^{(s+2\lambda)} \quad \text{ein.}$$

Die Substitutionsdeterminante dieser linearen Transformation von $(v^2+1)^2$ Elementen hat den Wert 1, daher sind auch umgekehrt die $y_r^{(s)}$ bequem durch die $x_r^{(s)}$ auszudrücken. Dann ergeben sich wieder Binomialcoefficienten, also

---

1) $K_{2\gamma}$ ursprünglich als Coefficient von $M^{2\gamma}$ gedacht. $t$ ist höchstens

$$= \frac{3v}{2} - 1$$

Werden daher die Congruenzen mit $M^{3v-2}$ aufmultiplicirt, so folgt

$$0 \equiv K_{6v-4}(M^{6v-4}+1) + K_{6v-6}(M^{6v-6}+M^2) + \ldots K_{3v-2}M^{3v-2}$$

$$y_r^{(s)} = \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \binom{s+2\lambda}{\lambda} x_r^{(s+2\lambda)}$$

Durch die Transformation wird die Grösse

$K^{(u)}_{3s+2(t-1)} =$

$$\Sigma_r \Sigma_s (\pm)(-1)^\varrho \left\{\binom{\frac{s}{-}}{\varrho} + \binom{s}{\varrho'}\right\} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{v-s}{2}} \left\{\begin{matrix} s+2\lambda \\ \lambda \end{matrix}\right\} y_r^{s+2\lambda}$$

$$+(-1)^t y_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

Nur für $r = r' = 0$ erreicht $s+2\lambda$ den höchsten Wert $v$. Greifen wir diesen Teil der $\Sigma\Sigma\Sigma$ heraus, so wird derselbe, indem $(-1)^t y_0^{(v)} \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$ hinzugezogen und $\binom{\frac{s}{-}}{\varrho} + \binom{s}{\varrho'}$ einfach zu rechnen ist (vgl. oben),

$$= +(-1)^{\varrho-\lambda} \Sigma\lambda\, 1 . \binom{v-2\lambda}{\varrho-\lambda} \left\{\begin{matrix} v \\ \lambda \end{matrix}\right\} y_0^{(v)} = 0$$

nach 2), wenn

$$\varrho = \frac{v}{2} - t \quad \text{nicht} \quad = 0$$

wenn aber

$$t = \frac{v}{2} \quad \text{also} \quad \varrho = 0$$

ist, und $\binom{v-2\lambda}{-\lambda}$ bei $\lambda > 0$ verschwindet, reducirt er sich auf $+1 y_0^{(v)}$.

Ganz ebenso verhält es sich, wenn $s+2\lambda$ den Wert $\sigma$ annimmt, während $r$, somit auch $r'$ constant gedacht wird. Zunächst ist für diesen Teil der $\Sigma\Sigma\Sigma$ dann auch nur immer eines der Zeichen $(\pm)$ giltig, das ja von $r'$ in $\mathfrak{C}_v'$ abhängig war und überdies besteht er wegen $\binom{\frac{s}{-}}{\varrho}$ und $\binom{s}{\varrho'}$ aus zwei Summen:

$$(\pm)\Sigma\lambda(-1)^{\varrho-\lambda} \binom{\sigma-2\lambda}{\varrho-\lambda} \left\{\begin{matrix} \sigma \\ \lambda \end{matrix}\right\} y_r^{(\sigma)}; \quad \varrho = \frac{\sigma+r'}{2} - t$$

und

$$(\pm)\Sigma\lambda(-1)^{\varrho-\lambda} \binom{\sigma-2\lambda}{\varrho'-\lambda} \left\{\begin{matrix} \sigma \\ \lambda \end{matrix}\right\} y_r^{(\sigma)}; \quad \varrho' = \frac{\sigma-r'}{2} - t$$

Diese Summen verschwinden beide, ausser wenn

$$t = \frac{\sigma + r'}{2};\quad \frac{r' - \sigma}{2} \quad \text{oder} \quad t = \frac{\sigma - r}{2}$$

und $\lambda$ folglich $= 0$ ist. Dann erhalten wir

$$\pm(-1)^0 y_r^{(\sigma)};\quad \pm(-1)^\sigma y_r^{(\sigma)} \quad \text{und} \quad \pm(-1)^\varrho y_r^{(\sigma)}$$

Dies ist

$$= \pm(-1)^\sigma y_r^{(\sigma)}$$

da

$$\varrho = \frac{\sigma + r'}{2} - \frac{\sigma - r'}{2} = r' \equiv \sigma \bmod. 2$$

wird. Ist endlich $t = 0$ und $\sigma = r'$, so ergiebt sich

$$\pm(-1)^\sigma . 2 . y_r^{(\sigma)}$$

jedoch wieder:

$$1 y^{(0)}{}_{r=t=0}$$

Dies möge

$$= \mathfrak{y}_0{}^0$$

gesetzt werden, indem

$$\mathfrak{y}_0{}^0 = \tfrac{1}{2} y_0{}^0$$

eingeführt wird.

Satz 9) Es kommen also in $K_{3v+2(t-1)}$ für $t > 0$ und in $K_{3v+2}$ gar keine andern Coefficienten bei $y_r^{(s)}$ vor als: Null, $+1$ oder $-1$.

So wird z. B. für

$$\nu = 6,\quad v = 8,\quad t = 4,\quad u = 1$$

der Coefficient transformirt

$$= y_0^{(8)} + y_8^{(0)} + y_4^{(4)} + y_{12}^{(4)} + y_2^{(6)} + y_{14}^{(6)} + y_6^{(2)} + y_{10}^{(2)} + y_1^{(7)}$$
$$- y_{15}^{(7)} + y_7^{(1)} - y_9^{(1)} + y_3^{(5)} - y_{13}^{(5)} + y_5^{(3)} - y_{11}^{(3)}$$

Indem wir bei den so umgeformten Congruenzen

$$\Sigma e_r \partial_{ru} \equiv 0 \bmod. p$$

jedesmal das Glied mit $K_{5v-2}$ ausschliessen, weil es offenbar teilbar durch $p$ ist und die Differenzen $K_{5v-2(\gamma+1)} - K_{5v-2(\gamma-1)}$ bilden, welche Ausdrücke auf diese Weise nämlich eine gleichartige Beschaffenheit mit den übrigen $\frac{v}{2}$ Grössen $K$ erhalten [1]), lässt sich das Coefficientenschema für die $y_r^{(s)}$, wie sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar ergiebt, folgendermassen leicht bilden.

---

1) Diese Ausdrücke mögen deshalb, wie auch die übrigen $K$ nunmehr einfach mit $K_t^{(u)}$ bezeichnet werden.

Man verteile $v(v+1)(v^2+1)$ Felder in ein Rechteck, dessen verticale Seite $v(v+1)$, dessen horizontale

$$1+\frac{v}{2}+\frac{1v}{2}+\frac{2v}{2}+\frac{4v}{2}+\frac{8v}{2}+\cdots+\frac{rv}{2}$$

Einheiten enthält, $v=2^{r-3}$.

Sehen wir von der ersten Rand-Colonne, welche ein Streifen von der Breite 1 und der Länge $v(v+1)$ ist, vorläufig ab, so lassen sich die übrigen Streifen, resp. von der Breite $\frac{v}{2}, \frac{1v}{2}, \frac{2v}{2}, \frac{4v}{2} \ldots$ in Rechtecke, $\frac{v}{2}$ breit und $v+1$ lang, zerlegen, die wir jetzt als Gruppen $\mathfrak{G}_{r'}$ bezeichnen, wo der Index $r'$ mit dem in $\mathfrak{C}_r$ übereinstimmt.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_{r'}$ enthält also $\frac{v}{2}(v+1)$ Felder, die mit null, $+$ oder $-$ eins auszufüllen sind und die Coefficienten der Unbekannten $y_r^{(s)}$ repräsentiren. Als verticale Eingänge sind daher für die einzelne Gruppe

$$t=0,\quad t=1,\quad t=2,\quad \ldots\quad t=v-1;\quad t=v$$

als horizontale die Unbekannten $y_r^{(s)}$ zu denken, wo $s$ für gerades $r$ die Werte 0, 2, 4 ... $v-2$, für ungerades $r$ die Werte 1, 3, 5 ... $v-1$ hat.

Gruppen, die sich vertical untereinander befinden, gehören zu demselben $r$; Gruppen, die horizontal nebeneinander liegen, zu demselben $u$, welches die ungeraden Zahlen, so wie $r$ alle Zahlen in der halbirenden Anordnung wie in $\mathfrak{C}_r$ durchläuft.

In der Gruppe $\mathfrak{G}_{r'}$, wo

$$ru \equiv r' \text{ mod. } 2^v$$

wird nun, falls $r'$ ungerade ist und in $\mathfrak{C}_r'$ nicht mit einem Punkt versehen war, in der ersten Verticalreihe

von $v+1$ Feldern das zu $\begin{array}{l} s=1 \\ t=\frac{r'+1}{2} \end{array}$

gehörige mit einem $+$, das zu

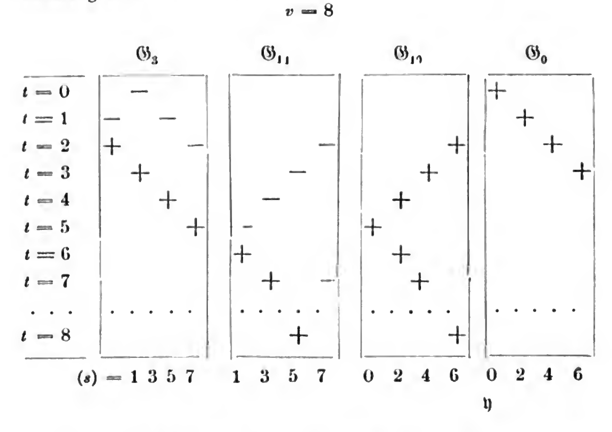
$$t=\frac{r'-1}{2}$$

gehörige mit einem $-$ zu füllen sein, in der zweiten Verticalreihe

$$s = 3$$

das zu $\frac{r'+3}{2}$ gehörige mit $+$, das zu $\frac{r'-3}{2}$ gehörige mit $-$ und so fort, bis entweder der obere oder der untere Rand unter $45^0$ erreicht wird, wo dann beide Male unter rechtem Winkel eine Reflexion stattfindet, beim oberen Rande ohne, beim unter mit Zahlenveränderung z. B.

$$v = 8$$



Ist $r'$ gerade, so wird in der ersten Verticalen der Gruppe $\mathfrak{G}_{r'}$ nur ein Feld, das zu

$$t = \frac{r'}{2}$$

gehörende mit einem $+$ gefüllt sein, in der zweiten Verticale die zu

$$t = \frac{r'-2}{2} \quad \text{und zu} \quad t = \frac{r'+2}{2}$$

gehörenden, beide mit $+$ und so fort wie vorhin.

Ist $r'$ mit einem Punkte in $\mathfrak{C}'$ versehen, so sind durchweg die entgegengesetzten Zeichen zu nehmen.

Bei $\mathfrak{G}_0$ ist nur eine Reihe von $+$ Zeichen für

$$t = 0, \quad 1, \quad 2 \quad \ldots$$

resp. in der ersten, zweiten, dritten Verticalen.

In der ersten Rand-Colonne ist nur jedesmal das zu

$$t = \frac{v}{2}$$

gehörende Feld mit $+$ zu bezeichnen.

Schliesslich müssen alle zu

$$t = v$$

gehörenden Horizontalreihen fortgelassen werden, da wir das Glied mit

$$K^{(u)}{}_{5v-2} = K_v^{(u)}$$

ausschlossen, und mögen überdies die jedesmal complementären Streifen $2^{v-2} - v$ statt der Anordnung ... $s$, $s+2$, $s+4$ ... die entgegengesetzte ... $s+4$, $s+2$, $s$ ... ihrer Verticalcolonnen erhalten. Wir gewinnen dann die $v$-Elemente (die Randcolonne nicht eingerechnet) der a. a. O. erwähnten Kreisteilungsdeterminante und es dürfte vielleicht von Interesse sein, sie für

$$v = 8$$

wirklich aufzustellen.

(Der Kürze halber sei hier nur das erste Viertel dieser Determinante gegeben.)

| $t$ | | $r=0$ | | | | $r=8$ | | | | $r=4$ | | | | $r=12$ | | | | $r=2$ | | | | $r=14$ | | | | $r=6$ | | | | $r=10$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 2 | 0 | 0 | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | 2 | 0 | Anschlss |
| 0 | | | | | + | | | | | | | + | | | | | | | + | | | | | | | | | | + | | | | | |
| 1 | | | | + | | + | | | | | + | | + | | | | | + | | + | | | | | | | | + | | | | | | |
| 2 | | | + | | | | + | | | + | | | | | | | | | + | | + | | | | | | + | | | + | | | | |
| 3 . | | + | | | | | | + | | | + | | | + | | | | | | + | | | | | | + | | | | | + | | | |
| 4 | + | | | | | | | | + | | | + | | | + | | | | | | + | + | | | | | + | | | | | + | | $u=1$ |
| 5 | | | | | | | | + | | | | | + | | | + | | | | | | | + | | | | | + | | | | | + | |
| 6 | | | | | | | + | | | | | | | | | | + | | | | | − | | + | | | | | + | | | + | | |
| 7 | | | | | | + | | | | | | | | − | | + | | | | | | | − | | + | | | | | | + | | | |
| 0 | | | | | + | | | | | | | + | | | | | | | − | | | | | | | | | | − | | | | | |
| 1 | | | | + | | + | | | | | + | | + | | | | | − | | − | | | | | | | | − | | | | | | |
| 2 | | | + | | | | + | | | + | | | | | | | | | − | | − | | | | | | − | | | − | | | | |
| 3 . | | + | | | | | | + | | | + | | | + | | | | | | − | | | | | | − | | | | | − | | | |
| 4 | + | | | | | | | | + | | | + | | | + | | | | | | − | − | | | | | − | | | | | − | | $u=15$ |
| 5 | | | | | | | | + | | | | | + | | | + | | | | | | | − | | | | | − | | | | | − | |
| 6 | | | | | | | + | | | | | | | | | | + | | | | | | | − | | | | | − | | | − | | |
| 7 | | | | | | + | | | | | | | | − | | + | | | | | | | | | − | | | | | | − | | | |
| Wert. für $y_r^{(s)}$ | −1 | 8 | | | | 4 | | | | | | | 2 | 2 | | | | | | | −3 | 1 | | | | | | | −1 | −3 | | | | 1 6 9 2 |
| | | | −24 | | | | −18 | | | | | −13 | | | −5 | | | | | 13 | | | −2 | | | | | 10 | | | 14 | | | 1 4 2 ; $\delta$ |
| | | | | 44 | | | | 32 | | | 26 | | | | | 10 | | | −37 | | | | | 1 | | | −25 | | | | | −27 | | 1 2 |
| | | | | | −27 | | | | −35 | −30 | | | | | | | −14 | 44 | | | | | | | 0 | 32 | | | | | | | 22 | 1 |
| Wert. für $x_r^{(s)}$ | −1 | 0 | | | | 4 | | | | | | | 2 | 2 | | | | | | | −3 | 1 | | | | | | | −1 | −3 | | | | 1 −6 15 −20 |
| | | | 4 | | | | 6 | | | | | −1 | | | 7 | | | | | 2 | | | 4 | | | | | 4 | | | −4 | | | 1 −4 6 ; $\beta$ |
| | | | | 4 | | | | −4 | | | −8 | | | | | 8 | | | 8 | | | | | 2 | | | 6 | | | | | 2 | | 1 −2 |
| | | | | | 0 | | | | 1 | 0 | | | | | | | 0 | 0 | | | | | | | 0 | 0 | | | | | | | 0 | 1 |

| | $r=1$ | | | | $r=15$ | | | | $r=7$ | | | | $r=9$ | | | | $r=3$ | | | | $r=13$ | | | | $r=5$ | | | | $r=11$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anschluss | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 5 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 5 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 5 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 5 | 3 | 1 | $s$ | | | | |
| 0 | − | | | | | | | | | | | − | | | | | | − | | | | | | | | | − | | | | | | | | | | $u=1$ |
| 1 | + | − | | | | | | | | | − | | − | | | | − | | − | | | | | | | − | | − | | | | | | | | | |
| 2 | | + | − | | | | | | | − | | | | − | | | + | | | − | | | | | − | | | | − | | | | | | | | |
| 3 | | | + | − | | | | | − | | | | | | − | | | + | | | − | | | | + | | | | | − | | | | | | | |
| 4 | | | | + | − | | | | + | | | | | | | − | | | + | | | − | | | | + | | | | | − | | | | | | |
| 5 | | | | | − | − | | | | + | | | | | | + | | | | + | | | − | | | | + | | | | | − | | | | | |
| 6 | | | | | | − | − | | | | + | | | | + | | | | | | − | | | − | | | | + | | | | + | | | | | |
| 7 | | | | | | | − | − | | | | + | | + | | | | | | | | − | | + | | | | | − | | + | | | | | | |
| 0 | | | | | | | | + | | | | | − | | | | | | | | | | − | | | | | | | + | | | | | | | $u=15$ |
| 1 | | | | | | | + | − | | | | + | | − | | | | | | | | − | | − | | | | | + | | + | | | | | | |
| 2 | | | | | | + | − | | | | + | | | | − | | | | | | − | | | + | | | | − | | | | + | | | | | |
| 3 | | | | | + | − | | | | + | | | | | | − | | | | + | | | + | | | | − | | | | | − | | | | | |
| 4 | | | | − | − | | | | + | | | | | | | + | | | + | | | + | | | | − | | | | | − | | | | | | |
| 5 | | | − | − | | | | | − | | | | | | + | | | + | | | + | | | | − | | | | | − | | | | | | | |
| 6 | | − | − | | | | | | | − | | | | + | | | + | | | + | | | | | + | | | | − | | | − | | | | | |
| 7 | − | − | | | | | | | | | − | | + | | | | − | | + | | | | | | | + | | − | | | | | | | | | |
| Wert. für $y_r^{(s)}$ | | | | 1 | −1 | | | | | | | −1 | −1 | | | | | | | −1 | 1 | | | | | | | 1 | −1 | | | | 1 | 7 | 14 | 7 | $\delta$ |
| | | | −7 | | | 5 | | | | | 7 | | | −1 | | | | | 11 | | | −5 | | | | | −11 | | | 5 | | | | 1 | 5 | 5 | |
| | | 21 | | | | | −9 | | | −21 | | | | | 11 | | | −31 | | | | | 13 | | | 31 | | | | | −11 | | | | 1 | 3 | |
| | −35 | | | | | | | 9 | 31 | | | | | | | −17 | +43 | | | | | | | −21 | −45 | | | | | | | 17 | | | | 1 | |
| Wert. für $x_r^{(s)}$ | | | | 1 | −1 | | | | | | | −1 | −1 | | | | | | | −1 | 1 | | | | | | | 1 | −1 | | | | 1 | −7 | 21 | −35 | $\beta$ |
| | | | 0 | | | −2 | | | | | 0 | | | −8 | | | | | 4 | | | 2 | | | | | −4 | | | −2 | | | | 1 | −5 | 10 | |
| | | 0 | | | | | 2 | | | 0 | | | | | −8 | | | 10 | | | | | 2 | | | −10 | | | | | 0 | | | | 1 | −3 | |
| | 0 | | | | | | | 0 | −4 | | | | | | | 4 | −2 | | | | | | | 0 | 0 | | | | | | | 2 | | | | 1 | |

Satz 10) **Die $v^2$ Grössen $K_t^{(u)}$ müssen einzeln verschwinden.** Hierauf wird man durch folgende Betrachtung geführt.

Da

$$\partial_{2a} + \partial_{4v-2a} \equiv 0 \text{ mod. } p$$

wo $p$ von der Form $M^{4v}+1$ {und $M = 2 \cdot 2^{2^{\mu-v}}$}, so lassen sich die Glieder $K_{\frac{v}{2}+\gamma}\,\partial_{v+2\gamma}$ und $K_{\frac{3v}{2}-\gamma}\,\partial_{3v-2\gamma}$ in $\left(K_{\frac{v}{2}+\gamma} - K_{\frac{3v}{2}-\gamma}\right)\partial_{v+2\gamma}$ zusammenziehen, und unser System Congruenzen wird, wenn wir es in Form von Gleichungen schreiben, für $v$ Werte: $u$

I) $\quad \mathfrak{n}(K_0^{(u)} + K_1^{(u)}\,\partial_2 + K_2^{(u)}\,\partial_4 + \ldots K^{(u)}{}_{v-1}\,\partial_{2v-2}) = g^{(u)} \cdot p$

Nach Archiv der Math. u. Phys. 2te Reihe T. VI. pag. 293. gelten aber zugleich

$$\Sigma e^2 = p \quad \text{und} \quad \Sigma e_k\, e_{k+\lambda} = 0$$

ausserdem

$$e_0 \equiv -1 \text{ mod. } 4\,^{1)}.$$

Zur Vereinfachung behandeln wir diese Bedingungsgleichungen unter der gemeinschaftlichen Form:

$$\sum_{r=0}^{r=4v-1} e_r\, e_{r+2\gamma} = p \quad \text{oder} \quad = 0$$

je nachdem $\gamma = 0$ ist, oder oder die Werte 1, 2 ... $(v-1)$ annimmt.

Dabei ist

$$e_r = -e_{r'}$$

wenn $r'$ um $r$ grösser als $4v$ ist, und

$$e_r = \pm e_{4v-r}$$

wo + bei ungeradem, — bei geradem $r$ gilt. Dann noch

$$e_{2v} = 0$$

Diese Beziehungen können offenbar auf die $x_r^{(s)}$ übertragen werden, und wir erhalten für den Coefficienten $\mathfrak{K}_t^{(\gamma)}$ von $\partial_{2t}$ für ein beliebiges $\gamma$ abgesehen von dem Factor $\mathfrak{n}^2$ den Ausdruck:

$$\sum_{k=0}^{k=v-t} (-1)^k \binom{2t+2k}{k} \sum_{s+s'=2t+2k} \sum_{0}^{4v-1}{}_r\, x_r^{(s)}\, x_{r+2\gamma}^{(s')}$$

---

1) Erst bei hohen Ordnungen $v$ wird

$$e \equiv +1 \text{ mod. } 4$$

bei der letzten wieder

$$\equiv -1 \text{ mod. } 4.$$

wobei $s$ und $s'$ alle zulässigen Werte annehmen müssen; man wird also $s+s'$ wie auch $s'+s$, wenn beide ungleich sind, in Rechnung ziehen müssen. Viele, keineswegs immer alle Glieder $x_r^s x_{r+2\gamma}$ wiederholen sich, wenn $r > 2v$ wird, indem die eben angeführten Beziehungen Platz greifen.

Wird nun, da $M^{2v}\partial_{2v} = p$ ist,

$$\mathfrak{n} = M^v$$

angenommen, so ergiebt sich, nachdem durch $\mathfrak{n}^2$ dividirt, ein System Gleichungen:

$$\text{II)}\quad \mathfrak{K}_0^{(\gamma)} + \mathfrak{K}_1^{(\gamma)}\partial_2 + \mathfrak{K}_2^{(\gamma)}\partial_4 + \ldots \mathfrak{K}_{v-1}^{(\gamma)}\partial_{2v-2} + (\mathfrak{K}_v^{(0)} - 1)\partial_{2v} = 0$$

worin das letzte Glied nur für

$$\gamma = 0$$

hinzutritt. Da hierin die $\partial$ von $M$ und somit von $\mu$ abhängig sind, die $\mathfrak{K}^{(\gamma)}$ aber nur von $v$, da also jede Gleichung des System's II) bestehen bleibt, auch wenn zu anderm $\mu$ gehörige $\partial$ zu Grunde gelegt werden, so müssen wir die $\mathfrak{K}^{(\gamma)}$ einzeln $= 0$ setzen und

$$\mathfrak{K}_v^{(0)} = 1$$

denn die Determinante der $\partial$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & \partial_2 & \partial_4 & \ldots \\ 1 & \partial_2' & \partial_4' & \ldots \\ 1 & \partial_2'' & \partial_4'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & \partial^2 + \begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}, & \partial^4 + \begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\partial^2 + \begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix} \ldots \\ 1, & \partial'^2 + \begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}, & \partial'^4 + \begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\partial'^2 + \begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix} \ldots \\ 1, & \partial''^2 + \begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}, & \partial''^4 + \begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}\partial''^2 + \begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \partial^2 & \partial^4 & \ldots \\ 1 & \partial'^2 & \partial'^4 & \ldots \\ 1 & \partial''^2 & \partial''^4 & \ldots \\ \ldots & & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \Pi(\partial^{(k)} + \partial^{\lambda})(\partial^{(k)} - \partial^{(\lambda)})\;[1]$$

verschwindet nicht, wenn die $\partial$ alle unter sich verschieden sind. {Ob sich die genügende Anzahl ungleicher $\partial$, für welche II) gilt, vor-

1) Vgl. Baltzer, Determinanten. § 10.

findet, könnte freilich in Zweifel gezogen werden, wenn die Reihe der Primzahlen von der Form $p$ abbrechen möchte.}

Weil die Coefficienten $\mathfrak{K}^{(\gamma)}$ verschwinden, und

$$\mathfrak{K}_v^{(0)} = 1$$

ist, so muss offenbar:

$$11)\qquad \sum_{s+s'=2t} \sum_{0}^{4v-1} x_r^{(s)} x_{r+2\gamma}^{(s')} = \begin{Bmatrix} 2v \\ v-t \end{Bmatrix} \quad \text{oder} \quad = 0$$

sein, je nachdem

$$\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad > 0 \quad \text{ist.}$$

Hiedurch erhalten wir $v^2+1$ Gleichungen 2ten Grades für die Unbekannten $x_r^{(s)}$.

$$\mathfrak{K}_v^{(0)} = x_0^{(v)})^2 = 1$$

ergiebt:

$$x_0^{(v)} = -1$$

wo sich das Zeichen aus:

$$e_0 \equiv -1 \text{ mod. } 4$$

folgern lässt. $\mathfrak{K}_{v-1}$ wird

$$-2v + 2x_0^{(v)} x_0^{(v-2)} + \sum_{1}^{4v-1}{}_r\, x_r^{(v-1)} x_{r+2\delta}^{(v-1)} = 0$$

$\mathfrak{K}_{v-1}^{(\gamma)}$ wird

$$x_0^{(v)} x_{2\gamma}^{(v-2)} + \sum_{1}^{4v-1}{}_r\, x_r^{(v-1)} x_{r+2\gamma}^{(v-1)} + x_{4v-2\gamma}^{(v-2)} x_{4v}^{(v)}$$

$$= 2x_0^{(v)} x_{2\gamma}^{(v-2)} + \sum_{1}^{4v-1} x_r^{(v-1)} x_{r+2\gamma}^{(v-1)} = 0; \quad \text{etc.}$$

Ueber die Natur der Zahlen $x_r^{(s)}$ lässt sich hieraus wenigstens so viel ersehen, dass sie nicht von $\mu$ abhangen, sondern von $\nu$, denn $v$ war $= 2^{\nu-3}$. Mithin wird die Determinante der aus den $x_r^{(s)}$ zusammengesetzten Grössen $K_t^{(u)}$ nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} K_0^{(1)} & K_1^{(1)} & \ldots \\ K_0^{(3)} & K_1^{(3)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

keineswegs den Factor $p$ enthalten können, (von null mal $p$ natürlich abgesehen); es sind also auch in System I) die $g^{(u)} = 0$, weil sich sonst aus der Auflösung des Systems I) nach den $n^2.\partial_{2t}$ für diese Vielfache von $p$ ergeben würden, was nicht angeht, so dass also das System der Congruenzen schliesslich in die Gleichungen:

$$\text{I}')\qquad K_0^{(u)} + K_1^{(u)} \partial_2 + \ldots K_{v-1}^{(u)} \partial_{2v-2} = 0$$

übergeht, aus denen sich dann, wie vorhin ergiebt, dass die $K_t^{(u)}$ einzeln $= 0$ sein müssen. Dies sind dann $v^2$ lineare Gleichungen für $v^2$ Unbekannte $x_r^{(s)}$ oder nach der Transformation auch für $y_r^{(s)}$.

Da nun $x_0^{(v)}$ bei $\partial_{2t}$ in den Binomialcoefficienten $(-1)^t \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$ multiplicirt war, während $x_1^{(v-1)}$ als Factor

$$(\pm)(-1)^t \left\{ \binom{v-1}{\frac{v}{2}-t} + \binom{v-1}{\frac{v}{2}-t-1} \right\}$$

also ebenfalls

$$\pm(-1)^t \binom{v}{\frac{v}{2}-t}$$

besitzt, so wird man

$$x_r^{(v-1)} \mp x_0^{(v)} = 0$$

setzen können, jenachdem bei $\mathfrak{C}_v'$ in Zeile $u$ der Rest $r_1 = 1$ mit Punkt versehen war oder nicht, so dass sich z. B.

$$x_1^{(7)} = x_5^{(7)} = x_{13}^{(7)} = +1$$
$$x_{15}^{(7)} = x_7^{(7)} = x_9^{(7)} = x_3^{(7)} = x_{11}^{(7)} = -1$$

ergeben, hieraus wieder nach der Formel $\mathfrak{K}_{v-1}^{(0)}$ und $\mathfrak{K}\gamma_{v-1}$ die Werte:

$$x_0^{(v-2)} = x_0^6 = 0$$
$$x_2^{(6)} = x_1^{(7)} x_3^{(7)} + x_3^{(7)} x_5^{(7)} + \ldots = -3$$

ebenso

$$x_4^{(6)} = 2, \quad x_6^{(6)} = -1, \quad x_8^{(6)} = 4, \quad x_{10}^{(6)} = -3, \quad x_{12}^{(6)} = 2$$
$$x_{14}^{(6)} = 1 \quad \text{etc.}$$

Diese Betrachtung findet darin ihre Bestätigung, dass die pag. 288 unter die Kreisteilungsdeterminante gesetzten Werte $y_r^{(s)}$ in der Tat die einzelnen Zeilen $K_t^{(u)}$ zu null machen, wenn man sie an die mit + oder — gefüllten Stellen einsetzt ($y_0^{(8)} = -1$) und dass die aus den $y_r^{(s)}$ durch Multiplication mit dem beigefügten Schema der $\delta$ [1]) gewonnenen $x_r^{(s)}$ die in den Binomialcoefficienten $\beta$ aufgestellten Gleichungen $K_t^{(u)} = 0$ z. B.

---

1) Bei $r = 0$ hat man aber:

$$\begin{Bmatrix} -1 & & & & \\ & 8 & & & \\ & & -24 & & \\ & & & 44 & \\ & & & & (\mathfrak{y}_0^0 = -27); \quad y_0^0 = -54 \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 8 & 20 & 16 & 2 \\ & 1 & 6 & 9 & 2 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{Bmatrix}$$

zu nehmen, um die $x_u^{(s)}$ zu erhalten.

$$K_{30}^{(1)} = 0$$

auf pag. 282 erfüllen. Hiedurch haben wir also auf eine durch die Natur des Gegenstandes begründete Weise, nach bestimmter Regel construirte Systeme linearer Gleichungen mit eben sovielen Unbekannten, als ihre Anzahl beträgt, erhalten, welche die Eigenschaft besitzen, durch ganze rationale Zahlen sich auflösen zu lassen. Zugleich sind dadurch die Zahlen $e_r$ (*ohne* Indextabelle) direct ermittelt, wie auch die Bedingungsgleichungen erfüllt, freilich nur in dem durch die Ordnung $\nu$ bedingten Umfange, denn $\nu < \mu + 1$ scheint zunächst wenigstens erforderlich. (Ausdehnung auf $\nu = \mu + 2$ siehe a. a. O.)

Königsberg i./Pr., den 19. October 1888.

XII.

# Independente Darstellungen der Tangenten- und Secanten-Coefficienten.

Von

**Franz Rogel.**

---

Wenn in der bekannten Formel:

$$\cos\frac{x+1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{5}\right)\cdots$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\prod_0^\infty\left[1-\frac{(-1)^m}{2m+1}x\right] \qquad 1]$$

der Reihe nach $\alpha_1 x, \alpha_2 x, \ldots \alpha_n x$, wo $\alpha$ eine eigentliche Einheitswurzel $=\sqrt[m]{+1}$ und $\alpha_r = \alpha^r$ ist, statt $x$ gesetzt wird, so ergiebt sich durch Multiplication der $n$ Gleichungen:

$$y = \prod_1^n{}_r \cos\frac{\alpha_r x+1}{4}\pi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \prod_0^\infty\left[1-\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^n}x^n\right] \qquad 2]$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n[1-R_n x^n \pm \ldots]$$

worin

$$R_n = \frac{1}{1^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{(-1)^n}{7^n}+\cdots$$

also bei geradem $n$

$$R_n = T_n = \sum_0 \frac{1}{(2m+1)^n}$$

und bei ungeradem $n$

$$R_n = U_n = \Sigma \frac{(-1)^m}{(2m+1)^n} \quad \text{ist.}$$

Diese Reihen hangen in einfacher Weise mit den Tangenten- und Secanten-Coefficienten $\tau_n$ zusammen; es ist nämlich:

$$\tau_n = \frac{2^{n+2} n!}{\pi^{n+1}} R_{n+1} \tag{2'}$$

bei ungeradem $n$ sind die $\tau_n$ Tangenten-, bei geradem $n$ Secanten-Coefficienten.

Mittelst des Mac-Laurin'schen Satzes kann $y$ in eine zweite Reihe entwickelt werden; die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $x$ gleichsetzt, führt zu

$$\frac{1}{n!} D_x{}^n y_0 = -\frac{1}{(\sqrt{2})^n} R_n \tag{3}$$

Der $n$te Differentialquotient des Productes $y$ kann nun entweder durch directes Differentiiren desselben oder durch das sogenannte logarithmische Differentiiren gefunden werden.

## I.

Um $y_0{}^{(n)}$ nach ersterer Art zu bestimmen, sei allgemein

$$y = x_1 x_2 \dots x_n$$

wo $x_1 \; x_2 \dots x_r \dots$ beliebige Functionen von $x$ bedeuten sollen; dann ist:

$$y' = x_1'.x_2 \dots x_n + x_1 x_2' x_3 \dots x_n + \dots$$
$$y'' = x_1''.x_2 \dots x_n + 2x_1' x_2' x_3 \dots x_n + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

woraus zu ersehen ist, dass $y^{(n)}$ jedenfalls aus der Summe von Producten $P_1, P_2 \dots P_r \dots$ bestehen wird, welche mit noch unbekannten, von der Natur der Functionen $x_r$ unabhängigen, dagegen von $n$ abhängigen Zahlencoefficienten $C_1, C_2 \dots$ behaftet sind, also

$$y^{(n)} = \Sigma C_r P_r$$

Die Bestandteile $C_r P_v$ von $y^{(n)}$ haben offenbar die Form $C_1 x_1{}^{(\alpha)}.x_2{}^{(\beta)} \dots x_n{}^{(\nu)}$, unter $x_1{}^{(\alpha)}, x_2{}^{(\beta)} \dots$ Differentialquotienten der Ordnung $\alpha, \beta \dots$ der Functionen $x_1, x_2 \dots$ verstanden, wobei die Ordnungs-

Exponenten die Werte von 0 bis $n$ annehmen. Der 0te Differentialquotient ist die Function selbst, d. h es ist

$$x_1^{(0)} = x_1, \quad x_2^{(0)} = x_2 \ldots$$

Die Bestimmung der Coefficienten $C_1$, $C_2$ ... geschieht am einfachsten auf die Art, dass für $x_1$, $x_2$ ... bekannte Functionen, deren höhere Differentialquotienten sich recht leicht angeben lassen, substituirt werden, etwa

$$x_1 = e^{a_1 x} \ldots x_r = e^{a_r x} \ldots$$

dann ist

$$x_r^{(\varrho)} = (a_r)^\varrho x_r, \quad y = e^{(a_1 + \ldots a_n)x}, \quad y^{(n)} = (a_1 + \ldots + a_n)^n y$$

$$= y \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots} a_1^\alpha . a_2^\beta \ldots = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots} a_1^\alpha e^{a_1 x} . a_2^\beta e^{a_2 x} \ldots$$

da

$$a_1^\alpha e^{a_1 x} = x_1^{(\alpha)}, \quad a_2^{(\beta)} e^{a_2 x} = x_2^{(\beta)} \ldots$$

ist, folglich

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots} x_1^{(\alpha)} . x_2^{(\beta)} \qquad 4]$$

Die Zahlen $C_1$, $C_2$ sind daher die Polynomialcoefficienten, erhalten durch die Erhebung eines $n$ gliedrigen Polynoms zur $n$ten Potenz. Das System der Wiederholungs-Exponenten $\alpha$, $\beta$ ... ist somit auf dieselbe Art, wie das der Potenz-Exponenten bei der polynomialen Entwicklung aufzustellen, es ist nämlich das vollständige Wertsystem $\alpha$, $\beta$ ..., welches der Bedingung

$$\alpha + \beta + \ldots = n, \begin{pmatrix} \alpha = 0, & 1 \ldots n \\ \beta = 0, & 1 \ldots n \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

genügt.

In symbolischer Ausdrucksweise kann daher geschrieben werden

$$y^{(n)} = D_x [x_1 + x_2 + \ldots + x_n]^n \qquad 5]$$

Dieses Resultat kann nicht überraschen, da der Vorgang bei der Potenzirung eines Polynoms analog dem des wiederholten Differentiirens eines Productes ist.

Die Ausführung der in 5] angezeigten Operation hat in der Weise zu erfolgen, dass nach geschehener polynomialer Entwicklung in jedem Bestandteil die nicht vertretenen Glieder $x_1$, $x_2$ ... des Polynoms durch ihre 0ten Potenzen und schliesslich alle Potenz-Exponenten durch die gleich hohen Wiederholungs-Exponenten ersetzt werden.

Die Anwendung des Satzes 5] auf $y$ in 1] ergiebt:

$$R_n = -\frac{(\sqrt{2})^n}{n!} D_x{}^n y_0 = -\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\left[{}_r\sum_1^n \cos\frac{\alpha_r x+1}{4}\pi\right]_{x=0}^{n)}$$

Entwickelt, und sodann jede Potenz $\left(\cos\frac{\alpha_r x+1}{4}\pi\right)_0^p$ durch

$$\left\{D_x{}^p\left(\cos\frac{\alpha_r x+1}{4}\pi\right)\right\}_{x=0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha_r\pi}{4}\right)^p$$

ersetzt, ergiebt für $\tau_n$ einen von den vorhergehenden $\tau_{n-1}, \tau_{n-2} \ldots$ unabhängigen Ausdruck. Das positive Zeichen kommt allen Exponenten $p$ von den Formen $4k$ und $4k+3$ und das negative allen $p$ von den Formen $4m+1$ und $4m+2$ zu. Erst nach erfolgter Zeichenbestimmung sind die Potenzen der Einheitswurzeln mit Berücksichtigung von

$$\alpha_r = \alpha^r$$

zusammenzuziehen.

Sämtliche Glieder der so entstandenen Summe haben $\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ und weil sie $n$ Cosinusse von der Form

$$\cos\frac{2p+1}{4}\pi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten, auch $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ als gemeinschaftlichen Factor; folglich ist nach leichter Reducirung:

$$\tau_{n-1} = -\frac{1}{n2^{n-1}}\Sigma \pm \frac{n!}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\ldots}\alpha_1{}^\varkappa\alpha_2{}^\lambda\alpha_3{}^\mu\ldots \qquad 6]$$

$$\varkappa+\lambda+\mu+\ldots = n$$

oder in symbolischer Form

$$\tau_{n-1} = -\frac{1}{n2^{n-1}}\left[{}_r\sum_1^n \pm\alpha_r\right]^{(n)} \qquad 7]$$

mit dem Vorbehalt, dass nach geschehener polynomialer Entwicklung für jede Potenz $\alpha_r{}^\mu$ mit Berücksichtigung der Form von $\mu$ das Vorzeichen auf die bereits festgesetzte Art bestimmt wird.

Diese Formel erfährt eine Vereinfachung durch die Bemerkung, dass

$${}_r\sum_1^n \alpha_r = 0$$

folglich auch

$$-\frac{1}{n2^{n-1}}\left[\sum_1^n \alpha_r\right]^n = 0$$

ist. Letzteres zu 7] addirt, macht die negativen Glieder innerhalb der Klammer verschwinden, während sich die positiven Glieder verdoppeln; daher kann geschrieben werden

$$\tau_{n-1} = -\frac{1}{n2^{n-2}}[\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}+(\alpha_r)]^{(n)} \qquad 8]$$

wo das positive Zeichen symbolisch andeuten soll, dass nur die nach dem hier geltenden Zeichengesetze als positiv auftretenden Glieder beizubehalten sind.

In der Formel 6] das gemeinsame $n!$ vor das Summenzeichen gesetzt wird

$$\tau_{n-1} = -\frac{(n-1)!}{2^{n-2}}\,\Sigma+\frac{\alpha_1{}^{\varkappa}\alpha_2{}^{\lambda}\alpha_3{}^{\mu}}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!} \qquad 9]$$

wenn für $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ ... wieder nur sämtliche Glieder positiv machende und der Bedingung

$$\varkappa+\lambda+\mu+\ldots = n$$

genügende Werte gedacht werden.

Da alle Vereinigungen der Einheitswurzeln mit derselben Exponentenreihe $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ ... dasselbe Vorzeichen und denselben Nenner $\varkappa!\lambda!\mu!$ ... haben, so ist ihre Summe eine mit einem gewissen Coefficienten behaftete symmetrische Function $[\varkappa, \lambda, \mu \ldots]$ der Einheitswurzeln $\alpha_1$, $\alpha_2$ ... $\alpha_n$, nämlich

$$\Sigma\,\frac{\alpha_\varphi{}^{\varkappa}\alpha_\psi{}^{\lambda}\alpha_\chi{}^{\mu}\ldots}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\ldots} = \frac{[\varkappa, \lambda, \mu \ldots]}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\ldots}$$

demgemäss gilt auch:

$$\tau_{n-1} = -\frac{(n-1)!}{2^{n-2}}\,\Sigma+\frac{[\varkappa, \lambda, \mu \ldots]}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\ldots} \qquad 10]$$

wodurch die independente Darstellung der Tangenten- und Secanten-Coefficienten durch symmetrische Functionen der Einheitswurzeln bewirkt wird.

Für $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ ... sind auf alle mögliche Arten solche gleiche oder ungleiche Werte von 0 bis $n$ zu setzen, deren Summe jedesmal $n$ beträgt und die ein positives Vorzeichen bedingen.

**Beispiel.**

$$n = 3, \quad \alpha = \sqrt[3]{+1}$$

$$\varkappa, \quad \lambda, \quad \mu$$

Vorzeichen:

3, 0, 0 +
2, 1, 0 +
1, 1, 1 −

entfällt daher

$$\tau_2 = -\frac{1}{3.2}[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3]^{(3)}$$
$$= -\left[\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \frac{3!}{2!} 3(\alpha + \alpha^2)\right] = +1$$

II.

Das logarithmische Differentiiren führt zu einer schönen Anwendung des fruchtbaren Hoppe'schen Satzes über höhere Differentialquotienten, welcher bekanntlich in folgender Gleichung seinen Ausdruck findet:

$$D_x{}^n F(y) = \frac{U_1}{1!} F'(y) + \frac{U_2}{2!} F''(y) + \ldots + \frac{U_n}{n!} F^{(n)}(y)$$

$$U_m = \binom{m}{0} D_x{}^n y^m - \binom{m}{1} D_x{}^n y^{m-1} + - \ldots$$

In Formel 2] beiderseits die Logarithmen genommen ist:

$$\log y = \Sigma \log \cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi$$

mit Benutzung obigen Satzes wird

$$D_x{}^n \log y = \frac{\binom{n}{1}}{1y} D_x{}^n y = \frac{\binom{n}{2}}{2y^2} D_x{}^n y^2 = \frac{\binom{n}{3}}{3y^3} D_x{}^n y^3 - + \ldots \qquad 11]$$

Für $x = 0$ ist

$$y_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

und alle Nullwerte der höheren Diffentialquotienten, deren Ordnungszeiger kein Vielfaches von $n$ sind, verschwinden, somit ist

$$D_x{}^n \log y\}_0 = \frac{y_0{}^{(n)}}{y_0}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots\right] = \frac{y_0{}^{(n)}}{y_0} = (\sqrt{2})^n y_0{}^{(n)}$$

Ebenso kann die Formel 11] zur Bildung der höhern Differentialquotienten von $\Sigma \log\cos \frac{\alpha_r x + 1}{4} \pi$ verwendet werden;

$$\cos\frac{\alpha_r x+1}{4}\pi = u_r \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_r x+1}{4} = \varphi_r$$

gesetzt, ist zunächst

$$D_x{}^n u_r = \left(\frac{\alpha_r \pi}{4}\right)^n \cos\left(\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \cos\left(\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi$$

Um die $n$ten Differentialquotienten der aufeinanderfolgenden Potenzen von $u_r$ zu erhalten, ist es nur notwendig, dieselben in Vielfache des Argumentes $\varphi_r\pi$ zu verwandeln; es ist bekanntlich:

$$2^m \cos^m\varphi = \binom{m}{0}\cos m\varphi + \binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \binom{m}{2}\cos(m-4)\varphi + \dots$$

daher

$$D_x{}^n u_r{}^n = \frac{1}{2^m}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi\right.$$

$$+ \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\left(\overline{m-2}\,\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi$$

$$\left. + \binom{m}{2}(m-4)^n \cos\left((m-4)\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi + \dots\right]$$

Für $x = 0$ ist

$$\varphi_r = \tfrac{1}{4} \quad \text{und}$$

$$D_x{}^n u_r{}^m\}_0 = \frac{1}{2^m}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\frac{2n+m}{4}\pi\right.$$

$$\left. + \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\frac{2n+m-2}{4}\pi + \dots\right]$$

Hier entfallen sämtliche Einheitswurzeln, der Ausdruck rechter Hand ist daher von $r$ unabhängig; da aber die Formel 11] für eine Summe von $n$ sich eben nur durch diesen Zeiger $r$ sich unterscheidenden Functionen $\log u_r$ zur Anwendung kommen soll, und nur die Nullwerte benötigt werden, so ist, da $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$D_x{}^n \log y\}_0 = D_x{}^n \Sigma \log u\}_0 = n\left[\frac{\binom{n}{1}}{1u_1} D_0{}^n u_r - \frac{\binom{n}{2}}{2u_0{}^2} D_0{}^n u_r{}^2\right.$$

$$\left. + \frac{\binom{n}{3}}{3u_0{}^3} D_0{}^n u_r{}^3 - + \dots\right]$$

oder

$$(\sqrt{2})^n y_0^{(n)} = n\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{n}{1}(\sqrt{2})\frac{C_1}{1} - \binom{n}{2}(\sqrt{2})^2\frac{C_2}{2} + \binom{n}{3}(\sqrt{2})^3\frac{C_3}{3} - + \ldots\right]$$

$$C_m = \frac{1}{2^m}\left[\binom{m}{0} m^n \cos\frac{2n+m}{4}\pi + \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\frac{2n+m-2}{4}\pi + \ldots\right]$$

und

$$\tau_{n-1} = -\frac{2^{n+1}(\sqrt{2})^n}{n\pi^n} y_0^{(n)}$$

oder

$$\tau_{n-1} = -\frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1}(\sqrt{2})\frac{C_1}{1} - \binom{n}{2}(\sqrt{2})^2\frac{C_2}{2} + \ldots\right] \qquad 12]$$

Aehnliche independente Ausdrücke für die Tangenten- und Secanten-Coefficienten können bekanntlich mit Hilfe der höhern Differentialquotienten der Functionen $\frac{1}{1+e^{2x}}$ und $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ aufgestellt werden, in welchen statt der Coefficienten $C_m$ solche von der Form

$$E_m = \binom{m}{0} m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \ldots$$

erscheinen; letztere haben daher eine doppelt so grosse Gliederzahl als erstere. Diese independente Darstellung erscheint in 12] in ihrer allgemeinsten und sehr zusammengezogenen Form. Durch Unterscheidung der Fälle eines geraden $m$ und eines ungeraden $m$ gelingt es die Zahl der Glieder von $C_m$ auf die Hälfte zu reduciren und die Cosinusse auszuwerten. Es ist für geraden $m$:

$$2^{m-1}\cos^m\varphi = \binom{m}{0}\cos m\varphi + \binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}}$$

und für ungerades $m$

$$2^{m-1}\cos^m\varphi = \binom{m}{0}\cos m\varphi + \binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \ldots + \binom{m}{\frac{m-3}{2}}\cos 3\varphi + \binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos\varphi$$

folglich ist

a) bei geradem $m$

$$D_x{}^n u_n{}^n = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi\right.$$

$$+ \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\left(\overline{m-2}\,\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi + \ldots$$

$$\left.\ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1} 2^n \cos\left(2\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi\right]$$

$$x = 0,\ \varphi_r = \tfrac{1}{4}$$

$$D_x{}^n u_r{}^m\}_0 = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\frac{2n+m}{4}\pi\right.$$

$$+ \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\frac{2n+m-2}{4}\pi + \ldots$$

$$\left.\ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}-1} 2^n \cos\frac{2n+2}{4}\pi\right]$$

b) bei ungeradem $m$:

$$D_x{}^n u_r{}^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\left(m\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi\right.$$

$$+ \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\left((m-2)\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi + \ldots$$

$$\left.\ldots + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n \cos\left(3\varphi_r + \frac{n}{2}\right)\pi + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\right)\pi\right]$$

$$x = 0,\ \varphi_r = \tfrac{1}{4}$$

$$D_x{}^n u_r{}^m\}_0 = \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{0} m^n \cos\frac{2n+m}{4}\pi\right.$$

$$+ \binom{m}{1}(m-2)^n \cos\frac{2n+m-2}{4}\pi + \ldots$$

$$\left.\ldots + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n \cos\frac{2n+3}{4}\pi + \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos\frac{2n+1}{4}\pi\right]$$

Bei der Sonderung der Tangenten- von den Secanten-Coefficienten lassen sich die von $m$ unabhängigen Cosinusse der letzten Glieder sofort berechnen; es ist mithin vorteilhafter mit denselben

beginnend die Reihenfolge der Glieder umzukehren, wodurch weitere Unterscheidungen der Zahlformen von $m$ von selbst entfallen.

### A. Die Tangenten-Coefficienten, $n$ gerade.

a) $m$ gerade

$$D_x^n u_r^m\}_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{\frac{m}{2}-2} 4^n - \binom{m}{\frac{m}{2}-4} 8^n + \binom{m}{\frac{m}{2}-6} 12^n - + \ldots\right]$$

b) $m$ ungerade

$$D_x^n u_r^m\}_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n}{2^{m-1}\sqrt{2}} \left[-\binom{m}{\frac{m-1}{2}} 1^n + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n + \binom{m}{\frac{m-5}{2}} 5^n - - + + \ldots\right]$$

$$\tau_{n-1} = -\frac{2^{n+1}(\sqrt{2})^n}{n\pi^n} y_0^{(n)} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1}(\sqrt{2})\frac{\mathfrak{T}_1'}{1.2^0} - \binom{n}{2}(\sqrt{2})^2\frac{\mathfrak{T}_2'}{2.2^1} + \binom{n}{3}(\sqrt{2})^3\frac{\mathfrak{T}_3'}{3.2^2} - + \ldots\right]$$

$$\mathfrak{T}_{2\nu}' = \binom{2\nu}{\nu-2} 4^n - \binom{2\nu}{\nu-4} 8^n + \binom{2\nu}{\nu-6} 12^n - \ldots$$

$$\sqrt{2}.\mathfrak{T}_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n - \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n + + - - \ldots$$

### B. Die Secanten-Coefficienten, $n$ ungerade.

a) $m$ gerade

$$D_x^n u_r^m\}_0 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{2}{\frac{m}{2}-1} 2^n - \binom{m}{\frac{m}{2}-3} 6^n + \binom{m}{\frac{m}{2}-5} 10^n - + \ldots\right]$$

b) $m$ ungerade

$$D_x{}^n u_r{}^m\}_0 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{m-1}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \left[\binom{m}{\frac{m-1}{2}} 1^n + \binom{m}{\frac{m-3}{2}} 3^n - \binom{m}{\frac{m-5}{2}} 5^n - + + \ldots\right]$$

$$\tau_{n-1} = -\frac{2^{n+1}(\sqrt{2})^n}{n\pi^n} y_0{}^{(n)} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1}(\sqrt{2})\frac{\mathfrak{S}_1'}{1.2^0} - \binom{n}{2}(\sqrt{2})^2 \frac{\mathfrak{S}_2'}{2.2'} + - \ldots\right]$$

$$\mathfrak{S}_{2\nu}' = \binom{2\nu}{\nu-1} 2^n - \binom{2\nu}{\nu-3} 6^n + \binom{2\nu}{\nu-5} 10^n - \ldots \qquad 14]$$

$$\sqrt{2}.\mathfrak{S}'_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n + \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n - + + \ldots$$

Diese Formeln sind weiterer Reductionen fähig; die ungeraden Potenzen von $\sqrt{2}$ können entfernt werden. Schliesslich lassen sich die Formeln für Tangenten- und Secanten-Coefficienten in eine einzige zusammenziehen, und zwar wird

$$\varepsilon_{n-1}\tau_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[\binom{n}{1}\frac{\mathfrak{C}_1}{1.2^0} - \binom{n}{2}\frac{\mathfrak{C}_2}{2.2^0} + \binom{n}{3}\frac{\mathfrak{C}_3}{3.2^1} - \binom{n}{4}\frac{\mathfrak{C}_4}{4.2^1} + \binom{n}{5}\frac{\mathfrak{C}_5}{5.2^2} - \binom{n}{6}\frac{\mathfrak{C}_6}{6.2^2} + - \ldots\right] \qquad 15]$$

Für die Tangenten-Coefficienten ist

$$\varepsilon_{n-1} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$n$ gerade und

$$\mathfrak{C}_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu-2} 4^n - \binom{2\nu}{\nu-4} 8^n + \binom{2\nu}{\nu-6} 12^n - + \ldots$$

$$\mathfrak{C}_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n - \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n + + - - \ldots$$

Für die Secanten-Coefficienten ist

$$\varepsilon_{n-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

$n$ ungerade

$$\mathfrak{C}_{2\nu} = \binom{2\nu}{\nu-2} 2^n - \binom{2\nu}{\nu-3} 6^n + \binom{2\nu}{\nu-5} 10^n - + \ldots$$

$$\mathfrak{C}_{2\nu+1} = \binom{2\nu+1}{\nu} 1^n + \binom{2\nu+1}{\nu-1} 3^n - \binom{2\nu+1}{\nu-2} 5^n - + + \ldots$$

XIII.

# Die merkwürdigen Punkte derjenigen Tangentendreiecke einer Curve zweiter Ordnung, welche von zwei festen Tangenten und einer beweglichen gebildet werden.

Von

Dr. **Theodor Meyer**

in Saarbrücken.

---

Der Satz von den Höhenschnittpunkten der Tangentendreiecke einer Parabel legt die Frage nahe, ob derselbe ein besonderer Fall von einem für Curven II. O. allgemeingültigen Satze ist, und er regt weiter zu Untersuchungen über die merkwürdigen Punkte in den Tangentendreiecken an, in deren Bildung irgend eine Gesetzmässigkeit herrscht. Wir wollen im Folgenden diejenigen Tangentendreiecke einer Curve II. O. in Bezug auf ihre merkwürdigen Punkte untersuchen, welche von zwei festen und einer beweglichen Tangente gebildet werden. Diese Aufgabe lässt sich vorteilhaft auf synthetischem Wege durchführen, und es wird sich dabei unter anderm eine Bejahung der aufgeworfenen Frage ergeben.

## I. Der Höhenschnittpunkt.

Von einem Punkte $A$ seien an eine Curve II. O. die Tangenten $t_1$ und $t_2$ gezogen, und eine dritte Tangente $t$ schneide dieselben in den Punkten $S_1$ und $S_2$. Ferner sei $H$ der Schnittpunkt der beiden

durch $S_1$ und $S_2$ gehenden Höhen des Dreiecks $AS_1S_2$ und mit $P_1$ und $P_2$ mögen die beiden unendlich fernen Punkte bezeichnet werden, nach welchen beide Höhen gerichtet sind.

Denkt man sich dann die Tangenten $t_1$ und $t_2$ fest, die dritte Tangente $t$ aber beweglich, dann beschreiben $S_1$ und $S_2$ auf den ersteren Tangenten zwei zu einander projectivische Punktreihen I. O. und folglich ihre Verbindungsgeraden mit den festen unendlichen fernen Punkten $P_1$ und $P_2$ zwei zu einander projectivische Parallel-Strahlenbüschel. Je zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich in dem Höhenschnittpunkt $H$ des veränderlichen Dreiecks $AS_1S_2$; folglich durchläuft dieser eine Hyperbel, wenn $t$ längs der Curve als Tangente gleitet.

Diese Hyperbel geht durch die unendlich fernen Punkte $P_1$ und $P_2$, die Mittelpunkte der beiden Parallel-Strahlenbüschel, und trifft die Geraden $t_1$ und $t_2$ in 4 Punkten desjenigen Kreises, auf welchem die Schnittpunkte von je zwei zu einander normalen Tangenten der Curve liegen. Der Geraden von $P_1$, welche diesen Punkt mit dem Berührungspunkt $T_1$ auf der Tangente $t_1$ verbindet, entspricht in dem andern Büschel die Gerade $\overline{P_2A}$; der Schnittpunkt dieser beiden zu $t_2$ und $t_1$ normalen Geraden ist also auch ein Punkt der Hyperbel. Ebenso erkennt man, dass die durch $A$ gehende Normale zu $t_2$ von derjenigen Normalen zu $t_1$ in einem Punkte der Hyperbel geschnitten wird, welche durch den Berührungspunkt $T_2$ der Tangente $t_2$ geht. Nennt man ferner $B_1$ den Punkt, in welchem $t_1$ von der zu $t_2$ parallelen Tangente geschnitten wird, und $B_2$ den Punkt von $-t_2$, durch welchen die zu $t_1$ parallele Tangente geht, dann entspricht in den beiden Parallel-Strahlenbüscheln der Geraden $\overline{P_1B_1}$ die unendlich ferne Gerade $\overline{P_2P_1}$ und der Geraden $\overline{P_2B_2}$ ebenfalls die unendlich ferne Gerade $\overline{P_1P_2}$. Diese beiden durch $B_1$ und $B_2$ zu den Geraden $t_2$ und $t_1$ gezogenen Normalen sind also die Asymptoten der Hyperbel.

Entsprechen sich in den beiden projectivischen Punktreihen $t_1(S_1)$ und $t_2(S_2)$ die unendlich fernen Punkte, ist also die vorliegende Curve eine Parabel, dann haben die beiden Parallel-Strahlenbüschel $P_1(\overline{P_1S_1})$ und $P_2(\overline{P_2S_2})$ die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein. In diesem Falle also liegen die Höhenschnittpunkte $H$ der Dreiecke $AS_1S_2$ auf einer im Endlichen gelegenen und der unendlich fernen Geraden. Weil erstere Gerade auch die Punkte enthält, in welchen $t_1$ und $t_2$ von den zu ihnen normalen Parabeltangenten geschnitten werden, so ist sie identisch mit der Directrix, und wir kommen stets auf diese Gerade, von welchem

Punkte auch die Tangenten $t_1$ und $t_2$ an die Parabel gehen mögen. Schliesslich sei noch bemerkt, dass sich für jede Curve II. O. der Ort der Höhenschnittpunkte auf den Punkt $A$ reducirt, falls $t_1$ und $t_2$ einen Winkel von $90^0$ einschliessen.

Wir können nun als Zusammenfassung der vorhergehenden Ausführungen folgenden Satz aufstellen:

„Die Höhenschnittpunkte der Tangentendreiecke, welche von „zwei festen und einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. ge-„bildet werden, liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten normal „zu den festen Tangenten stehen. — Diese Hyperbel zerfällt in die „Directrix und die unendlich ferne Gerade, falls die Curve II. O. „eine Parabel ist. Sie reducirt sich auf einen Punkt, wenn die „festen Tangenten einen rechten Winkel bilden.“

Gewöhnlich wird als Ort der Höhenschnittpunkte der Tangentendreiecke einer Parabel nur die Directrix erwähnt; aus der Ableitung des vorhergehenden Satzes, sowie auch aus der geometrischen Anschauung geht jedoch hervor, dass auch die unendlich ferne Gerade zu diesem Orte gezählt werden muss. Weil nämlich der unendlich fernen Geraden keine bestimmte Richtung zukommt, so kann sie bei unendlich ferner Lage von $S_1$ und $S_2$ sowol als Höhe zu der Tangente $t_1$ als auch als Höhe zu $t_2$ angesehen werden, jeder ihrer Punkte also als Höhenschnittpunkt des von $t_1$, $t_2$ und der unendlich fernen Geraden gebildeten Tangentendreiecks aufgefasst werden.

## II. Der Mittelpunkt des Umkreises.

In dem Dreieck $AS_1S_2$ sei $M_1$ der Mittelpunkt der Seite $AS_1$ und $M_2$ der Mittelpunkt der Seite $AS_2$. Dann entspricht auf $t_1$ jedem Punkt $S_1$ ein Punkt $M_1$ und ebenso auf $t_2$ jedem Punkte $S_2$ ein Punkt $M_2$, und es lässt sich leicht einsehen, dass diese Beziehung eine projectivische ist. Denkt man sich nämlich die Punktreihe $t_1(M_1)$ um $A$ in die Lage irgend einer andern Geraden $t_1'$ gedreht, dann sind die Verbindungsgeraden der Punkte $M_1$ auf $t_1'$ mit ihren entsprechenden Punkten $S_1$ auf $t_1$ alle zu einander parallel; folglich ist $t_1'(M_1)$ perspectivisch zu $t_1(S_1)$ und daher auch $t_1(M_1)$ projectivisch zu $t_1(S_1)$ [1]. Ebenso überzeugt man sich, dass die beiden Punktreihen $t_2(M_2)$ und $t_2(S_2)$ zu einander in projectivischer Beziehung

1) In ganz ähnlicher Weise kann man zeigen, dass auch die Punkte, welche die Strecken $AS_1$ in einem constanten Verhältnis teilen, eine zu $t_1(S_1)$ projectivische Punktreihe bilden.

stehen, Da nun aber die Punktreihen $t_1(S_1)$ und $t_2(S_2)$ selbst zu einander projectivisch sind, so gilt dies auch von den Punktreihen $t_1(M_1)$ und $t_2(M_2)$ und daher weiter von den beiden Parallel-Strahlenbüscheln, welche $t_1(M_1)$ und $t_2(M_2)$ aus den unendlich fernen und in normaler Richtuug zu $t_1$ und $t_2$ gelegenen Punkten $Q_1$ und $Q_2$ projiciren. Der Schnittpunkt $M$ je zweier entsprechenden Strahlen dieser Büschel ist der Mittelpunkt des einem Dreieck $AS_1S_2$ umgeschriebenen Kreises, und wir erkennen jetzt, dass sich $M$ auf einer Hyperbel bewegt, wenn $t$ den der Curve zugehörigen Strahlenbüschel II. O. durchläuft. Für den Fall der Parabel haben die beiden Parallel-Strahlenbüschel wieder die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, folglich erhält man als Ort für $M$ die unendlich ferne und eine im Endlichen gelegene Gerade. Wir können also bis jetzt folgendes Ergebniss aussprechen:

„Die Mittelpunkte der Umkreise aller Dreiecke, welche von „zwei festen und einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. ge-„bildet werden, liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten normal „zu den festen Tangenten sind. — Diese Hyperbel zerfällt in die „unendlich ferne und eine im Endlichen gelegene Gerade, wenn die „Curve eine Parabel ist“.

In letzterm Falle haben alle durch die Ecken der Tangentendreiecke $AS_1S_2$ gelegten Kreise ausser $A$ noch einen zweiten Punkt gemeinsam. Nennen wir denselben $F$, dann ist

$$\text{Wkl. } S_1FS_2 = 2\text{R} - \text{Wkl.}(t_1t_2)$$

als constant, folglich ist $F$ der Brennpunkt der Parabel. Damit sind wir zu einem bekannten Parabelsatz gekommen, aus welchem umgekehrt der zweite Teil des vorhergehenden Satzes folgt.

Zu jedem Punkte $A$ gehört bei gegebener Parabel eine bestimmte Gerade $m$, auf welcher die Mittelpunkte $M$ der den Dreiecken $AS_1S_2$ umgeschriebenen Kreise liegen. Am einfachsten construirt man dieselbe, indem man $A$ mit dem Brennpunkte $F$ verbindet und dann die die Strecke $AF$ halbirende Normale zieht. Sind die Berührungspunkte $T_1$ und $T_2$ der beiden Tangenten $t_1$ und $t_2$ bekannt, dann kann man auch $m$ in folgender Weise bestimmen. Man zieht durch $A$ die Normale zu $t_1$ und bringt sie zum Durchschnitt mit derjenigen Normalen von $t_2$, welche die Strecke $AF_2$ halbirt; ebenso errichtet man in $A$ zu $t_2$ die Normale und durchschneidet sie mit der die Strecke $AT_1$ halbirenden Normalen. Die Verbindungsgerade dieser beiden Schnittpunkte ist alsdann die Gerade $m$. Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich leicht, wenn man die veränderliche Tangente $t$ mit $t_1$ und $t_2$ zu-

sammenfallen lässt. Mit derselben haben wir übrigens zugleich eine einfache Lösung der Aufgabe: „Den Brennpunkt einer Parabel zu „bestimmen, wenn 2 Tangenten und ihre Berührungspunkte gegeben „sind".

Liegt $A$ auf der Hauptachse der Parabel symmetrisch zu dem Brennpunkt bezüglich der Directrix, dann fällt $m$ mit dieser Geraden zusammen, und die Tangenten $t_1$ und $t_2$ bilden einen Winkel von $60^0$ mit einander.

Im Anschluss hieran wollen wir untersuchen, ob bei einer allgemeinen Curve II. O. die beiden Hyperbeln $h$ und $m$ sich vereinigen können, auf denen die Höhenschnitte und die Mittelpunkte der Umkreise von den Dreiecken $AS_1S_2$ liegen. Zu diesem Zwecke beachten wir zunächst, dass die unendlich fernen und in normaler Richtung zu $t_1$ und $t_2$ gelegenen Curvenpunkte $Q_1$ und $Q_2$ von der Hyperbel stets mit den unendlich fernen Punkten $P_2$ und $P_1$ der Hyperbel $h$ zusammenfallen.

Die Asymptoten der letztern Curve gehen durch $B_1$ und $B_2$, die beiden gegenüberliegenden Eckpunkte des von $t_1$ und $t_2$ und ihren parallelen Tangenten gebildeten Parallelogramms; die Asymptoten der Hyperbel $m$ hingegen halbiren die Strecken $AB_2$ und $AB_1$. Eine Vereinigung der beiden Asymptotenpaare kann also nur eintreten, wenn

$$\text{Wkl. } (t_1 t_2) = 60^0$$

und zugleich

$$AB_1 = AB_2$$

ist, also $A$ auf einer Achse der gegebenen Curve liegt. In diesem Falle gibt es aber unter den Dreiecken $AS_1S_2$ zwei gleichseitige, und folglich haben die beiden Hyperbeln ausser den Asymptoten auch noch zwei im Endlichen gelegene Punkte gemein, das heisst, sie fallen ganz zusammen. Wir können also sagen:

„Schneiden sich zwei einen Winkel von $60^0$ einschliessenden „Tangenten einer Curve II. O. auf einer Achse derselben, dann liegen „die Höhenschnittpunkte und die Mittelpunkte der Umkreise der von „diesen Tangenten mit den übrigen gebildeten Dreiecke auf ein „und derselben Hyperbel".

In den beiden Hyperbeln $h$ und $m$, welche durch irgend zwei in einem Punkte $A$ sich schneidende Tangenten $t_1$ und $t_2$ eine Curve II. O. bestimmt sind, können wir je zwei Punkte $H$ und $M$ einander zuordnen, welche merkwürdige Punkte desselben Dreiecks $AS_1S_2$ sind. Es lässt sich dann zeigen, dass die Punktreihen II. O. $h(H)$ und $m(M)$ zu einander in projectivischer Beziehung stehen. Da

nämlich die Punktreihe $t_1(S_1)$ perspectivisch zu dem Parallel-Strahlenbüschel $P_1(\overline{P_1 S_1})$ ist und dieser perspectivische Lage mit der Punktreihe II. O. $h(H)$ hat, so ist auch $t_1(S_1)$ projectivisch zu $h(H)$. In ähnlicher Weise überzeugt man sich, dass auch $t_1(S_1)$ und $m(M)$ projectivisch sind. Aus beiden Beziehungen folgt aber, dass $h(H)$ zu $m(M)$ projectivisch ist, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wenn nun Winkel $(t_1 t_2)$ [1]) mehr oder weniger als $60^0$ oder $120^0$ beträgt, dann gibt es kein Dreieck $A S_1 S_2$, dessen Höhenschnittpunkt zugleich Mittelpunkt des Umkreises ist. Die beiden projectivischen Hyperbeln haben also im allgemeinen keine Punkte entsprechend gemein, folglich [2]) bilden die Geraden $\overline{HM}$, welche die Euler'schen Geraden des Dreiecks $A S_1 S_2$ sind, einen Strahlenbüschel IV. O. In der unendlich fernen Geraden liegen zwei dieser Strahlen, da den unendlich fernen Punkten der einen Hyperbel dieselben unendlich fernen Punkte der andern aber in umgekehrter Reihenfolge entsprechen. Ist aber

$$\text{Wkl. } (t_1 t_2)\ ^2) = 60^0 \quad \text{oder} \quad = 120^0$$

dann gibt es unter der Schaar von Tangentendreiecken zwei gleichseitige, und mithin haben alsdann $h$ und $m$ 2 im Endlichen gelegene Punkte $K$ und $L$ entsprechend gemein. Ausser den beiden Strahlenbüscheln I. O. mit den Mittelpunkten $K$ und $L$ erhält man also noch einen Strahlenbüschel II. O. Da aber die unendlich ferne Gerade 2 Strahlen des Büschels enthält, so gehen durch einen Punkt, in welchem sie von einem andern Strahle geschnitten wird, drei und folglich unendlich viele Strahlen des Büschels. Schneidet ein Strahl $\overline{HM}$ die beiden Curven zum zweiten Male in den Punkten $H'$ und $M'$, so sind auch diese Punkte einander entsprechend, und somit sehen wir, dass der Strahlenbüschel II. O. in einen Parallel-Strahlenbüschel zerfällt, in welchem jeder Strahl doppelt gezählt werden kann.

Um die Richtung der Strahlen zu bestimmen, betrachten wir dasjenige Dreieck $A S_1 S_2$, welches bei $S_1$ einen rechten Winkel hat. In diesem ist die Gerade, welche $S_1$ mit der Mitte der Hypotenuse $AS_2$ verbindet, die Euler'sche Gerade und sie steht senkrecht zu der Halbirungslinie des $60^0$ betragenden Winkels $(t_1 t_2)$.

Folglich stehen alle Euler'schen Geraden der Dreiecke $A S_1 S_2$ senkrecht zu dieser Halbirungslinie, und wir haben beiläufig folgende Dreieckssätze:

---

1) Unter Wkl. $(t_1 t_2)$ wollen wir denjenigen Winkel der beiden Tangenten verstehen, innerhalb dessen Schenkel die Curve liegt.

2) Reye, Geom. d. Lage. II Aufl. S. 116.

„Die Euler'sche Gerade jedes Dreiecks, welches einen Winkel „von $60^0$ enthält, ist normal zu der Halbirungslinie dieses Winkels."

„Die Euler'sche Gerade jedes Dreiecks, welches einen Winkel „von $120^0$ enthält, ist parallel zu der Halbirungslinie dieses Win-„kels."

Liegen, um diesen Fall noch zu erwähnen, die beiden Hyperbeln $h$ und $m$ auf einander, dann stehen $h(H)$ und $m(M)$ zu einander in involutorischer Beziehung, und die Doppelpunkte dieser Punktreihe sind zugleich die Scheitelpunkte der Hyperbeln.

Bei der Parabel sind die beiden projectivischen Punktreihen II. O. durch zwei projectivische ähnliche Punktreihen I. O, $h$ und $m$, zu ersetzen, von welchen erstere stets auf der Directrix liegt. Daher gilt der Satz:

„Die Euler'schen Geraden aller Tangentendreiecke einer Pa-„rabel, welche von zwei festen und einer beweglichen dritten Tan-„gente gebildet werden, umhüllen im allgemeinen eine zweite Pa-„rabel, welche auch die Directrix der erstern zur Tangente hat."

Man erhält einen Strahlenbüschel, wenn $A$ auf der Hauptachse der Parabel liegt, und einen Parallelstrahlenbüschel, wenn $A$ ausserhalb der Hauptachse liegt und zugleich

$$\text{Wkl}\cdot (t_1 t_2) = 60^0 \quad \text{oder} \quad = 120^0$$

ist. Liegt $A$ auf der Hauptachse, und ist zugleich

$$\text{Wkl.}\ (t_1 t_2) = 60^0$$

dann liegen die beiden projectivischen Punktreihen auf der Directrix.

## III. Der Schwerpunkt.

In dem Dreieck $AS_1S_2$ werde der Schnittpunkt der Mittellinien $\overline{S_1M_2}$ und $\overline{S_2M_1}$ mit $S$ bezeichnet. Schneidet dann die durch $S$ gehende Parallele zu $t_1$ die Gerade $t_2$ in $V_2$ und die durch $S$ gehende Parallele zu $t_2$ die Gerade $t_1$ in $V_1$, dann ist

$$AV_1 = \tfrac{1}{3}AS_1 \quad \text{und} \quad AV_2 = \tfrac{1}{3}AS_2$$

Diese Punkte $V_1$ und $V_2$ teilen also die veränderlichen Seiten $AS_1$

und $AS_2$ in einem constanten Verhältniss, folglich [1]) ist $t_1(V_1)$ projectivisch zu $t_1(S_1)$ und $t_2(V_2)$ projectivisch zu $t_2(S_2)$. Weil aber $t_1(S_1)$ projectivisch zu $t_2(S_2)$ ist, so gilt dies auch von den Punktreihen $t_1(V_1)$ und $t_2(V_2)$ und folglich auch von den beiden Parallel-Strahlenbüscheln, welche $t_1(V_1)$ und $t_2(V_2)$ aus den unendlich fernen Punkten $R_2$ und $R_1$ der Geraden $t_2$ und $t_1$ projiciren. Da nun der Schwerpunkt $S$ des Dreiecks $AS_1S_2$ als Schnittpunkt von zwei entsprechenden Strahlen dieser beiden Büschel erscheint, so erkennt man, dass er sich auf einer Hyperbel bewegt, wenn $t$ den zur Curve gehörigen Strahlenbüschel II. O. beschreibt. Diese Hyperbel geht durch die unendlich fernen Punkte $R_1$ und $R_2$ der Geraden $t_1$ und $t_2$, und ihre Asymptoten teilen die Strecken $AB_1$ [2]) und $AB_2$ in dem Verhältniss 1 : 2. Für die Parabel erhalten wir als Ort der Schwerpunkte der Dreiecke $AS_1S_2$ wieder eine eigentliche und die unendlich ferne Gerade.

Wir können also folgenden Satz aufstellen:

„Die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche von zwei festen und „einer beweglichen Tangente einer Curve II. O. gebildet werden, „liegen auf einer Hyperbel, deren Asymptoten parallel zu den festen „Tangenten sind. — Die Hyperbel zerfällt in eine eigentliche und „die unendlich ferne Gerade, wenn die Curve eine Parabel ist.“

Lässt man $t$ mit den festen Tangenten $t_1$ und $t_2$ zusammenfallen, dann erkennt man, dass auch diejenigen Punkte dieser Geraden zu dem Orte gehören, welche die Strecken $AT_1$ [3]) und $AT_2$ in dem Verhältniss 1 : 2 teilen. Die Gerade, welche bei gegebener Parabel diese beiden Punkte mit einander verbindet, enthält die Schwerpunkte aller eigentlichen Tangentendreiecke $AS_1S_2$

---

1) Vgl. die Fussbemerkung auf Seite 309.

2) Vgl. S. 308.

3) Vgl. S. 308.

# XIV.

# Miscellen.

---

## 1.

### Construction des Schnittes einer Geraden mit einer Hyperbel.

Die Constructionen, weche den Zweck verfolgen, die Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem durch gewisse Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitt zu finden ohne den letzteren zu zeichnen, sind zahlreich und sehr mannigfaltig je nach den gegebenen Bestimmungsstücken, und die dabei zur Anwendung gelangenden Gesichtspunkte selbst dementsprechend sehr verschiedener Art. Besonders einfache Lösungen dieser Aufgabe ergeben sich für die Ellipse, wenn von derselben ein Paar conjugirter Durchmesser oder die Axen gegeben sind, indem dann die Ellipse durch einen ihr affin verwandten Kreis ersetzt werden kann. Die Anwendung des Kreises als verwandte Figur des Kegelschnittes kann auch bei der Hyperbel Platz greifen, wenn man dieselbe collinear auf ihn bezieht. Wollte man auch hier statt der Verwandtschaft der Collineation die speciellere der Affinität gebrauchen, so wird der Hyperbel wieder eine solche Curve entsprechen und die Aufgabe nicht vereinfacht erscheinen, wenn man nicht ein einfaches Mittel hat für diesen Fall jetzt, die Schnittpunkte der Geraden die der gegebenen affin entspricht, mit der affinen Hyperbel ohne diese zeichnen zu müssen, anzugeben.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie man mit Benutzung einer der gegebenen affin verwandten die Schnittpunkte einer durch ihre Asymptoten und die Hauptaxe gegebenen Hyperbel und einer Geraden finden kann.

Im 1. Bde. 2. Rh. dieses Journals wurde die Erzeugungsweise der Hyperbel und Ellipse als: „Ort der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten an einen Scheitelkreis [1]) und alle, die Asymptoten berührenden Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf der Hauptaxe haben, über welcher der Scheitelkreis beschrieben wurde", ausführlich erörtert.

Hieraus ergibt sich aber, dass man die Schnittpunkte einer den Scheitelkreis über der reellen Axe einer Hyperbel berührenden Geraden mit dieser sehr einfach finden kann.

Ist, siehe die Figur, $g$ eine den Scheitelkreis $A^2$ berührende Gerade, von welcher die Schnittpunkte mit der Hyperbel, deren Asymptoten $a_1$ und $a_2$ sind, construirt werden sollen, so hat man eben nur jene Kreise zu suchen, welche die Gerade $g$ und die Asymptoten $a_1$ und $a_2$ berühren und ihre Mittelpunkte auf der Axe $a$ haben, um in den Berührungspunkten mit $g$ die fraglichen Schnittpunkte zu erhalten. Diese Berührungspunkte lassen sich aber etwa in folgender Art finden. Zunächst findet man die Mittelpunkte $O_1$ und $O_2$ der oben genannten berührenden Kreise entweder

1) indem man die Winkelhalbirenden $1O_1$ und $1O_2$ der Geraden $g$ und der Asymptote $a_1$ construirt (oder $2O_1$ und $2O_2$ von $g$ und $a_2$) oder:
2) als Endpunkte des auf der Axe $a$ gelegenen Durchmessers desjenigen Kreises, der seinen Mittelpunkt auf $a$ hat, und welcher durch die Schnittpunkte 1 und 2 von $g$ mit den Asymptoten $a_1$ und $a_2$ geht, wie leicht sofort einzusehen ist, da ja die früher erwähnten Winkelhalbirenden senkrecht zu einander stehen. Dass man nur 12 in $m$ zu halbiren und $mm_2$ senkrecht zu $g$ zu errichten hat, um den Mittelpunkt dieses Kreises zu erhalten, ist selbstverständlich.

Aus den Punkten $O_1$ und $O_2$ sind dann die Senkrechten zu $g$ zu legen, um in ihren Fusspunkten I und II die gesuchten Durchschnittspunkte von $g$ mit der Hyperbel zu erhalten.

Auf diesen Fall lässt sich nun der allgemeinere, wo die gegebene Gerade den Scheitelkreis nicht berührt, zurückführen.

Wäre z. B., siehe die Figur, die Gerade $\gamma$, und die Hyperbel durch ihre Asymptoten $\alpha_1$ und $\alpha_2$, und den über der Hauptaxe beschriebenen Scheitelkreis $A^2$ gegeben, und sind ihre gemeinsamen

1) Kreis, der eine der Kegelschnittsaxen zum Durchmesser hat.

Durchschnittspunkte anzugeben, so legt man aus dem Schnittpunkte $g$ von $\gamma$ und der Axe $a$ eine Tangente $g$ an den Scheitelkreis $A^2$ und betrachtet diese als affin [1]) verwandte zur gegebenen $\gamma$. Die Gerade $\gamma$ schneidet z. B. die Asymptote $\alpha_2$ in (2), und der affin entsprechende Punkt 2 auf $g$ wird auch ein Punkt der einen Asymptote $a_2$ jener Hyperbel sein, durch welche die gegebene zu ersetzen ist.

Die gegebene Hyperbel ist nun durch eine andere ihr affin mit demselben Scheitelkreis und den Asymptoten $a_1$ und $a_2$, die sich nach dem Bemerkten sehr einfach ergeben, ersetzt, und die gegebene Gerade durch eine den Scheitelkreis der letztern berührende Gerade, der allgemeine Fall also auf diesen früher besprochenen speciellen zurückgeführt. Nach dem bereits Auseinandergesetzten wird man nun die Punkte I und II auf $g$ construiren und dann mit Hilfe der Senkrechten in diesen Punkten zur Axe $a$ die Punkte (I) und (II) auf $\gamma$ erhalten, wodurch die allgemeine Aufgabe gelöst erscheint.

Ist die gegebene Gerade parallel der Nebenaxe, so wird die Methode nicht anwendbar sein, aber hiefür sich noch einfachere Constructionen auf Grund der früher angeführten Erzeugungsweise ergeben, die an oben citirter Stelle angegeben erscheinen.

Auch für die Ellipse, wenn diese durch die Hauptaxen gegeben ist, lässt sich das Princip anwenden, indem hier an die Stelle der Asymptoten gewisse leicht aufzufindende Gerade treten; allein angesichts der für diesen Fall existirenden äusserst einfachen Constructionen sind die aus diesem Gesichtspunkte folgenden ohne Bedeutung.

F. Ruth.

---

2.

## Zur Construction der Kegelschnittslinien.

Unter diesem Titel hat Herr K Schober (Triest) im 1. Hefte, (2. R. VII. T.) die von mir in dieser Zeitschrift (2. R. III. T. S. 108 —110 und S. 223) veröffentlichten und mittelst analytischer Geometrie bewiesenen Constructionen „durch Specialisirung des Pascal'schen Satzes" angeblich „naturgemässer" abgeleitet — wie er es schon in zwei andern Aufsätzen (Ztschrft. f. d. Realschulwesen 12. J. 1887 und Programm d. k. k. Ob. Realschule in Sechshaus bei Wien, 1887)

---

1) Orthogonale Affinität; der Scheitelkreis bleibt derselbe für jede dieser Art affin verwandte Hyperbel.

getan hat — obgleich er selbst in einem seiner Aufsätze sagt, die analytische Geometrie eigne sich am besten dazu, die Richtigkeit einer gefundenen Construction zu beweisen. Welches Beweisverfahren besser ist, das ist wol meist — Geschmackssache.

Ich zog das analytische vor, trotzdem ich jene Constructionen durch synthetische Untersuchungen gefunden hatte, weil ich glaubte, es sei weiteren Kreisen zugänglich. Das ist übrigens Nebensache; ich bringe nur deshalb den Gegenstand zur Sprache, weil ich von einer Vereinfachung der in Rede stehenden Constructionen Mitteilung machen möchte.

Das früher entwickelte Verfahren wird besonders bei der Ellipse nicht gern angewendet werden, weil man über die Fläche des umschriebenen Parallelogramms $EFGH$ hinausgehen muss; bei nachstehender Construction entfällt nicht nur dieser Uebelstand, sondern man erspart sich auch noch eine Linie.

Sind $AB$ und $CD$ conjugirte Durchmesser einer Ellipse, so schneidet die zu $CD$ parallele Gerade $S$ die $AC$ und $AB$ in Punkten $M$ und $Q$, welche aus $B$ und $D$ durch Strahlen $BM$ und $DQ$ projicirt werden, die sich in einem Ellipsenpunkte $P$ treffen, dessen Tangente durch den Schnittpunkt $L$ jener Parallelen $S$ mit der Tangente $CF$ in $C$ geht. Bei der Hyperbel ändert sich die Construction nur dahin, dass $QP$ als Parallele zu $BC$ (oder Parallele zur Asymptote $FH$) zu zeichnen ist, und $L$ auf der zu $AC$ parallelen Asymptote $EG$ liegt.

Ist $CD$ eine conjugirte Sehne, dann ist das Constructionsverfahren für alle drei Kegelschnitte gleich und lautet so, wie es oben für die Ellipse angegeben wurde.

Bei Hyperbel-Constructionen ist oft das Bedürfniss vorhanden, die Tangente unabhängig vom Berührungspunkte zu construiren; wir geben deshalb in Folgendem noch ein Verfahren an, welches diese Bedingung erfüllt und andern gegenüber den Vorteil hat, ein kleines Constructionsfeld zu benötigen.

Es seien wieder $AB$ und $CD$ conjugirte Durchmesser einer Hyperbel, ferner sei $EFGH$ das Parallelogramm mit den Mittellinien $AB$ und $CD$; $FH$ und $EG$ sind dann die Asymptoten.

Projicirt man einerseits die Punkte $M$ der Geraden $AC$ aus $G$ auf $EF$ nach $R$, andererseits durch Parallele $S$ zu $CD$ auf $EG$ nach $L$, so ist $LR$ eine Hyperbeltangente und ihr Berührungspunkt der Schnitt mit $BM$ oder $QP \parallel FH$.

Die Beweise für alle erwähnten Constructionen können auf mehrere Arten so leicht erbracht werden, dass es überflüssig erscheint, dieselben hier anzuführen.

Pola, im December 1888.

Fr. Schiffner.

---

### 3.

### Ergänzung des „Beitrags zur Inhaltsrechnung der Körper" Bd. XXVI. S. 204 des Archivs.

Die Ergänzung betrifft die geometrische Bestimmung des Inhalts eines Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ durch

$$f(x) = d.x^3$$

gegeben ist.

Da die Gestalt des Schnittes von keinem Einfluss ist, so soll folgende specielle Anordnung getroffen werden.

In der Figur stehen die Linien $OX$, $OY$ und $OZ$ senkrecht zu einander.

Die Coordinaten des Punktes $C$ seien $x$, $y$ und $z$ und dabei:

$$y = \frac{x^2}{p}$$

$$z = d.px$$

die Curve $OMB$ ist also eine Parabel in der $xy$ Ebene.

Das Rechteck $ABCD$ hat zum Inhalt

$$yz = d.x^3$$

Der Inhalt der Pyramide $ABCDO$ ist also: $\frac{1}{3}d.x^4$.

Das Parabelsegment $OMB$ hat zum Inhalt:

$$\tfrac{2}{3}xy - \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{6}xy = \tfrac{1}{6}\frac{x^3}{p}$$

Der Inhalt des prismatischen Körpers von der Höhe $z$ mit der Grundfläche $OMB$ ist daher:

$$\tfrac{1}{6}\frac{x^3}{p}.z = \tfrac{1}{6}d.x^4$$

Subtrahirt man die Hälfte dieses Körpers von der Pyramide $ABCDO$, so ergiebt sich als Inhalt des Körpers $OMBADCLO$

$$v = \tfrac{1}{4} d \, . \, x^5$$

Die Durchschnittsfläche dieses Körpers in der Höhe $x$ ist $ABCL$, also:

$$f(x) = d \, . \, x^3$$

Die Zusammenstellung auf Seite 206 Band 26 wird nun:

| | Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ | Volumen des Körperstücks von der Höhe $x$ |
|---|---|---|
| 1) | $a$ | $ax$ |
| 2) | $bx$ | $\frac{1}{2}bx^2$ |
| 3) | $cx^2$ | $\frac{1}{3}cx^3$ |
| 4) | $dx^3$ | $\frac{1}{4}dx^4$ |

und

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad v = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}$$

$$= \frac{x}{6}\left(f(x) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right)$$

Kiel, den 27. Mai 1889.

Ligowski.

---

4.

**Ueber harmonische Reihen ungerader Ordnung.**

In der Reihe für $\log \Gamma(1+\mu)$ treten bekanntlich als Coefficienten die harmonischen Reihen $S_n$ auf, von welchen nur diejenigen gerader Ordnung summirbar sind. Im Folgenden sollen nun für die Reihen $S_n$ mit ungeradem Stellenzeiger — Recursionsformeln aufgestellt werden; sie enthalten zwar auch unendliche Reihen, die aber bedeutend rascher als die ursprünglichen Reihen $S_n$ convergiren. Diese Transformation wird mit Hilfe der Function $\log \sin \frac{\varphi}{2}$, welche sich auf zweierlei Art in convergente Reihen verwandeln lässt, bewirkt. Es ist gleichzeitig

$$-\log \sin \frac{\varphi}{2} = \log^2 + \frac{\cos \varphi}{1} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \ldots, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi$$

und

$$-\log\sin\frac{\varphi}{2} = -\log\varphi + \log 2 + S_2\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \tfrac{1}{2}S_4\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \ldots$$

$$-2\pi < \varphi < +2\pi$$

daher auch

$$\frac{\cos\varphi}{1} + \frac{\cos\varphi}{2} + \ldots = -\log\varphi + S_2\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 + \tfrac{1}{2}S_4\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \ldots$$

$$0 \leqq \varphi \leqq \pi \qquad 1]$$

Durch wiederholte Integrationen dieser Gleichung entstehen links Ausdrücke, welche für die Werte

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = \pi$$

entweder in die Potenzreihen $S_{2\nu+1}$ oder

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2\nu}} = U_{2\nu}$$

übergehen, jenachdem die Anzahl der Integrationen eine gerade oder ungerade ist.

Die erste Integration zwischen 0 und $\varphi$ giebt:

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n\varphi}{n^2} = \varphi(1-\log\varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2}\cdot\frac{\varphi^3}{3} + \frac{S_4}{2(2\pi)^4}\cdot\frac{\varphi^5}{5} + \ldots$$

$$0 \leqq \varphi < \pi$$

Da rechter Hand $\log\varphi$ vorkommt, sind nur positive Werte von $\varphi$ zulässig; für $\varphi = \pi$ entsteht ein Widerspruch, endlich convergirt das Integral des Restgliedes von 1] gegen die Null; als Convergenzbereich können daher die Werte von incl 0 bis exclusive $\pi$ angenommen werden.

Aus den weiteren Integrationen zwischen 0 und $\varphi$ gehen mit Beachtung von $\{\varphi^m\log\varphi\}_{\varphi=0} = 0$ folgende Gleichungen hervor:

$$-\Sigma\frac{\cos n\varphi}{n^3} + S_3 = \frac{\varphi^2}{2!}(1+\tfrac{1}{2}-\log\varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2}\frac{\varphi^4}{3.4} + \frac{S_4}{2(2\pi)^4}\frac{\varphi^6}{5.6} + \ldots \qquad 1']$$

$$-\Sigma\frac{\sin n\varphi}{n^4} + S_3\varphi = \frac{\varphi^3}{3!}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\log\varphi) + \frac{S_2}{1(2\pi)^2}\frac{\varphi^5}{3.4.5}$$

$$+ \frac{S_4}{2(2\pi)^4}\frac{\varphi^7}{5.6.7} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$0 \leqq \varphi < \pi$$

Das Bildungsgesetz dieser Formeln ist ein leicht erkennbares; nach $r-1$ Integrationen zwischen 0 und $\varphi$ ist offenbar, wenn a) $r$ ungerade:

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}} \Sigma \frac{\cos n\varphi}{n^r} + S_3 \frac{\varphi^{r-3}}{(r-3)!} - S_5 \frac{\varphi^{r-5}}{(r-5)!} + - \dots$$
$$+(-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{S_{r-2}\varphi^2}{2!} + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r = \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}-\log\varphi\right)$$
$$+ \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{2!\ \varphi^{r+1}}{(r+1)!} + \tfrac{1}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{4!\ \varphi^{r+3}}{(r+3)!} + \dots \qquad 2]$$

b) $r$ gerade:

$$(-1)^{\frac{r+2}{2}} \Sigma \frac{\sin n\varphi}{n^r} + S_r \frac{\varphi^{r-3}}{(r-3)!} - S_5 \frac{\varphi^{r-5}}{(r-5)!} + - \dots$$
$$+(-1)^{\frac{r}{2}} S_{r-1} = \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}-\log\varphi\right)$$
$$+ \frac{S_2}{1(2\pi)^2} \frac{2!\ \varphi^{r+1}}{(r+1)!} + \tfrac{1}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{4!\ \varphi^{r+3}}{(r+3)!} + \dots \qquad 3]$$

Die Substitution $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergiebt, da

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}} \Sigma \frac{\cos n\varphi}{n^r} + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r = (-1)^{\frac{r+1}{2}} \frac{2^{2r-1}+2^{r-1}-1}{2^{2r-1}} S_r$$

($r$ ungerade)

und

$$\Sigma \frac{\sin n\varphi}{n^r} = (-1)^{\frac{r+2}{2}} \left(\frac{1}{1^r} - \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} - + \dots\right) = (-1)^{\frac{r+2}{2}} U_r$$

($r$ gerade)

ist, folgende Beziehungen zwischen den harmonischen Reihen $S_{2\nu+1}$ und den Reihen $U_{2\nu}$ einerseits und den bekannten Summen $S_{2\nu}$ andererseits:

$$\frac{S_3}{(r-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3}-\frac{S_5}{(r-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5}+-\dots$$

$$+(-1)^{\frac{r-1}{2}}\frac{S_{r-2}}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+(-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{2^{2r-1}+2^{r-1}-1}{2^{2r-1}}S_r=$$

$$\frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}\left[1+\tfrac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}-\log\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1}\frac{S_2}{\binom{r+1}{1}4^2}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\frac{S_4}{\binom{r+3}{4}4^4}+\dots\right] \qquad 4]$$

($r$ ungerade)

$$(-1)^{\frac{r+2}{2}}U_r+\frac{S_3}{(r-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3}-\frac{S_0}{(r-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5}+-\dots$$

$$+(-1)^{\frac{r}{2}}S_{r-1}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}\left[1+\tfrac{1}{2}+\dots+\frac{1}{r-1}-\log\frac{\pi}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1}\frac{S_2}{\binom{r+1}{2}4^2}+\tfrac{1}{2}\frac{S_4}{\binom{r+3}{2}4^4}+\dots\right] \qquad 5]$$

($r$ gerade)

Da die in den Formeln 4] und 5] auftretende Reihe $\sum_1^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu}\frac{S_{2\nu}}{\binom{r+2\nu-1}{2\nu}}\cdot\frac{1}{4^{2\nu}}$ ungleich rascher als $S_r$ oder $U_r$ convergirt, so kann erstere zur Berechnung der letztern Reihen mit grossem Vorteil angewendet werden.

Die Convergenz der neuen Reihen kann dadurch noch wesentlich erhöht werden, dass zu 1]:

$$\Sigma\frac{\cos n\varphi}{n}=-\log\varphi+\frac{S_2}{1}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2+\frac{S_4}{2}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4+\dots$$

die Gleichung

$$0=-\log\left[1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\right]-\frac{1}{1}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4--\dots$$

addirt wird, woraus entsteht:

$$\Sigma\frac{\cos n\varphi}{n}=-\log\varphi\left[1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\right]+\frac{S_2-1}{1}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2+\frac{S_4-1}{2}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4+\dots \qquad 6]$$

Zwischen 0 und $\varphi$ wiederholt integriert, ergiebt zunächst:

$$-\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left[1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\right]d\varphi = \frac{\varphi^r}{r!}\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}-\log\varphi\right)$$

$$-\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left[1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\right]d\varphi = -\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)d\varphi - \overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)d\varphi$$

$$-\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)d\varphi = \frac{(2\pi)^r}{r!}\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r\left[1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r}-\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\right]$$

$$-\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)d\varphi = \frac{(-2\pi)^r}{r!}\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r\left[1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r} - \log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)\right]$$

somit

$$-\overset{r}{\int_0^{\varphi}}\log\left[1-\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2\right]d\varphi = \frac{(2\pi)^r}{r!}\Big\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{r}\right)\left[\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r + (-1)^r\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r\right] - \left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right) - (-1)^r\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)^r \times\log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)\Big\}$$

Nach $r$ -1 maliger Integration der Gleichung 6] ist nun

a) $r$ ungerade

$$\frac{S_3\varphi^{r-3}}{(r-3)!} - \frac{S_5\varphi^{r-5}}{(r-5)!} + - \ldots + (-1)^{\frac{r+1}{2}} S_r + (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^r}$$
$$= \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!}\Big\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}-\log\varphi\right) + \frac{1}{1}\cdot\frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4 + \ldots\Big\} + \frac{(2\pi)^{r-1}}{(r-1)!}\Big\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}\right)$$
$$\times\left[\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)^{r-1} + \left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)^{r-1}\right] - \left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)^{r-1}\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)$$
$$-\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)^{r-1}\log\frac{\varphi}{2\pi}\Big)\Big\}$$

$$= \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!}\left\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}\right)\left[1+\left(\frac{2\pi}{\varphi}+1\right)^{r-1}+\left(\frac{2\pi}{\varphi}-1\right)^{r-1}\right]\right.$$

$$-\log\varphi-\left(\frac{2\pi}{\varphi}+1\right)^{r-1}\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)-\left(\frac{2\pi}{\varphi}-1\right)^{r-1}\log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

$$\left.+1\,\frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2+\tfrac{1}{2}\,\frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4+\ldots\right\} \qquad 7]$$

b) $r$ gerade

$$\frac{S_3\varphi^{r-3}}{(r-3)!}-\frac{S_5\varphi^{r-5}}{(r-5)!}+-\ldots+(-1)^{\frac{r}{2}}S_{r-1}\varphi+(-1)^{\frac{r+2}{2}}\Sigma\frac{\sin n\varphi}{n^r}$$

$$= \frac{\varphi^{r-1}}{(r-1)!}\left\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}\right)\left[1+\left(\frac{2\pi}{\varphi}+1\right)^{r-1}-\left(\frac{2\pi}{\varphi}-1\right)^{r-1}\right]\right.$$

$$-\log\varphi-\left(\frac{2\pi}{\varphi}+1\right)^{r-1}\log\left(1+\frac{\varphi}{2\pi}\right)+\left(\frac{2\pi}{\varphi}-1\right)^{r-1}\log\left(1-\frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

$$\left.+1\,\frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2+\tfrac{1}{2}\,\frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}}\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^4+\ldots\right\} \qquad 8]$$

Die trigonometrischen Reihen gehen für den speciellen Wert $\varphi=\frac{\pi}{2}$ wieder in reine Potenzreihen über:

a) $r$ ungerade

$$\frac{S_3}{(r-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3}-\frac{S_5}{(r-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5}+\ldots+(-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{S_{r-2}}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$+(-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{2^{2r-1}+2^{r-1}-1}{2^{2r-1}}S_r=\frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}\left\{\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{r-1}\right)[1+3^{r-1}+5^{r-1}]-\log\frac{\pi}{2}-5^{r-1}\log\tfrac{5}{4}-3^{r-1}\log\tfrac{3}{4}$$

$$\left.+1\,\frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}}\frac{1}{4^2}+\tfrac{1}{2}\,\frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}}\frac{1}{4^4}+\ldots\right\} \qquad 9]$$

b) $r$ gerade

$$\frac{S_3}{(r-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-3}-\frac{S_5}{(r-5)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-5}+-\ldots(-1)^{\frac{r}{2}}S_r\frac{\pi}{2}+(-1)^{\frac{r+2}{2}}U_r$$

$$= \frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r-1}\Big[(1-3^{r-1}+5^{r-1})\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{r-1}\right)-\log\frac{\pi}{2}$$

$$+3^{r-1}\log\tfrac{3}{2}-5^{r-1}\log\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{S_2-1}{\binom{r+1}{2}}\,\frac{1}{4^2}+\tfrac{1}{2}\frac{S_4-1}{\binom{r+3}{4}}\,\frac{1}{4^4}+\ldots\Big] \qquad 10]$$

Bei Annahme eines grossen $r$ verschwinden die rechten Seiten der Gleichungen 2] und 3], während der linksseitigen Teile zu den bekannten Sinus- und Cosinus-Reihen führen.

Franz Rogel.

---

## 5.

### Zahl der Combinationen, die n Steine auf dem Damenbrette von 100 Feldern bilden können.

Wir suchen zunächst die Zahl $C'_{p,q}$ der Combinationen zu bestimmen, die mit $p$ einfachen Steinen und $q$ Damen möglich. Bezeichnen wir mit $C'_{i,p-i}$ die Zahl der Combinationen, die $p$ einfache Steine, worunter $i$ weisse und $(p-i)$ schwarze sich befinden, bilden können, ferner mit $C''_{k,q-k}$ die Zahl der Combinationen, die — bei $p$ auf dem Brette befindlichen Steinen — mit $k$ weissen und $(q-k)$ schwarzen Damen möglich, so haben wir

$$C_{p,q} = \sum_0^p C'_{i,p-i}\,.\sum_0^q C''_{k,q-k} - (C'_{0,p}\,.\,C''_{0,q} + C'_{p,0}\,.\,C''_{q,0})$$

Der Klammerausdruck ist von dem Product der beiden Summen abzuziehen, da wir die Fälle auszuschliessen haben, wo sämtliche auf dem Brett befindlichen Steine von derselben Farbe sind.

Indem wir in Betracht ziehen, dass ein einfacher Stein nicht die 5 Endfelder seines Gegners einnehmen kann, haben wir

$$C'_{i,p-i} = \binom{5}{0}\binom{40}{i}\binom{45-i}{p-i} + \binom{5}{1}\binom{40}{i-1}\binom{45-\overline{i-1}}{p-i}$$
$$+\binom{5}{2}\binom{40}{i-2}\binom{45-\overline{i-2}}{p-i} + \ldots + \binom{5}{5}\binom{40}{i-5}\binom{45-\overline{i-5}}{p-i}$$

Mit Rücksicht auf die Baziehung

$$\binom{r+s}{m} = \binom{r}{m}\binom{s}{0} + \binom{r}{m-1}\binom{s}{1} + \binom{r}{m-2}\binom{s}{2} +$$
$$+\ldots+\binom{r}{0}\binom{s}{m} \qquad (\alpha$$

können wir schreiben

$$C'_{i,p-i} = \binom{5}{0}\binom{40}{i}\binom{45-i}{p-i}$$
$$+\binom{5}{1}\binom{40}{i-1}\left[\binom{45-i}{p-i}\binom{1}{0}+\binom{45-i}{p-i-1}\binom{1}{1}\right]$$
$$+\binom{5}{2}\binom{40}{i-2}\left[\binom{45-i}{p-i}\binom{2}{0}+\binom{45-i}{p-i-1}\binom{2}{1}\right.$$
$$\left.+\binom{45-i}{p-i-2}\binom{2}{2}\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\binom{5}{5}\binom{40}{i-5}\left[\binom{45-i}{p-i}\binom{5}{0}+\binom{45-i}{p-i-1}\binom{5}{1}\right.$$
$$\left.+\binom{45-i}{p-i-2}\binom{5}{2}+\cdots+\binom{45-i}{p-i-5}\binom{5}{5}\right]$$
$$=\binom{5}{0}\binom{45-i}{p-i}\left[\binom{40}{i}\binom{5}{0}+\binom{40}{i-1}\binom{5}{1}\right.$$
$$\left.+\binom{40}{i-2}\binom{5}{2}+\cdots+\binom{40}{i-5}\binom{5}{5}\right]$$
$$+\binom{5}{1}\binom{45-i}{p-i-1}\left[\binom{40}{i-1}\binom{4}{0}+\binom{40}{i-2}\binom{4}{1}+\right.$$
$$\left.+\binom{40}{i-3}\binom{4}{2}+\cdots+\binom{40}{i-5}\binom{4}{4}\right]$$
$$+\binom{5}{2}\binom{45-i}{p-i-2}\left[\binom{40}{i-2}\binom{3}{0}+\binom{40}{i-3}\binom{3}{1}+\right.$$
$$\left.+\binom{40}{i-4}\binom{3}{2}+\binom{40}{i-5}\binom{3}{3}\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\binom{5}{5}\binom{45-i}{p-i-5}\binom{40}{i-5}$$

woraus sich mit Hilfe der Beziehung ($\alpha$ ergibt

$$C'_{i,p-i}=\binom{5}{0}\binom{45-i}{p-i}\binom{45}{i}+\binom{5}{1}\binom{45-i}{p-i-1}\binom{44}{i-1}$$
$$+\binom{5}{2}\binom{45-i}{p-i-2}\binom{43}{i-2}+\cdots+\binom{5}{5}\binom{45-i}{p-i-5}\binom{40}{i-5}$$

Nun ist

$$\binom{45-i}{p-i-J}\binom{45-J}{i-J}=\frac{(45-i)!}{(p-i-J)!\,(45-p+J)!}\,\frac{(45-J)!}{(i-J)!\,(45-i)!}$$

$$= \frac{(45-J)!}{(p-2J)!\,(45-p+J)!}\;\frac{(p-2J)!}{(i-J)!\,(p-i-J)!}$$

$$= \binom{45-J}{p-2J}\binom{p-2J}{i-J} \qquad (1)$$

somit

$$C'_{i,p-i} = \binom{5}{0}\binom{45}{p}\binom{p}{i} + \binom{5}{1}\binom{44}{p-2}\binom{p-2}{i-1}$$
$$+ \binom{5}{2}\binom{43}{p-4}\binom{p-4}{i-2} + \ldots + \binom{5}{5}\binom{40}{p-10}\binom{p-10}{i-5}$$

Insbesondere ist

$$C'_{0,p} = C'_{p,0} = \binom{5}{0}\binom{45}{p}\binom{p}{0} = \binom{45}{p} \qquad (1a)$$

Setzen wir in Gleichung (1) der Reihe nach $i = 0, 1, 2 \ldots p$ und addiren, so erhalten wir, da bekanntlich

$$\sum_0^p \binom{p}{i} = 2^p \quad \text{ist:}$$

$$\sum_0^p C'_{i,p-i} = \binom{5}{0}\binom{45}{p}2^p + \binom{5}{1}\binom{44}{p-2}2^{p-2}$$
$$+ \binom{5}{2}\binom{43}{p-4}2^{p-4} + \ldots + \binom{5}{5}\binom{40}{p-10}2^{p-10}$$

Es ist aber

$$\binom{r}{m} = \binom{5}{0}\binom{r+s}{m} - \binom{s}{1}\binom{r+s-1}{m-1}$$
$$+ \binom{s}{2}\binom{r+s-2}{m-2} - + \ldots + (-1)^s\binom{s}{s}\binom{r}{m-s} \qquad (\beta$$

somit können wir schreiben:

$$\Sigma C'_{i,p-i} = \binom{5}{0}2^p\Big[\binom{5}{0}\binom{50}{p} - \binom{5}{1}\binom{49}{p-1}$$
$$+ \binom{5}{2}\binom{48}{p-2} - + \ldots - \binom{5}{5}\binom{45}{p-5}\Big]$$
$$+ \binom{5}{1}2^{p-1}\Big[\binom{4}{0}\binom{48}{p-2} - \binom{4}{1}\binom{47}{p-3}$$
$$+ \binom{4}{2}\binom{46}{p-5} - \ldots + \binom{4}{4}\binom{44}{p-6}\Big]$$
$$+ \binom{5}{2}2^{p-4}\Big[\binom{3}{0}\binom{46}{p-4} - \binom{3}{1}\binom{45}{p-5}$$

$$+\binom{3}{2}\binom{44}{p-6}-\binom{3}{3}\binom{43}{p-7}\Big]$$

$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\binom{5}{5}2^{p-10}\binom{40}{p-10}$$

$$=\binom{50}{p}2^p\binom{5}{0}-\binom{49}{p-1}2^{p-1}\binom{5}{1}2$$

$$+\binom{48}{p-2}2^{p-2}\left[\binom{5}{0}\binom{5}{2}2^2+\binom{5}{1}\binom{4}{0}2^0\right]$$

$$-\binom{47}{p-3}2^{p-3}\left[\binom{5}{0}\binom{5}{3}2^3+\binom{5}{1}\binom{4}{1}2\right]$$

$$+\binom{46}{p-4}2^{p-4}\left[\binom{5}{0}\binom{5}{4}2^4+\binom{5}{1}\binom{4}{2}2^2+\binom{5}{2}\binom{3}{0}2^0\right]$$

$$-+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\binom{40}{p-10}2^{p-10}\binom{5}{5}$$

Mit Hinsicht auf die Beziehung

$$\binom{2m}{r}=\binom{m}{0}\binom{m}{r}2^r+\binom{m}{1}\binom{m-1}{r-2}2^{r-2}$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-4}2^{r-4}+\ldots \qquad (\gamma$$

ergibt sich schliesslich

$$\Sigma\, C'_{i,p-i}=\binom{10}{0}\binom{50}{p}2^p-\binom{10}{1}\binom{49}{p-1}2^{p-1}$$

$$+\binom{10}{2}\binom{48}{p-2}2^{p-2}-+\ldots+\binom{10}{10}\binom{40}{p-10}2^{p-10} \qquad (2)$$

Ferner erhalten wir

$$C''_{k,q-k}=\binom{50-p}{k}\binom{50-p-k}{q-k}$$

$$=\frac{(50-p)!}{k!(50-p-k)!}\,\frac{(50-p-k)!}{(q-k)!(50-p-q)!}$$

$$=\frac{(50-p)!}{q!(50-p-q)!}\,\frac{q!}{k!(q-k)!}=\binom{50-p}{q}\binom{q}{k} \qquad (3)$$

Insonderheit ist

$$C'_{0,q}=C''_{q,0}=\binom{50-p}{q} \qquad (3a)$$

Aus Gleichung (3) folgt

$$\sum_0^q C''_{k,q-k} = \binom{50-p}{q} 2^q \tag{4}$$

Beachten wir nun, dass

$$\binom{50-t}{p-t}\binom{50-p}{q} = \frac{(50-t)!}{(p-t)!(50-p)!} \frac{(50-p)!}{q!(50-p-q)!}$$
$$= \frac{(50-t)!}{(p-q-t)!(50-p-q)!} \frac{(p+q-t)!}{(p-t)!\,q!}$$
$$= \binom{50-t}{p+q-t}\binom{p+q-t}{q} \tag{*}$$

so gibt die Multiplication der Gleichungen (2) und (4)

$$\sum_0^p C' . \sum_0^q C'' = \binom{10}{0}\binom{50}{p+q}\binom{p+q}{q} 2^{p+q}$$
$$-\binom{10}{1}\binom{49}{p+q-1}\binom{p+q-1}{q} 2^{p+q-1}$$
$$+\binom{10}{2}\binom{48}{p+q-2}\binom{p+q-2}{q} 2^{p+q-2} - + \ldots$$
$$\ldots + \binom{10}{10}\binom{40}{p+q-10}\binom{p+q-10}{q} 2^{p+q-10}$$

Aus Gleichungen (1a) und (3a) folgt

$$C'_{0,p} . C''_{0,q} + C'_{p,0} . C''_{q,0} = 2\binom{45}{p}\binom{50-p}{q}$$

oder mit Rücksicht auf Beziehung ($\beta$):

$$C'.C'' + C'.C'' = 2\binom{50-p}{q}\left[\binom{5}{0}\binom{50}{p} - \binom{5}{1}\binom{49}{p-1}\right.$$
$$\left. + \binom{5}{2}\binom{48}{p-2} - + \ldots - \binom{5}{5}\binom{45}{p-5}\right]$$

wofür wir unter Beachtung der Beziehung (*) schreiben können:

$$2\left[\binom{5}{0}\binom{50}{p+q}\binom{p+q}{q} - \binom{5}{1}\binom{49}{p+q-1}\binom{p+q-1}{q}\right.$$
$$\left. + \binom{5}{2}\binom{48}{p+q-2}\binom{p+q-2}{q} - + \ldots - \binom{5}{5}\binom{45}{p+q-5}\binom{p+q-5}{q}\right]$$

Somit ergibt sich

$$C'_{p,q} = \binom{10}{0}\binom{50}{p+q}\binom{p+q}{q} 2^{p+q}$$
$$-\binom{10}{1}\binom{49}{p+q-1}\binom{p+q-1}{q} 2^{p+q-1}$$

$$+\binom{10}{2}\binom{48}{p+q-2}\binom{p+q-2}{q}2^{p+q-2}-+\ldots$$

$$\ldots+\binom{10}{10}\binom{40}{p+q-10}2^{p+q-10}$$

$$-2\Big[\binom{5}{0}\binom{50}{p+q}\binom{p+q}{q}-\binom{5}{1}\binom{49}{p+q-1}\binom{p+q-1}{q}$$

$$+\binom{5}{2}\binom{48}{p+q-2}\binom{p+q-2}{q}-+\ldots$$

$$\ldots-\binom{5}{5}\binom{45}{p+q-5}\binom{p+q-5}{q}\Big]$$

Setzen wir hierin der Reihe nach $q=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n$ und gleichzeitig $p=n,\ n-1,\ n-2\ \ldots\ 0$, so erhalten wir als Zahl der gesuchten Combinationen

$$A_n=\binom{10}{0}\binom{50}{n}4^n-\binom{10}{1}\binom{49}{n-1}4^{n-1}$$

$$+\binom{10}{2}\binom{48}{n-2}4^{n-2}-+\ldots+\binom{10}{10}\binom{40}{n-10}4^{n-10}$$

$$-2\Big[\binom{5}{0}\binom{50}{n}2^n-\binom{5}{1}\binom{49}{n-1}2^{n-1}$$

$$+\binom{5}{2}\binom{48}{n-2}2^{n-2}-+\ldots-\binom{5}{5}\binom{45}{n-5}2^{n-5}\Big]$$

## Bemerkungen.

Beziehung ($\alpha$) ergibt sich, wenn wir die beiden Seiten der Identität

$$(1+x)^{r+s}=(1+x)^r\,(1+x)^s$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln und die Coefficienten des Gliedes $x^m$ vergleichen.

In ähnlicher Weise erhalten wir Beziehung ($\beta$) aus der Vergleichung der Coefficienten des Gliedes $x^m$ in der Entwicklung von

$$(1-x)^{-(r-m+1)}=(1-x)^{-(r+3-m+1)}(1-x)^3$$

Um die Beziehung ($\gamma$) zu beweisen, haben wir

$$S=\binom{m}{0}\binom{m}{r}2^r+\binom{m}{1}\binom{m-1}{r-2}2^{r-2}$$

$$+\binom{m}{2}\binom{m-2}{r-4}2^{r-4}+\ldots+\binom{m}{s}\binom{m-s}{r-2s}2^{r-2s}+\ldots$$

$$= \binom{m}{0}\binom{m}{r}\left[\binom{r}{0}+\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\dots+\binom{r}{r}\right]$$

$$+ \binom{m}{1}\binom{m-1}{r-1}\left[\binom{r-2}{0}+\binom{r-2}{1}+\binom{r-2}{2}+\dots+\binom{r-2}{r-2}\right]$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$+ \binom{m}{s}\binom{m-s}{r-2s}\left[\binom{r-2s}{0}+\binom{r-2s}{1}+\binom{r-2s}{2}+\dots+\binom{r-2s}{r-2s}\right]$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$= \binom{m}{0}\binom{m}{r}\binom{r}{0}$$

$$+ \binom{m}{1}\binom{m-1}{r-2}\binom{r-2}{0}+\binom{m}{0}\binom{m}{r}\binom{r}{1}$$

$$+ \binom{m}{2}\binom{m-2}{r-4}\binom{r-4}{0}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{r-2}\binom{r-2}{1}+\binom{m}{0}\binom{m}{r}\binom{r}{2}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$+ \binom{m}{s}\binom{m-s}{r-2s}\binom{r-2s}{0}+\binom{m}{s-1}\binom{m-s+1}{r-2s+2}\binom{r-2s+2}{1}+\dots$$

$$\dots+\binom{m}{s-u}\binom{m-s+u}{r-2s+2u}\binom{r-2s+2u}{u}+\dots$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

Nun ist

$$\binom{m}{s-u}\binom{m-s+u}{r-2s+2u}\binom{r-2s+2u}{u}$$

$$= \frac{m!}{(s-u)!\,(m-3+u)!}\;\frac{(m-s+u)!}{(r-2s+2u)!\,(m-r+s-u)!}\;\frac{(r-2s+2u)!}{u!\,(r-2s+u)!}$$

$$= \frac{m!}{(r-s)!\,(m-r+s)!}\;\frac{(m-r+s)!}{u!\,(m-r+s-u)!}\;\frac{(r-s)!}{(s-u)!\,(r-2s+u)!}$$

$$= \binom{m}{r-s}\binom{m-r+s}{u}\binom{r-s}{s-u}$$

somit

$$S = \binom{m}{r}\binom{m-r}{0}\binom{r}{0}$$

$$+ \binom{m}{r-1}\left[\binom{m-r+1}{0}\binom{r-1}{1}+\binom{m-r+1}{1}\binom{r-1}{0}\right]$$

$$+ \binom{m}{r-2}\left[\binom{m-r+2}{0}\binom{r-2}{2}+\binom{m-r+2}{1}\binom{r-2}{1}\right.$$

$$\left.+ \binom{m-r+2}{2}\binom{r-2}{2}\right]$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

$$+\binom{m}{r-s}\left[\binom{m-r+s}{0}\binom{r-s}{s}+\binom{m-r+s}{1}\binom{r-s}{s-1}\right.$$
$$\left.+\binom{m-r+s}{2}\binom{r-s}{s-2}+\cdots+\binom{m-r+s}{s}\binom{r-s}{0}\right]$$
$$+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

oder mit wiederholter Anwendung von $(\alpha)$

$$S=\binom{m}{r}\binom{m}{0}+\binom{m}{r-1}\binom{m}{1}+\binom{m}{r-2}\binom{m}{2}+\cdots$$
$$\cdots+\binom{m}{r-s}\binom{m}{s}+\cdots+\binom{m}{0}\binom{m}{r}$$
$$=\binom{2m}{r}\quad \text{q. e. d.}$$

Louisville, Juni 1889.

Carl Boecklen.

---

6.

**Bemerkung zum Königinnenproblem.**

Wo das Königinnenproblem, d. ist die Aufgabe, 8 Königinnen auf dem Schachbret so zu stellen, dass keine die andere angreift, zur Unterhaltung geübt wird, da ist wol schon öfters bemerkt worden, dass bei jeder Lösung eine gerade Zahl von Königinnen auf Feldern gleicher Farbe steht. Der Grund dieses Umstandes, den ich hier auf Anlass geschehener Nachfrage angebe, ist insofern instructiv, als er sich durch die elementarste Determinantenbetrachtung darbietet.

Von den zweierlei Zügen der Königin kommt nur der Turmzug in Anwendung. Sei daher $t_{kh}$ ein Turm auf dem $k$ten Felde der $h$ten Reihe. Entwickelt man die Determinante $|t_{kh}|$ für $k=1$, $2 \ldots 8$; $h=1, 2 \ldots 8$ in ihre $8!$ Terme, so drückt jeder Term eine Aufstellung von 8 Türmen aus, die sich nicht angreifen, weil kein Wert von $k$ und von $h$ zweimal darin vorkommt. Ausserdem ist ersichtlich, dass keine andre Aufstellung der Bedingung genügt, dass mithin jene Terme alle Lösungen des analogen Turmproblems repräsentiren.

Ein Turm steht nun auf weissem oder schwarzem Felde (oder umgekehrt), jenachdem $h+k$ gerade oder ungerade ist. Hiernach gibt der Anfangsterm $t_{11}t_{22}\ldots t_{88}$ 8 weisse Felder. Aus diesem

gehen alle andern Terme hervor durch wiederholte Vertauschung zweier Werte von $k$, z. B. $k$ und $k'$. Ist nun $k+k'$ gerade, so bleiben die Farben unverändert; ist es ungerade, so wechseln beide betreffenden Türme die Farbe. Folglich kann sich die Anzahl der besetzten Felder gleicher Farbe nur um eine gerade Zahl ändern und bleibt stets gerade.

Hiermit ist der Satz für Türme bewiesen. In einer Stellung aber, wo sich Türme bedrohen, bedrohen sich auch Königinnen; daher können 8 Königinnen nicht auf ungerader Anzahl weisser und schwarzer Felder stehen ohne sich zu bedrohen, w. z. b. w.

Alles Gesagte, mit einziger Ausnahme dessen, was den Haupt-(oder Diagonal-)Term betraf, gilt offenbar auch für $n$ Königinnen, resp. Türmen, auf einem Brete von $nn$ Feldern. Ist $n$ gerade, so ist der Hauptterm in gleichem Falle wie für $n=8$, und der Satz besteht fort. Ist $n$ ungerade, so gibt es, wie im Hauptterm, in allen Lösungen eine ungerade Anzahl Felder von der gemeinsamen Farbe beider Diagonalen, eine gerade Anzahl von der andern, welche aus null parweise durch Permutation entstehen. R. Hoppe.

---

7.

**Nachträgliche Bemerkung zu Nr. VII.**

Wir haben auf Seite 206 d. Teiles gefunden, dass das Konoid

$$r^2\eta^2 = \zeta^2(\xi^2+\eta^2)$$

von dem Kegel

$$\xi^2+\eta^2 = \zeta^2$$

nach zwei untereinander und mit der Directrix des ersteren congruenten sph. Schleifenlinien geschnitten wird. Hiemit war die Existenz von vier derartigen Schleifenlinien auf diesem Konoide nachgewiesen. Nun kann aber leicht gezeigt werden, dass sich nicht nur deren vier, sondern beliebig viele vorfinden. — Denken wir uns nämlich, es vollführe die Directrix ($x = r\cos u^2$, $y = r\sin u\cos u$, $z = r\sin u$) eine gleichförmige Rotation im negat Sinne um die verticale Axe ($x = \frac{1}{2}r$, $y = 0$), während diese Axe selber gleichzeitig eine ebenfalls gleichförmige Rotation, aber nur mit halber Winkelgeschwindigkeit und im posit. Sinne um die $\zeta$-Axe erleidet, so beschreibt jeder Punkt der Directrix (da deren Grundriss ein durch den Ursprung gehender Kreis $\xi^2+\eta^2 = r\eta$ ist) nach einem bekannten Satze der Kinematik eine horizontale, die $\zeta$-Axe schneidende Gerade, also eine Erzeugende

unseres Konoides, und folglich finden sich aaf dessen Oberfläche unendlich viele sph. Schleifenlinien vor, — es kann durch die angedeutete zusammengesetzte Bewegung der Directrix erzeugt werden.

Es ist dieses Ergebniss übrigens, wie leicht zu sehen, blos ein Ausfluss eines allgemeinen, für alle geraden Konoide giltigen Satzes, der wie folgt ausgesprochen werden kann: „Alle geraden Kreiscylinder, welche congruente Basen haben, und von denen eine Erzeugende mit der Axe irgend eines gleichfalls geraden Konoides zusammenfällt, schneiden das letztere in congruenten Curven".

In Bezug auf den vorliegenden Fall ergibt sich demgemäss, dass die Durchdringungscurven aller Kreiscylinder, deren Gleichungen die Form haben

$$\xi^2 + \eta^2 = r(\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi)$$

mit dem Konoide

$$r^2 \eta^2 = \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2)$$

mit dessen Directrix congruente sph. Schleifenlinien sind, deren Doppelpunkte auf der Abscissenaxe liegen und zwar in der Strecke von $x = -r$ bis $x = +r$. Hieraus folgern wir weiter, dass die Kegel, beziehungsweise Kugeln mit den Gleichungen

$$(\xi - \alpha)^2 + \eta^2 = \zeta^2, \qquad \xi^2 + (\eta - \beta)^2 + \zeta^2 = r^2$$

($\alpha$, $\beta$ beide absolut genommen $< r$) aus dem Konoide, desgleichen mit dessen Directrix congruente Schleifenlinien herausschneiden, welche Resultate unschwer analytisch verificirt werden können.

Eduard Janisch.

---

8.

## Zur Bestimmung der Curven durch die Relation zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel.

Ist der Torsionswinkel $\vartheta$ als Function des Krümmungswinkels $\tau$ gegeben, so lässt sich das Problem der Darstellung der Curve bei willkürlich bleibendem Bogen, wie ich in Crelle J. LX. 182. LXIII. 122 und in d. Arch. gezeigt habe, auf die lineare Gleichung 2. Ordn.

$$r'' + i\vartheta' r' + \tfrac{1}{4} r = 0 \tag{1}$$

zurückführen, wo die Striche die Diff. nach $\tau$ bezeichnen, und, wenn $f$, $f'$, $l$ die Richtungscos. der Tangente, Haupt- und Binormale sind, die Bedeutung von $r$ aus den Annahmen hervorgeht:

$$f \cos\mu + f' \sin\mu = 1 \quad (2) \qquad r' = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\mu \quad (4)$$
$$f \sin\mu - f' \cos\mu = il \quad (3)$$

Unabhängig *) hiervon hat nun E. Goursat in den Ann. de la Fac. de Toulouse l. c. dasselbe Problem bei der Annahme

$$f + il = Y^2 \tag{5}$$

gleichfalls auf eine Gleichung 2. Ordn., und zwar für $Y$ zurückgeführt. Es entsteht die Frage, ob sich die complexen $r$ und $Y$ als monodrome Functionen von einander explicite darstellen lassen, so dass beide Differentialgleichungen durch Substitution aus einander hervorgehen. Sei für reelle $p$, $v$

$$r = p e^{iv} \tag{6}$$

dann ergibt sich durch Elimination von $\vartheta'$ aus der reellen Doppelgleich. (1) nach Integration:

$$p'^2 + p^2 v'^2 + \tfrac{1}{4} p^2 = c^2 \quad \text{(constant)} \tag{7}$$

und durch Elimination von $v$ zwischen (6) und (7):

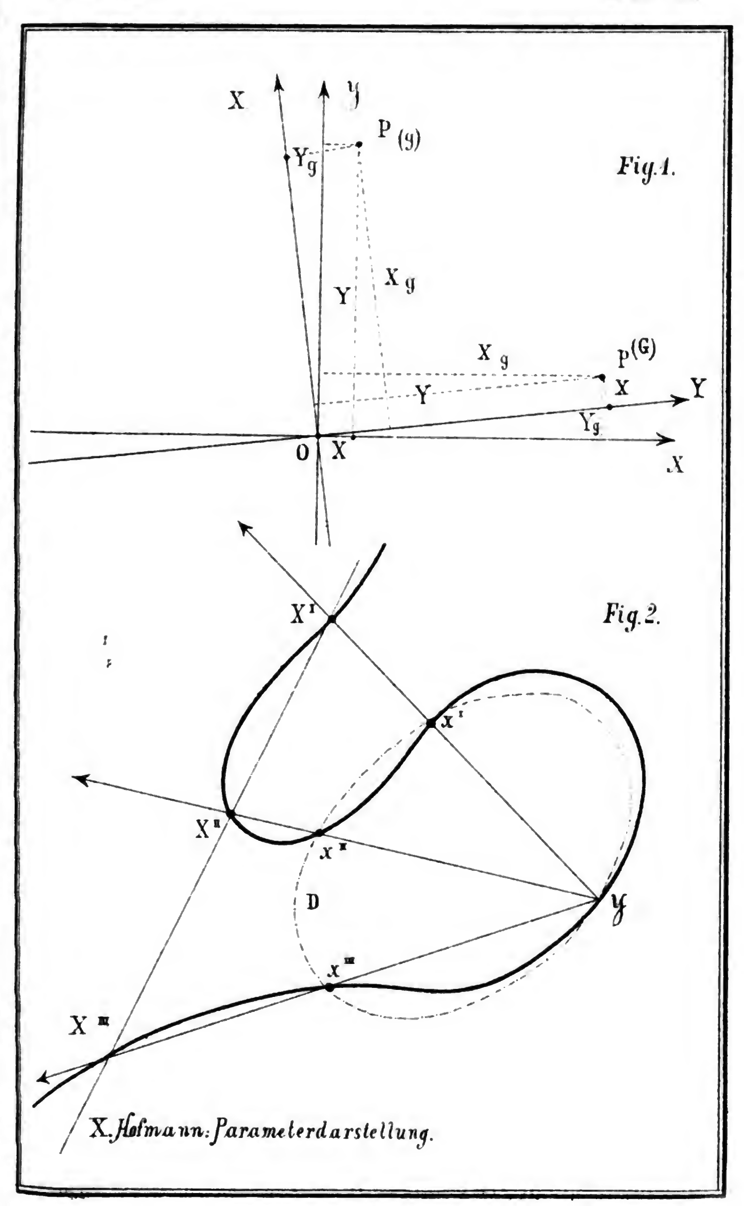
$$(p^2)' - \left(\frac{r'}{r} - \frac{r}{4r'}\right) p^2 = \frac{c^2 r}{r'} \tag{8}$$

Hiernach ist erst $p$, dann nach Gl. (6) $v$ in $r$ dargestellt. Ferner ist nach Bd. II. S. 421 Gl. (22) $f = p^2 - 1$ und $f'$ bekannt, daher nach Gl. (2) (3) auch $l$, also nach Gl. (5) $Y$ ausgedrückt als Function von $r$.

---

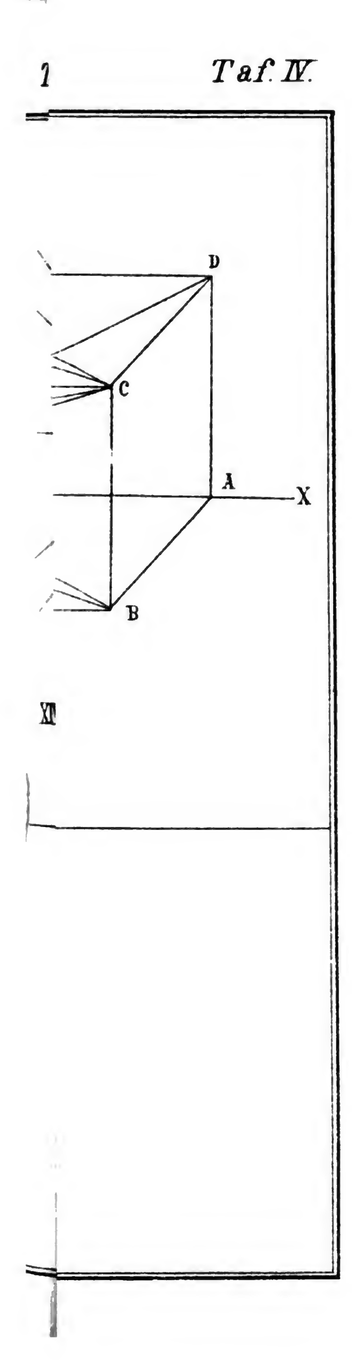
*) Goursat citirt meine oben genannte Arbeit, hat sie aber allem Anschein nach nicht gelesen. Was er (p. 19) als deren Inhalt angibt, kommt gar nicht darin vor. Trotzdem er sie nicht kennt, scheut er sich nicht (p. 1) zu behaupten, sie behandle nur einen speciellen Fall des Problems.

R. Hoppe.




X. Hofmann: Parameterdarstellung.

Taf. IV.



**Einsendungen für das „Archiv der Mathematik und Physik" erbitten wir nur unter der Adresse des Herrn Prof. Dr. R. Hoppe in Berlin, S. Prinzenstrasse 69.**

Leipzig. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
(*J. Sengbusch.*)

# INHALT.

Seite



---

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

# ARCHIV

der

# MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

---

Gegründet von

**J. A. Grunert,**

fortgesetzt von

**R. Hoppe.**

Zweite Reihe.

Achter Teil. Viertes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1890.

XV.

# Ueber den Brocard'schen Kreis als geometrischen Ort und die demselben verwandten Kegelschnittschaaren.

Von

**Andr. Müller.**

---

Die Sätze, welche hier erörtert werden sollen, wurden unter Anwendung barycentrischer Coordinaten gewonnen. Es möge deshalb gestattet sein, auch hier dieses Coordinatensystem, das sich für die vorliegende Frage als ganz besonders geeignet erweist, beizubehalten. Zu diesem Zwecke möge zunächst daran erinnert werden, dass die Lage eines Punktes $M$ in Bezug auf drei feste Punkte $A$, $B$, $C$ (Fundamentaldreieck) ausgedrückt wird durch die Gleichung:

$$M = \frac{aA + bB + cC}{a + b + c}$$

oder

$$M \equiv aA + bB + cC$$

wenn $a$, $b$ und $c$ die Gewichte darstellen, welche man sich in den Punkten $A$, $B$ und $C$ zu denken hat, damit $M$ den Schwerpunkt jener drei mit den bezüglichen Gewichten belasteten Punkte darstelle [1]).

---

1) Möbius: Der barycentrische Calcul 1. Abschn. 2. Cap. S. 10. u. ff. Bellavitis: Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica IV 92 pag. 44.

Denkt man sich ferner den Punkt $M$ mit den Ecken des Fundamentaldreiecks $ABC$ verbunden und diese Geraden bis zum Schnitt mit den Seiten $BC$ in $A'$, $CA$ in $B'$, $AB$ in $C'$ verlängert, so verhalten sich auch

$$a:b:c = \frac{A'M}{A'A} : \frac{B'M}{B'B} : \frac{C'M}{C'C}$$

oder auch

$$a:b:c = \triangle BMC : \triangle CMA : \triangle AMB$$

Ferner mögen hier im voraus die im folgenden zur Verwendung gelangenden Formeln zusammengestellt werden. Betrachten wir nämlich zwei Punkte $M_1$ und $M_2$, deren Coordinaten beziehungsweise $a_1$, $b_1$, $c_1$ und $a_2$, $b_2$, $c_2$ seien, so müssen die Coordinaten eines dritten Punktes $x_1$, $x_2$, $x_3$ auf der Verbindungslinie derselben die Bedingung erfüllen:

1) [1]
$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir in der Entwicklung dieser Determinante die mit $x_1$ multiplicirte Unterdeterminante mit $\alpha_{12}$, die mit $x_2$ multiplicirte mit $\beta_{12}$, die mit $x_3$ multiplicirte mit $\gamma_{12}$ und ebenso in einer zweiten und dritten Determinante, welche die durch die Punkte 3, 4, beziehungsw. 5, 6 gehenden Geraden darstellen, die betr. Unterdeterminanten mit $\alpha_{34}$ etc., $\alpha_{56}$ etc., so sind die Schnittpunkt-Coordinaten der beiden ersten Geraden bestimmt durch die Gleichung:

2) $$x_1:x_2:x_3 = \begin{vmatrix} \beta_{12}, & \gamma_{12} \\ \beta_{34}, & \gamma_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \gamma_{12}, & \alpha_{12} \\ \gamma_{34}, & \alpha_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_{12}, & \beta_{12} \\ \alpha_{34}, & \beta_{34} \end{vmatrix}$$

die Bedingung aber, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen, ist:

3) $$\begin{vmatrix} \alpha_{12}, & \beta_{12}, & \gamma_{12} \\ \alpha_{34}, & \beta_{34}, & \gamma_{34} \\ \alpha_{56}, & \beta_{56}, & \gamma_{56} \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnet man ferner die Länge der Strecken $BC$, $CA$, $AB$ bezüglich mit $a$, $b$, $c$, so ist ein Punkt $M_1$ mit den Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ auf der dem Dreieck umschriebenen Kreisperipherie gebunden an den Ausdruck

$$M_1 \equiv \frac{Aa}{x_1} + \frac{Bb}{x_2} + \frac{Cc}{x_3}$$

---

1) Die Ableitung der Formeln 1—4 siehe im Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten v. J. 1889.

und die Gleichung, welche die Coordinaten eines Punktes, der auf der Kreisperipherie liegen soll, erfüllen müssen, ist:

$$\frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0 \qquad 4)$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns der besonderen, in der Ueberschrift bezeichneten Aufgabe zu.

## I.

Das Dreieck, an welches die Untersuchung geknüpft werden soll, und das zugleich als Fundamentaldreieck dient, sei $ABC$[1]), die Segmentärpunkte seien $O_2$ und $O_2'$, die Schnittpunkte von $BO_2$ und $CO_2'$, dann von $CO_2$ mit $AO_2'$, endlich von $AO_2$ mit $BO_2'$ seien bezüglich $A_2 B_2 C_2$; dann sind zunächst die Punkte $O_2$ und $O_2'$ barycentrisch ausgedrückt durch

$$O_2 \equiv \frac{1}{b^2} A + \frac{1}{c^2} B + \frac{1}{a^2} C$$

und

$$O_2' \equiv \frac{1}{c^2} A + \frac{1}{a^2} B + \frac{1}{b^2} C$$

Die Coordinaten des ersten Ausdruckes ergeben sich leicht durch eine elementare Betrachtung. Verbindet man nämlich die Ecken $A$, $B$, $C$ mit $O_2$ und verlängert die Verbindungslinien bis zum Schnitt mit den gegenüber stehenden Seiten in $A_\alpha$, $B_\beta$, $C_\gamma$, so findet sich

$$\frac{A_\alpha O_2}{A_\alpha A} = \frac{1}{b^2}; \quad \frac{B_\beta O_2}{B_\beta B} = \frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \frac{C_\gamma O_2}{C_\gamma C} = \frac{1}{a^2}$$

Die Coordinaten von $O_2'$ ergeben sich ebenso, oder noch einfacher unter Beachtung des Umstandes, dass $O_2'$ der Winkelgegenpunkt von $O_2$ ist. Aus diesen Coordinaten lassen sich nun die der übrigen in Betracht kommenden Punkte berechnen, wenn man im besonderen Fall nicht etwa anderweitige Erwägungen anstellen will. Für $A_2$ den Schnittpunkt von $BO_2$ mit $CO_2'$ sei diese Rechnung hier ausgeführt.

$B$ hat die Coordinaten:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

---

1) S. den Art.: „Der Brocard'sche Winkel" von W. Fuhrmann im 6. T. der 2. R. dieser Zeitschrift und die demselben beigegebene Figur.

$O_2$ die Coordinaten:

$$a_2 = \frac{1}{b^2}, \quad b_2 = \frac{1}{c^2}, \quad c_2 = \frac{1}{a^2}$$

ferner $C$:

$$a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = 1$$

endlich $O_2'$:

$$a_4 = \frac{1}{c^2}, \quad b_4 = \frac{1}{a^2}, \quad c_4 = \frac{1}{b^2}$$

Also wird nach 2):

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{b^2\,c^2} : \frac{1}{a^2\,b^2} : \frac{1}{a^2\,c^2}$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = a^2 : c^2 : b^2$$

Ebenso findet man für $B_2$:

$$x_1 : x_2 : x_3 = c^2 : b^2 : a^2$$

und für $C_2$:

$$x_1 : x_2 : x_3 = b^2 : a^2 : c_2$$

Die Anwendung der Formel 3) ergibt nun zunächst folgenden Satz:

Verbindet man homologe Punkte auf den Seiten des Fundamentaldreiecks $BC$, $CA$, $AB$ bzhw. mit den Punkten $A_2$, $B_2$, $C_2$, so schneiden sich immer je drei derselben in dem nämlichen Punkte.

Unter homologen Punkten sind solche zu verstehen, welche man erhält, wenn man die drei Seiten des Dreiecks der Folge nach im nämlichen Verhältnisse teilt. Teilt nämlich $P_\alpha$ die Seite $BC$ im Verhältniss von $m:n$, so sind die Coordinaten dieses Punktes

$$a_1 = 0, \quad b_1 = n, \quad c_1 = m$$

teilt $P_\beta$ die Seite $CA$ im Verhältniss $m:n$, so sind dessen Coordinaten:

$$a_3 = m, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = n$$

endlich sind die Coordinaten von $P_\gamma$:

$$a_5 = n, \quad b_5 = m, \quad c_5 = 0$$

Die Coordinaten von $A_2$, $B_2$, $C_2$ aber sind:

$$a_2 = a^2, \quad b_2 = c^2, \quad c_2 = b^2$$
$$a_4 = c^2, \quad b_4 = b^2, \quad c_4 = a^2$$
$$a_6 = b^2, \quad b_6 = a^2, \quad c_6 = c^2$$

Die Determinante 3) erhält also unter Einführung dieser Werte folgende Form:

$$\Theta = \begin{vmatrix} nb^2-mc^2, & ma^2, & -na^2 \\ -nb^2, & nc^2-ma^2, & mb^2 \\ mc^2, & -nc^2, & na^2-mb^2 \end{vmatrix}$$

Man ersieht aber sofort, wenn man sich die Glieder der einzelnen Colonnen addirt denkt, dass $\Theta = 0$ ist.

## II.

Diese Schnittpunkte nun liegen sämtlich auf dem Brocard'schen Kreise, daher der weitere Satz:

Der Brocard'sche Kreis ist der geometrische Ort der Schnittpunkte von je drei Geraden, welche man erhält, wenn man homologe Punkte auf den Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Dreiecks bzhw. mit den Punkten $A_2$, $B_2$, $C_2$ verbindet.

Um den Nachweis dieses Satzes zu liefern, müssen wir zuvor eine Coordinatentransformation ausführen. Die Formel 4) gilt nämlich für die Coordinaten eines Punktes, welcher auf dem Kreise liegt, der dem Fundamentaldreieck umbeschrieben ist. Es muss also $\triangle A_2 B_2 C_2$, um welches bekanntlich der Brocard'sche Kreis beschrieben ist, als Fundamentaldreieck betrachtet werden. Das Verhältniss der Grössen $a^2$, $b^2$, $c^2$ in 4) ändert sich dabei nicht, da, (wie sich auch barycentrisch zeigen lässt)

$$\triangle A_2 B_2 C_2 \sim \triangle ABC \quad \text{ist.}$$

Um aber die Coordinaten irgend eines Punktes auf $A_2 B_2 C_2$ zu beziehen, erinnern wir uns, dass

$$A_2 = \frac{a^2 A + c^2 B + b^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$B_2 = \frac{c^2 A + b^2 B + a^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$C_2 = \frac{b^2 A + a^2 B + c^2 C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bezeichnen wir nun $a^2+b^2+c^2$ mit $\Sigma$ und setzen die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a^2, & c^2, & b^2 \\ c^2, & b^2, & a^2 \\ b^2, & a^2, & c^2 \end{vmatrix} = a^2\alpha + c^2\beta + b^2\gamma$$

so ist

$$A = \frac{\Sigma}{\Delta}(\alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2)$$

$$B = \frac{\Sigma}{\Delta}(\beta A_2 + \gamma B_2 + \alpha C_2)$$

$$C = \frac{\Sigma}{\Delta}(\gamma A_2 + \alpha B_2 + \beta C_2)$$

Ein Punkt $P_\alpha$ also, welcher $BC$ im Verhältniss von $n:m$ teilt, hat, bezogen auf das Dreieck $A_2 B_2 C_2$, den Ausdruck:

$$P_\alpha \equiv (m\beta + n\gamma)A_2 + (m\gamma + n\alpha)B_2 + (m\alpha + n\beta)C_2$$

Der homologe Punkt $P_\beta$ auf $CA$ ist ausgedrückt durch

$$P_\beta \equiv (m\gamma + n\alpha)A_2 + (m\alpha + n\beta)B_2 + (m\beta + n\gamma)C_2$$

Endlich ist

$$P_\gamma \equiv (m\alpha + n\beta)A_2 + (m\beta + n\gamma)B_2 + (m\gamma + n\alpha)C_2$$

Verbindet man nun $P_\alpha$ mit $A_2$, so hat man in Formel 1):

$$a_1 = m\beta + n\gamma; \quad b_1 = m\gamma + n\alpha; \quad c_1 = m\alpha + m\beta$$
$$a_2 = 1; \quad b_2 = 0; \quad c_2 = 0$$

und irgend ein Punkt auf dieser Geraden genügt also der Gleichung:

$$x_2(m\alpha + n\beta) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Ebenso genügt ein Punkt auf der Geraden $P_\beta B_2$ der Gleichung:

$$x_1(m\beta + n\gamma) - x_3(m\gamma + n\alpha) = 0$$

Endlich gilt für $P_\gamma C_2$ die Gleichung:

$$(m\beta + n\gamma)x_1 - (m\alpha + n\beta)x_2 = 0$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes je zweier dieser Geraden genügen den beiden betr. Gleichungen. Da sie aber dann auch der dritten Gleichung genügen, so ersicht man auch hieraus, dass die drei Geraden durch denselben Punkt gehen. Für diesen Schnittpunkt ist also:

$$x_1(m\beta + n\gamma) = x_2(m\alpha + n\beta) = x_3(m\gamma + n\alpha)$$

Soll dieser Punkt auch auf dem um $A_2 B_2 C_2$ beschriebenen Kreise liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen:

$$\frac{a^2}{x_1} + \frac{b^2}{x_2} + \frac{c^2}{x_3} = 0$$

Um nun darzutun, dass für denselben diese Gleichung erfüllt ist, multipliciren wir Dividend und Divisor des ersten Quotienten mit $m\beta + n\gamma$, des zweiten mit $m\alpha + n\beta$, des dritten mit $m\gamma + n\alpha$ Dadurch werden alle drei Nenner gleich, und die linke Seite der obigen Gleichung erhält also die Form:

$$a^2(m\beta + n\gamma) + b^2(m\alpha + n\beta) + c^2(m\gamma + n\alpha)$$

oder:

$$m(a^2\beta + b^2\alpha + c^2\gamma) + n(a^2\gamma + b^2\beta + c^2\alpha)$$

oder:

$$m \, . \begin{vmatrix} b^2, & c^2, & b^2 \\ a^2, & b^2, & a^2 \\ c^2, & a^2, & c^2 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c^2, & c^2, & b^2 \\ b^2, & b^2, & a^2 \\ a^2, & a^2, & c^2 \end{vmatrix}$$

in welcher Summe ersichtlich jeder der beiden Summanden für sich gleich 0 ist. Da also die Gleichung für beliebige $m$ und $n$ erfüllt ist, so ist es selbstverständlich, dass auch die beiden Segmentärpunkte $O_2$ und $O'_2$ ($m = 0$ bzhw. $n = 0$), ferner der Greve'sche Punkt $G_2$ ($m + n = 0$), sowie der Punkt $M_2'$ ($m = n$) auf jenem Kreise liegen. Da ferner die obige Gleichung auch für ein negatives $m$ oder $n$ erfüllt ist, so dürfen die homologen Punkte auch auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten gewählt werden.

## III.

Die soeben durchgeführten Untersuchungen sind nun nach doppelter Richtung der Verallgemeinerung fähig. Zunächst ist nämlich ersichtlich, dass die analytischen Formeln, welche seither zum Beweise der aufgestellten Sätze Verwendung fanden, auch dann ihre Giltigkeit behalten, wenn an Stelle der Exponenten 2, mit denen die Coordinaten der in Betracht kommenden Punkte versehen waren, irgend eine andere Zahl tritt; des weiteren aber lässt eine genauere Untersuchung erkennen, dass, wenn man den Punkt $A_2$ mit irgend welchen Punkten auf $CA$ oder $AB$ und entsprechend $B_2$ und $C_2$ mit den homologen Punkten auf $AB$ und $BC$ bzhw. $BC$ und $CA$ verbindet, sich ähnliche Sätze ergeben, wie die oben abgeleiteten, und dass auch diese Sätze sich wieder verallgemeinern lassen.

Um nun die Untersuchung nach der eben angedeuteten dreifachen Richtung ganz allgemein durchzuführen, gehen wir von drei Punkten aus, welche mit $A_m$, $B_m$, $C_m$ bezeichnet seien und durch die Ausdrücke bestimmt sind [1])

---

1) Ueber die Construction dieser Punkte für den Fall, dass $m$ eine ganze Zahl vorstellt, siehe das Programm des kgl. Gymnasiums zu Kempten vom Jahre 1889.

$$A_m \equiv a^mA + c^mB + b^mC$$
$$B_m \equiv c^{m}A + b^mB + a^mC$$
$$C_m \equiv b^mA + a^mB + c^mC$$

in welchen Ausdrücken $m$ irgend eine positive oder negative Zahl bezeichnet. Verbindet man nun homologe Punkte

1) auf $BC$ mit $A_m$ auf $CA$ mit $B_m$ auf $AB$ mit $C_m$
2) auf $BC$ mit $C_m$ auf $CA$ mit $A_m$ auf $AB$ mit $B_m$
3) auf $BC$ mit $B_m$ auf $CA$ mit $C_m$ auf $AB$ mit $A_m$

so schneiden sich in allen drei Fällen je drei solcher Verbindungslinien in demselben Punkte.

Es seien nämlich die drei Seiten des Coordinatendreiecks im Verhältniss von $q:p$ geteilt, und es werde der Teilungspunkt auf $BC$ mit $A_{pq}$ auf $CA$ mit $B_{pq}$ auf $AB$ mit $C_{pq}$ bezeichnet, dann erscheint der Punkt

$$A_{pq} \equiv pB + qC$$

m ersten Falle mit $A_m$, im zweiten mit $C_m$, im dritten mit $B_m$ verbunden. Sind ferner die Punkte

$$B_{pq} \equiv qA + pC$$

und

$$C_{pq} \equiv pA + qB$$

in der oben näher bezeichneten Weise mit den Punkten $A_m$, $B_m$, $C_m$, jeweilig verbunden, und bildet man in jedem der drei Fälle die der Formel 3) entsprechende Determinante, so ergibt sich:

$$1)\quad \begin{vmatrix} pb^m - qc^m, & qa^m, & -pa^m \\ -pb^m, & pc^m - qa^m, & qb^m \\ qc^m, & -pc^m, & pa^m - qb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} -pc^m, & pa^m - qb^m, & qc^m \\ qa^m, & -pa^m, & pb^m - qc^m \\ pc^m - qa^m, & qb^m, & -pb^m \end{vmatrix} = 0$$

$$3)\quad \begin{vmatrix} pa^m - qb^m, & qc^m, & -pc^m \\ -pa^m, & pb^m - qc^m, & qa^m \\ qb^m, & -pb^m, & pc^m - qa^m \end{vmatrix} = 0$$

Es ist also die nämliche Determinante (nur Colonnen und Reihen sind cyklisch vertauscht), welche man in den drei Fällen erhält,

und deren Verschwinden die Richtigkeit der obigen Behauptungen erhärtet.

Für die Coordinaten eines Schnittpunktes erhält man in jedem der drei Fälle aus der betr. Determinante den Ausdruck:

$$1) \quad x_2 : x_2 : x_3 = a^m(q^2b^m + p^2c^m - pqa^m) : b^m(q^2c^m + p^2a^m - pqb^m) \\ : c^m(q^2a^m + p^2b^m - pqc^m)$$

$$2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = b^m(q^2c^m + p^2a^m - pqb^m) : c^m(q^2a^m + p^2b^m - pqc^m) \\ : a^m(q^2b^m + p^2c^m - pqa^m)$$

$$3) \quad x_1 : x_2 : x_3 = c^m(q^2a^m + p^2b^m - pqc^m) : a^m(q^2b^m + p^2c^m - pqa^m) \\ : b^m(q^2c^m + p^2a^m - pqb^m)$$

Wie man sieht, treten in den drei Fällen die nämlichen Coordinaten, nur in veränderter Reihenfolge (cyklisch vertauscht) auf.

Setzen wir nun in diesen Ausdrücken, um einige Punkte näher kennen zu lernen, $p = 0$, so wird der Ausdruck für den Schnittpunkt

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{1}{c^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

Der erste Punkt ist zu bezeichnen mit $O'_m$, der zweite mit $G_{-m}$, der dritte mit $O_m$.

Setzen wir $q = 0$, so wird

$$1) \quad Y_1 \equiv \frac{1}{b^m} A + \frac{1}{c^m} B + \frac{1}{a^m} C$$

$$2) \quad Y_2 \equiv \frac{1}{c^m} A + \frac{1}{a^m} B + \frac{1}{b^m} C$$

$$3) \quad Y_3 \equiv \frac{1}{a^m} A + \frac{1}{b^m} B + \frac{4}{c^m} C$$

Der erste Punkt ist wieder $O_m$, der zweite $O'_m$, der dritte $G_{-m}$.

Setzen wir $p = q$, verbinden wir also die Mitten der Seiten des Coordinatendreiecks mit den Punkten $A_m$, $B_m$, $C_m$, so wird

$$1)\quad Y_1 \equiv a^m(b^m+c^m-a^m)A+b^m(a^m+c^m-b^m)B+c^m(a^m+b^m-c^m)C$$
$$2)\quad Y_2 \equiv b^m(a^m+c^m-b^m)A+c^m(a^m+b^m-c^m)B+a^m(b^m+c^m-a^m)C$$
$$3)\quad Y_3 \equiv c^m(a^m+b^m-c^m)A+a^m(b^m+c^m-a^m)B+b^m(a^m+c^m-b^m)C$$

Diese Punkte seien bezeichnet bezüglich mit $M_{m1}$, $M_{m2}$ und $M_{m3}$.

Setzen wir $q=-p$, ziehen wir also durch die Punkte $A_m$, $B_m$, $C_m$ Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks, so ergibt sich

$$1)\quad Y_1 \equiv a^m A+b^m B+c^m C$$
$$2)\quad Y_2 = b^m A+c^m B+a^m C$$
$$3)\quad Y_3 \equiv c^m A+a^m B+b^m C$$

Diese Punkte sind dann zu bezeichnen mtt $G_{m1}$, $G_{m2}$ und $G_{m3}$.

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Aurdrucke für einen Schnittpunkt dreier entsprechender Verbindungslinien der Punkte $A_m$, $B_m$, $C_m$ mit homologen Punkten auf den Seiten des Dreiecks $ABC$ zurück. Derselbe ist für den ersten Fall

$$Y_1 \equiv a^m(q^2b^m+p^2c^m-pqa^m)A+b^m(q^2c^m+p^2a^m-pqb^m)B$$
$$+c^m(q^2a^m+p^2b^m-pqc^m)C$$

Für den zweiten und dritten Fall sind die Ausdrücke von derselben Form, nur die Coordinaten erscheinen cyklisch um eine bzhw. zwei Stellen verschoben. Da aber diese Ausdrücke, falls man $m$ als constant betrachtet, eigentlich nur eine Unbekannte und diese in keiner höheren als in der zweiten Potenz enthalten, so erschliesst man daraus, dass alle in der angegebenen Weise für dasselbe $m$ erhaltenen Schnittpunkte auf Kegelschnitten liegen [1]), und dass man für dasselbe $m$ drei solche Kegelschnitte zu unterscheiden hat. Gibt man aber dem $m$ verschiedene Werte, so erhält man drei Scharen von Kegelschnitten.

Um nun noch Näheres über diese Kegelschnitte zu erfahren, transformiren wir die Coordinaten, indem wir das Dreieck $A_mB_mC_m$ als Coordinatendreieck betrachten. Das zu diesem Zwecke einzuschlagende Verfahren ist dasselbe, wie es bereits früher beobachtet wurde. Man entwickelt aus den Ausdrücken für $A_m$ etc. die Werte für $A$, $B$ und $C$ und setzt diese dann in die im ursprünglichen Coordinatensystem gegebenen Ausdrücke ein. Setzt man nun

1) Möbius, d. b. C. 1. Abschn. § 59.

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a^m, & c^m, & b^m \\ c^m, & b^m, & a^m \\ b^m, & a^m, & c^m \end{vmatrix} = a^m \alpha_m + c^m \beta_m + b^m \gamma_m$$

so wird

$$A \equiv \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m$$
$$B \equiv \beta_m A_m + \gamma_m B_m + \alpha_m C_m$$
$$C \equiv \gamma_m A_m + \alpha_m B_m + \beta_m C_m$$

Nun überzeugt man sich leicht, dass alle hier in Betracht kommenden Kegelschnitte dem entsprechenden Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind. Liegt nämlich ein Punkt auf einem Kegelschnitte, welcher einem Dreiecke umschrieben ist, so müssen die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ desselben, bezogen auf eben dieses Dreieck, der Gleichung genügen

$$\frac{f}{x_1} + \frac{g}{x_2} + \frac{h}{x_3} = 0 \;^{1)}$$

in welcher $f$, $g$ und $h$ Constante bezeichnen, deren Verhältniss durch zwei weitere Punkte, welche auf dem betreffenden Kegelschnitte liegen, bestimmt werden kann. Wir wählen zur Bestimmung desselben für den ersten Fall die Punkte $O_m$ und $O'_m$, für den zweiten die Punkte $O_m'$ und $G_{-m}$, für den dritten die Punkte $G_{-m}$ und $O_m$, von denen wir oben schon gesehen, dass sie jedesmal auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Zunächst sind nun die Ausdrücke für die Punkte $O_m$, $O'_m$ und $G_{-m}$ im neuen Coordinatensystem abzuleiten. Da nun im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O_m \equiv a^m c^m A + a^m b^m B + b^m c^m C$$

war, so erhält man nunmehr

$$O_m \equiv (a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m) B_m$$
$$+ (a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m) C_m$$

Dieser Ausdruck lässt sich nun mit Rücksicht auf die Determinante $\Delta_m$ umgestalten. Es ist nämlich auf Grund dieser Determinante

$$c^m \alpha_m + b_m \beta_m + a^m \gamma_m = 0$$

und

$$b^m \alpha_m + a^m \beta_m + c^m \gamma_m = 0$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen ergibt sich

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 250.

$$O_m \equiv (b^m c^m - a^{2m})\gamma_m A_m + (a^m c^m - b^{2m})\beta_m B_m + (a^m b^m - c^{2m})\alpha_m C_m$$

oder endlich

$$O_m \equiv \alpha_m \gamma_m A_m + \beta_m \gamma_m B_m + \alpha_m \beta_m C_m$$

Der Ausdruck für $O'_m$ war im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$O'_m \equiv a^m b^m A + b^m c^m B + a^m c^m C$$

Mithin erhält man nunmehr

$$O'_m \equiv (a^m b^m \alpha_m + b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m) A_m + (a^m b^m \beta_m + b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m) B_m$$
$$+ (a^m b^m \gamma_m + b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m) C_m$$

oder mit Rücksicht auf $\Delta_m$

$$O'_m \equiv (b^m c^m - a^{2m})\beta_m A_m + (a^m c^m - b^{2m})\alpha_m B_m + (a^m b^m - c^m)\gamma_m C_m$$

oder endlich

$$O'_m \equiv \alpha_m \beta_m A_\omega + \alpha_m \gamma_m B_m + \beta_m \gamma_m C_m$$

Für $G_{-m}$ schliesslich hatte man im ursprünglichen Coordinatensystem

$$G_{-m} = b^m c^m A + a^m c^m B + a^m b^m C$$

folglich erhält man nunmehr

$$G_{-m} \equiv (b^m c^m \alpha_m + a^m c^m \beta_m + a^m b^m \gamma_m) A_m + (b^m c^m \beta_m + a^m c^m \gamma_m + a^m b^m \alpha_m) B_m$$
$$+ (b^m c^m \gamma_m + a^m c^m \alpha_m + a^m b^m \beta_m) C_m$$

oder

$$G_{-m} \equiv (a^m b^m - c^{2m})\gamma_m A_m + (a^m b^m - c^{2m})\alpha_m B_m + (a^m e^m - b^{2m})\alpha_m C_m$$

oder endlich

$$G_{-m} \equiv \beta_m \gamma_m A_m + \beta_m \alpha_m B_m + \gamma_m \alpha_m C_m$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der Constanten $f$, $g$ und $h$ für die drei Kegelschnittschaaren über.

1) Es liegen auf jedem hieher gehörigen Kegelschnitte die Punkte $O_m$ und $O'_m$, mithin erhält man zur Bestimmung jener Constanten die beiden Gleichungen

$$\beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h = 0$$
$$\gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = (\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) : (\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) : (\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$

Gestaltet man die rechte Seite der Gleichung entsprechend um, so wird

$$f : g : h = a^m : b^m : c^m$$

2) Auf den hieher gehörigen Kegelschnitten liegen die Punkte $O'_m$ und $G_{-m}$, deshalb hat man:

$$\gamma_m f + \beta_m g + \alpha_m h = 0$$
$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$

Man erhält daraus

$$f : g : h = (\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) : (\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)$$

also

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

3) Es liegen auf den Kegelschnitten der dritten Schaar die Punkte $G_{-m}$ und $O_m$, deshalb hat man

$$\alpha_m f + \gamma_m g + \beta_m h = 0$$
$$\beta_m f + \alpha_m g + \gamma_m h = 0$$

woraus man zieht

$$f : g : h = (\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) : (\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) : (\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m)$$

oder umgestaltet

$$f : g : h = b^m : c^m : a^m$$

Dass nun in allen drei Fällen die betr. Schnittpunkte je dreier Geraden auf den so bestimmten Kegelschnitten liegen, ergibt sich in ähnlicher Weise, wie dies oben bezüglich der Punkte, welche auf dem Brocard'schen Kreise liegen, ausgeführt wurde.

1. Für die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt $A_m$ mit irgend einem Punkte auf $BC$, der diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, verbindet, hat man in Bezug auf $A_m B_m C_m$ als Coordinatendreieck

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 1, & 0, & 0 \\ p\beta_m + q\gamma_m, & p\gamma_m + q\alpha_m, & p\alpha_m + q\beta_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf $CA$ mit $B_m$ verbindet, hat man

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & 1, & 0 \\ p\gamma_m + q\alpha_m, & p\alpha_m + q\beta_m, & p\beta_m + q\gamma_m \end{vmatrix} = 0$$

d. i.

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden also hat man

$$x_1(p\beta_m + q\gamma_m) = x_2(p\alpha_m + q\beta_m) = x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)$$

Soll aber ein Punkt auf einem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung genügen

$$\frac{a^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

welchen Ausdruck man auch so gestalten kann

$$\frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_1(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_2(p\alpha_m + q\beta_m)} + \frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_3(p\gamma_m + q\alpha_m)} = 0$$

Da für den vorliegenden Fall die Divisoren dieser Quotienten gleich sind, so müsste nur von der Summe der Dividenden erwiesen werden, dass sie verschwindet. Dies ist aber in der Tat der Fall, da auf Grund der Determinante $\Delta_m$ sowol

$$p(a^m \beta_m' + b^m \alpha_m + c^m \gamma_m) = 0$$

als auch

$$q(a^m \gamma_m + b^m \beta_m + c^m \alpha_m) = 0$$

ist. Also liegen alle hieher gehörigen Schnittpunkte auf Kegelschnitten, welche den Dreiecken $A_m$, $B_m$, $C_m$ umschrieben sind.

2. Für die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ irgend eines Punktes auf der Geraden, welche den Punkt $A_m$ mit einem Punkte auf $CA$ verbindet, welcher diese Seite im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man in Bezug auf $A_m B_m C_m$:

$$x_2(p\beta_m + q\gamma_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden, welche den entsprechenden Punkt auf $AB$ mit $B_m$ verbindet, ergibt sich ferner

$$x_1(p\gamma_m + q\alpha_m) = x_3(p\alpha_m + q\beta_m)$$

Es muss aber für einen Punkt, welcher auf einem zur zweiten Reihe gehörigen Kegelschnitte liegen soll, die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

oder

$$\frac{c^m(p\gamma_m + q\alpha_m)}{x_1(p\gamma_m + qa^m)} + \frac{a^m(p\beta_m + q\gamma_m)}{x_2(p\beta_m + q\gamma_m)} + \frac{b^m(p\alpha_m + q\beta_m)}{x_5(p\alpha_m + q\beta_m)} = 0$$

Auch hier sind für die Schnittpunkte der in Betracht gezogenen Geraden die Divisoren gleich und die Summe der Dividenden auf Grund von $\Delta_m$ gleich null.

3. Für die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ irgend eines Punktes auf der Geraden; welche den Punkt $A_m$ mit einem Punkte auf der Geraden $AB$ verbindet, welcher diese Gerade im Verhältniss $q:p$ teilt, hat man

$$x_2(p\gamma_m+q\alpha_m) = x_3(p\beta_m+q\gamma_m)$$

Ebenso hat man für die Coordinaten eines Punktes auf der Geraden welche den entsprechenden Punkt auf $CA$ mit $C_m$ verbindet

$$x_1(p\alpha_m+q\beta_m) = x_2(p\gamma_m+q\alpha_m)$$

so dass auch in diesem Falle

$$\frac{b^m}{x_1}+\frac{c^m}{x_2}+\frac{a^m}{x_3} = 0$$

ist, wovon man sich in derselben Weise wie unter 1. oder 2. überzeugt.

Wir haben also in der Tat für jedes $m$ drei Kegelschnitte, welche alle drei dem Dreieck $A_m B_m C_m$ umschrieben sind, und von denen der erste und zweite ausserdem noch den Punkt $O'_m$, der erste und dritte den Punkt $O_m$, der zweite und dritte den Punkt $G_{-m}$ gemein haben.

Auf jedem dieser Kegelschnitte können wir nun noch drei merkwürdige Punkte unterscheiden, welche man erhält, wenn man einerseits $G_0$ mit $A_m B_m C_m$, anderseits die Punkte $G_m$ mit $A$, $B$, $C$ verbindet.

1. Verbindet man $G_0$ mit $A_m$ und $G_{m1}$ mit $A$, so schneiden sich diese beiden Geraden auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte; ebenso schneiden sich $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ und endlich $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ auf diesem Kegelschnitte.

Verbindet man nämlich $G_0$, dessen Coordinaten auch in Bezug auf das Dreieck $A_m B_m C_m$ wieder dieselben sind, wie in Bezug auf $ABC$, da er auch der Schwerpunkt des Dreiecks $A_m B_m C_m$ ist, mit $A_m(1, 0, 0)$, so wird (Formel 2)

$$\alpha_{12} = 0, \quad \beta_{12} = 1, \quad \gamma_{12} = -1$$

und wenn man ferner den Punkt

$$G_{m1} \equiv (a^m\alpha_m+b^m\beta_m+c^m\gamma_m)A_m+(a^m\beta_m+b^m\gamma_m+c^m\alpha_m)B_m$$
$$+(a^m\gamma_m+b^m\alpha_m+c^m\beta_m)C_m$$

mit

$$A = \alpha_m A_m + \beta_m B_m + \gamma_m C_m$$

verbindet, so wird

$$\alpha_{34} = b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) - c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$
$$\beta_{34} = b^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)$$
$$\gamma_{34} = b^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m)$$

Man hat mithin für die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ des Schnittpunktes der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$

$$x_1 : x_2 : x_3 = [b^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m)$$
$$+ b^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) - c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)]$$
$$: [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) - b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)] : [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m)$$
$$- b^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m)]$$

Auf Grund der Determinante $\Delta_m$ lassen sich diese Ausdrücke umgestalten, so dass man schliesslich hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-a^m) : (b^m + c^m) : (b^m + c^m)$$

Soll nun der Schnittpunkt der beiden Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m1} A$ auf dem der ersten Reihe angehörigen Kegelschnitte liegen, so muss man haben

$$\frac{a^m}{x_1} + \frac{b^m}{x_2} + \frac{c^m}{x_3} = 0$$

also

$$-\frac{a^m}{a^m} + \frac{b^m}{b^m + c^m} + \frac{c^m}{b^m + c^m} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Aus der Symmetrie der in Betracht gekommenen Ausdrücke kann man nun schliessen, dass auch die Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m1} B$ einerseits, sowie die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m1} C$ anderseits sich auf dem betr. Kegelschnitte schneiden, und man hat im zweiten Falle für die Coordinaten des Schnittpunktes

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + c^m) : (-b^m) : (a^m + c^m)$$

im letzten Falle aber

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + b^m) : (a^m + b^m) : (-c^m)$$

2. Verbindet man $G_0$ mit $B_m$ und $G_{m2}$ mit $C$, so schneiden sich beide Gerade auf dem Kegelschnitte, welcher der zweiten Reihe angehört, ebenso schneiden sich die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ und endlich die Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf diesem Kegelschnitte.

Man erhält, wenn man die Rechnung genau so wie unter 1. durchführt, für den Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m)$$
$$\beta_{34} = c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$
$$\gamma_{34} = c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)$$

Mithin wird

$$x_1 : x_2 : x_3 = [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] : -[c^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \gamma_m - \beta^2_m) + c^m(\gamma^2_m - \alpha_m \beta_m) + b^m(\beta_m \gamma_m - \alpha^2_m)] : [c^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)]$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : -a^m : b^m + c^m)$$

Da nun im vorliegenden Falle für einen Punkt, welcher auf dem betr. Kegelschnitte liegen soll, wie wir oben fanden, die Gleichung erfüllt sein muss

$$\frac{c^m}{x_1} + \frac{a^m}{x_2} + \frac{b^m}{x_3} = 0$$

so erkennt man, dass der Schnittpunkt der Geraden $G_0 B_m$ und $G_{m2} C$ auf diesem Kegelschnitte liegt. Es liegt aber auch der Schnittpunkt der Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m2} A$ auf demselben, da für die Coordinaten desselben die Gleichung besteht

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + c^m) : (a^m + c^m) : (-b^m)$$

und endlich liegt der Schnittpunkt der Geraden $G_0 A_m$ und $G_{m2} B$ auf demselben, da man für jenen hat

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-c^m) : (a^m + b^m) : (a^m + b^m)$$

3. Verbindet man $G_0$ mit $B_m$ und $G_{m3}$ mit $A$, so schneiden sich beide Gerade auf dem betr. Kegelschnitte, welcher der dritten Schaar angehört. Auf diesem schneiden sich aber auch die Geraden $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ einerseits und $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$ andrerseits. Man hat nämlich für den Schnittpunkt von $G_0 B_m$ mit $G_{m3} A$

$$\alpha_{12} = 1, \quad \beta_{12} = 0, \quad \gamma_{12} = -1$$

$$\alpha_{34} = a^m(\gamma^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$
$$\beta_{34} = a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)$$
$$\gamma_{34} = a^m(\beta^2_m - \alpha_m \gamma_m) + b^m(\gamma_m \beta_m - \alpha^2_m)$$

Es wird also

$$x_1 : x_2 : x_3 = [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)] : [a^m(\alpha_m \beta_m + \alpha_m \gamma_m - \beta^2_m - \gamma^2_m) + b^m(\alpha^2_m + \beta^2_m - \alpha_m \gamma_m - \beta_m \gamma_m)] : [a^m(\alpha^2_m - \beta_m \gamma_m) + b^m(\alpha_m \beta_m - \gamma^2_m)]$$

oder

$$x_1 : x_2 : x_3 = (a^m + b^m) : (-c^m) : (a^m + b^m)$$

Soll aber der Punkt auf dem Kegelschnitte liegen, so muss für den vorliegenden Fall die Gleichung erfüllt sein

$$\frac{b^m}{x_1} + \frac{c^m}{x_2} + \frac{a^m}{x_3} = 0$$

was offenbar der Fall ist.

Für den Schnittpunkt von $G_0 C_m$ und $G_{m3} B$ hat man

$$x_1 : x_2 : x_3 = (b^m + c^m) : (b^m + c^m) : (-a^m)$$

und für den Schnittpunkt von $G_0 A_m$ und $G_{m3} C$

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-b^m) : (a^m + c^m) : (a^m + c^m)$$

so dass also auch diese beiden Punkte auf dem betr. Kegelschnitte liegen.

Was nun die besondere Form der Kegelschnitte angeht, welche in den drei Fällen in der geschilderten Weise entstehen, so erhält man darüber Aufschluss, wenn man beachtet, dass ein Punkt im Unendlichen liegt, wenn dessen Coordinaten die Gleichung erfüllen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Die Summe der Coordinaten irgend eines Punktes, der auf einem der in Betracht kommenden Kegelschnitte liegt, ist aber in allen drei Fällen dargestellt durch den Ausdruck:

$$a^m(q^2 b^m + p^2 c^m - pqa^m) + b^m(q^2 c^m + p^2 a^m - pqb^m) \\ + c^m(q^2 a^m + p^2 b^m - pqc^m)$$

Unter Beachtung der obigen Bemerkung leitet man daraus leicht die ganz allgemein geltende Formel ab, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sei, je nachdem der Ausdruck

$$a^{2m} + b^{2m} + c^{2m} - 2(a^m b^m + a^m c^m + b^m c^m) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0$$

ist. Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass im allgemeinen für jedes $m$ je nach der Gestalt des Dreiecks alle möglichen Arten von Kegelschnitten auf die geschilderte Art entstehen können. Nur für $m = 1$ und für $m = 2$ sind die Kegelschnitte immer Ellipsen

Ist nämlich $m = 1$, so lautet der obige Ausdruck

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$$

dieser aber ist immer negativ. Man kann nämlich dafür auch setzen

$$(a - b)^2 - c(2a + 2b - c)$$

Nun ist aber $a - b < c$. Setzt man also dafür das grössere $c$, so wird die obige Differenz grösser, sie ist aber dann immer noch negativ, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe folgendermassen ordnet

$$-2c(a + b - c)$$

da ja $a + b - c$ immer positiv ist.

Ist ferner $m = 2$, so wird wieder der für die Form des Kegelschnitts massgebende Ausdruck

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) < 0$$

Bezeichnet nämlich $m_c$ die Mittellinie zur Seite $c$ des fraglichen Dreiecks, so wird

$$c^4 + (a^2 - b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) = c^4 + (b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - b^2)^2$$
$$- 2c^2(\tfrac{1}{2}c^2 + 2m_c^2) = c^2(c - 2b\cos\alpha)^2 - 4c^2m_c^2$$

Unterdrückt man den Factor $4c^2$, so ist der Ausdruck

$$\left(\frac{c}{2} - b\cos\alpha\right)^2 - m\frac{2}{c} < 0$$

denn es ist $\frac{c}{2} - b\cos\alpha$ die Kathete, $m_c$ aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

Hat man für $m = 2$ den Kegelschnitt im Auge, welcher der ersten Schaar angehört, so hätte es des vorstehenden Nachweises nicht bedurft, da für diesen Fall die Formel für den Kreis, deren allgemeine Giltigkeit erwiesen ist, zur Anwendung gelangt, und der fragliche Kegelschnitt mit dem Brocard'schen Kreise identisch ist. Ist $m > 2$ oder $m < 0$, so hängt die Gestalt der entsprechenden Kegelschnitte von dem Verhältnisse der Dreiecksseiten $a:b:c$ ab; so ist z. B. für das rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten im Verhältniss von $5:4:3$ stehen, und für $m = 4$ der Kegelschnitt in den drei Fällen eine Parabel. Es geht nämlich, wie noch bemerkt werden möge, aus der obigen für alle drei Schaaren geltenden Formel hervor, dass die Form des Kegelschnittes in allen drei Fällen für ein bestimmtes $m$ (vom Kreise abgesehen) die nämliche ist.

Was endlich die Mittelpunkte der im Vorhergehenden betrachteten Kegelschnitte angeht, so ist ganz allgemein der Ausdruck für einen derselben

$$Z \equiv f(g+h-f)A+g(f+h-g)B+h(f+g-h)C$$ [1]

falls die betr. Constanten des fraglichen Kegelschnittes $f$, $g$ und $h$ sind. Sind also die Mittelpunkte der ersten Schaar mit $Z_{m1}$, der zweiten mit $Z_{m2}$, der dritten mit $Z_{m3}$ bezeichnet, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(b^m+c^m-a^m)A_m+b^m(a^m+c^m-b^m)B_m+c^m(a^m+b^m-c^m)C_m$$
$$Z_{m2} \equiv c^m(a^m+b^m-c^m)A_m+a^m(b^m+c^m-a^m)B_m+b^m(a^m+c^m-b^m)C_m$$
$$Z_{m3} \equiv b^m(a^m+c^m-b_m)A_m+c^m(a^m+b^m-c^m)B_m+a^m(b_m+c^m-a^m)C_m$$

Um diese Punkte mit anderen vergleichen zu können, sollen dieselben auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurückgeführt werden, für welchen Fall für $A_m$, $B_m$, $C_m$ wieder ihre Werte in $A$, $B$, $C$ zu setzen sind. Führt man dieses aus und reducirt, so erhält man

$$Z_{m1} \equiv a^m(2b^mc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))A+b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))B$$
$$+c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m))C$$

$$Z_{m2} \equiv b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))A+c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m))B$$
$$+a^m(2b^mc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))C$$

$$Z_{m3} \equiv c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m))A+a^m(2b^mc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))B$$
$$+b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))C$$

Jeder dieser Punkte $Z$ liegt nun auf der betr. Geraden $GM$, also z. B. $Z_{m2}$ auf der Geraden $M_{m2}G_{m2}$. Da der Beweis dieser Behauptung in allen drei Fällen derselbe ist, soll er nur für die eben genannte Gerade geführt werden. Die Determinante (Formel 1) nimmt für diesen Fall die Form an

$$\begin{vmatrix} b^m, & c^m, & a^m \\ b^m(a^m+c^m-b^m), & c^m(a^m+b^m-c^m), & a^m(b^m+c^m-a^m) \\ b^m r & c^m s & a^m t \end{vmatrix}$$

worin $r$, $s$ und $t$ die betreffenden Factoren der Coordinaten von $Z_{m2}$ bezeichnen. Hebt man in dieser Determinante die den Colonnen gemeinsamen Factoren heraus, multiplicirt sodann die erste Reihe mit $a^m+b^m+c^m$ und subtrahirt dieselbe von der zweiten, so kann man unter Hinweglassung des Factors $-2a^m b^m c^m$ die Determinante so schreiben

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ b^m, & c^m, & a^m \\ r, & s, & t \end{vmatrix}$$

---

1) Möbius, d. b. C. 3. Abschn. § 267.

Wenn man nun die zweite Reihe mit $a^m+b^m+c^m$ multiplicirt und dieselbe zur dritten addirt, so werden die Glieder der letzten Reihe gleich, wie jene der ersten es sind, so dass also die Determinante verschwindet. Da nun, wie wir oben gesehen haben, die Punkte $M_m$ und $G_m$ auf den betr. Kegelschnitten liegen, die Geraden $M_m G_m$ also Sehnen derselben sind, so erkennt man nunmehr, da ja auch die Mittelpunkte der betr. Kegelschnitte auf diesen Geraden liegen, dass dieselben Durchmesser jener Curven bilden.

## IV.

Wir denken uns nun durch die Punkte $G$ Parallele zu den Seiten des Coordinatendreiecks gezogen. Die Schnittpunkte der Parallelen zu $AB$ seien bezeichnet mit $L'_m$ auf $BC$ und $J''_m$ auf $AC$, die der Parallelen zu $AC$ seien auf $BC: L''_m$ auf $AB: N'_m$, die der Parallelen zu $BC$ endlich seien auf $AC: J'_m$ und auf $AB: N''_m$. Da für jedes $m$ drei verschiedene $G$ zu unterscheiden sind, so ergeben sich achtzehn solcher Schnittpunkte, und es sind entsprechend den $G$ die $J$, $L$ und $N$ für jeden Fall noch mit den unteren Indices 1, 2 und 3 zu versehen. Unter Hinweglassung der unteren Indices $m$ erhalten wir dann für diese Schnittpunkte die folgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
1)\quad L_1' &\equiv (a^m+b^m)B+c^mC \\
L_1'' &\equiv b^mB+(a^m+c^m)C \\
J_1' &\equiv a^mA+(b^m+c^m)C \\
J_1'' &\equiv (a^m+b^m)A+c^mC \\
N_1' &\equiv (a^m+c^m)A+b^mB \\
N_1'' &\equiv a^mA+(b^m+c^m)B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad L_2' &\equiv (b^m+c^m)B+a^mC \\
L_2'' &\equiv c^mB+(a^m+b^m)C \\
J_2' &\equiv b^mA+(a^m+c^m)C \\
J_2''' &\equiv (b^m+c^m)A+a^mC \\
N_2' &\equiv (a^m+b^m)A+c^mB \\
N_2'' &\equiv b^mA+(a^m+c^m)B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3)\quad L_3' &\equiv (a^m+c^m)B+b^mC \\
L_3'' &\equiv a^mB+(b^m+c^m)C \\
J_3' &\equiv c^mA+(a^m+b^m)C \\
J_3'' &\equiv (a^m+c^m)A+b^mC \\
N_3' &\equiv (b^m+c^m)A+a^mB \\
N_3'' &\equiv c^mA+(a^m+b^m)B
\end{aligned}
$$

Was die Herleitung dieser Ausdrücke angeht, so ist dieselbe für die drei Gruppen die nämliche, sie möge daher nur für die zweite Gruppe durchgeführt werden. Wir hatten nämlich für $G_{m2}$ den Ausdruck

$$G_{m2} \equiv b^m A + c^m B + a^m C$$

Es hat also die durch diesen Punkt zu $AB$ gezogene Parallele die Gleichung [1])

$$(x_1 + x_2)a^m = x_3(b^m + c^m)$$

für den Schnitt dieser Geraden mit $BC$ hat man zudem noch

$$x_1 = 0$$

mithin wird der Schnittpunkt

$$L_2' \equiv (b^m + c^m)B + a^m C$$

Für den Schnitt der Parallelen mit $AC$ hat man noch

$$x_2 = 0$$

mithin erhält man für den Schnittpunkt

$$J_2'' \equiv (b^m + c^m)A + a^m C$$

Die durch $G_{m2}$ zu $AC$ gezogene Parallele hat die Gleichung

$$(x_1 + x_3)c^m = x_2(a^m + b^m)$$

für den Schnitt dieser mit $BC$ und $AB$ ist zudem

$$x_1 = 0 \quad \text{bzhw.} \quad x_3 = 0$$

mithin wird

$$L_2'' \equiv c^m B + (a^m + b^m)C$$

und

$$N_2' \equiv (a^m + b^m)A + c^m B$$

Die durch $G_{m2}$ zu $BC$ gezogene Parallele endlich hat die Gleichung

$$x_1(a^m + c^m) = (x_2 + x_3)b^m$$

und da für den Schnitt derselben mit $AC$ und $AB$ zudem

$$x_2 = 0 \quad \text{bzhw.} \quad x_3 = 0$$

ist, so erhält man

$$J_2' \equiv b^m A + (a^w + c^m)C$$

und

$$N_2'' \equiv b^m A + (a^m + c_m)B$$

Durch die sechs Punkte jeder der oben aufgestellten Gruppen lässt sich nun immer ein Kegelschnitt legen. Um dieses darzutun,

---

1) S. Programm des kgl. Gymn. zu Kempten v. J. 1889. I 5a S. 10.

transformiren wir die Coordinaten, indem wir für die erste Gruppe das Dreieck $L_1'J_1'N_1'$ als Coordinatendreieck betrachten. Nun war aber

$$L_1' \equiv (a^m + b^m)B + c^m C$$
$$J_1' \equiv a^m A + (b^m + c^m)C$$
$$N_1' \equiv (a^m + c^m)A + b^m B$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen $A$, $B$ und $C$, so erhält man

$$A \equiv -b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1'$$
$$B \equiv (b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1'$$
$$C \equiv a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1'$$

Setzt man diese Werte in die oben für $L_1''$, $J_1''$, $N_1''$ gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man

$$L_1'' \equiv b^m[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1']$$
$$+ (a^m + c^m)[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1'$$

oder nach vorgenommener Reduction

$$L_2'' \equiv b^m(a^m + c^m)L_1' + a^m(a^m + c^m)J_1' - a^{2m}N_1'$$

Ebenso erhält man für

$$J_1'' \equiv (a^m + b^m)[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1']$$
$$+ c^m[a^m b^m L_1' + (a^m + b^m)(a^m + c^m)J_1' - a^m(a^m + b^m)N_1']$$

oder reducirt

$$J_1'' = -b^{2m}L_1' + c^m(a^m + b^m)J_1' + b^m(a^m + b^m)N_1'$$

Endlich wird

$$N_1'' \equiv a^m[-b^m(b^m + c^m)L_1' + b^m c^m J_1' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)N_1']$$
$$+ (b^m + c^m)[(b^m + c^m)(a^m + c^m)L_1' - c^m(a^m + c^m)J_1' + a^m c^m N_1']$$

oder vereinfacht

$$N_1'' \equiv c^m(b^m + c^m)L_1' - c^{2m}J_1' + a^m(b^m + c^m)N_1'$$

Wir bestimmen nun, wie früher, durch die Punkte $L_1''$ und $J_1''$ die Constanten $f$, $g$ und $h$ des betr. Kegelschnitts. Man erhält zu diesem Behufe die beiden Gleichungen

$$-\frac{f}{a^{2m}} + \frac{g}{b^m(a^m + c^m)} + \frac{h}{a^m(a^m + c^m)} = 0$$

$$\frac{f}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{g}{b^{2m}} + \frac{h}{c^m(a^m + b^m)} = 0$$

wenn wir uns in den Ausdrücken für $L_1''$ und $J_1''$ die Glieder in der Reihenfolge $N_1'$, $L_1'$, $J_1'$ denken. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$f . g : h = a^m : b^m : c^m$$

Denkt man sich die Glieder von $N_1''$ ebenso geordnet, wie jene von $L_1''$ und $J_1''$, so erkennt man aus der Gleichung

$$\frac{a^m}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{b^m}{c_m(b^m + c^m)} + \frac{c^m}{c^{2m}} = 0$$

dass auch der Punkt $N_1''$ auf dem durch die fünf anderen Punkte bestimmten Kegelschnitte liegt.

Da nun die Coordinaten der Punkte der zweiten und dritten Gruppe ganz ähnlich gebildet sind, wie jene der ersten, so dürften wir wol daraus sofort den Schluss ziehen, dass auch die sechs Punkte der zweiten und dritten Gruppe immer auf einem Kegelschnitte liegen. Es soll indes wegen der Werte der Constanten $f$, $g$ und $h$ in Kürze für die zweite Gruppe dieser Beweis noch durchgeführt werden. Zunächst erhält man hier, ganz so wie oben, bei Transformation der Coordinaten auf das Dreieck $L_2'J_2'N_2'$ für $A$, $B$ und $C$ die Ausdrücke

$$A \equiv -c^m(a^m + c^m)L_2' + a^m c^m J_2' + (a^m + c^m)(b^m + c^m)N_2'$$
$$B \equiv (a^m + c^m)(a^m + b^m)L_2' - a^m(a^m + b^m)J_2' + a^m b^m N_2'$$
$$C \equiv b^m c^m L_2' + (a^m + b^m)(b^m + c^m)J_2' - b^m(b^m + c^m)N_2'$$

Des weiteren erhält man im neuen Coordinatensystem

$$L_2'' \equiv (a^m + b^m)c^m L_2' + (a^m + b^m)b^m J_2' - b^{2m}N_2'$$
$$J_2'' \equiv -c^{2m} L_2' + a^m(b^m + c^m)J_2' + c^m(b^m + c^m)N_2'$$
$$N_2'' \equiv a^m(a^m + c^m)L_2' - a^{2m} J_2' + b^m(a^m + c^m)N_2'$$

Benutzt man nun zur Bestimmung der Constanten $f$, $g$, $h$ die Punkte $L_2''$ und $J_2''$, indem man deren Ausdrücke in der Reihenfolge $L_2'$, $J_2'$, $N_2'$ nimmt, so erhält man

$$\frac{f}{c^m(a^m + b^m)} + \frac{g}{b^m(a^m + b^m)} - \frac{h}{b^{2m}} = 0$$

$$-\frac{f}{c^{2m}} + \frac{g}{a^m(b^m + c^m)} + \frac{h}{c^m(b^m + c^m)} = 0$$

Daraus wird

$$f : g : h = c^m : a^m : b^m$$

und man erhält endlich für den Punkt $N_2''$, nachdem dessen Ausdruck wie oben geordnet:

$$\frac{c^m}{a^m(a^m+c^m)} - \frac{a^m}{a^{2m}} + \frac{b^m}{b^m(a^m+c^m)} = 0$$

Für die dritte Kegelschnittschaar, für welche die vorhergehende Ableitung wiederkehren würde, möge nur noch bemerkt werden, dass man, falls man nach Transformation der Coordinaten die Ausdrücke in der Reihenfolge $J_3'$, $N_3'$, $L_3'$ nimmt, für die den Kegelschnitt bestimmenden Constanten erhält

$$f:g:h = b^m:c^m:a^m$$

Bestimmen wir nun die Mittelpunkte der drei soeben betrachteten Kegelschnittschaaren, welche einstweilen mit $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ bezeichnet werden mögen. Wir erhalten dafür im Coordinatensystem $L$, $J$, $N$ nach derselben Regel wie oben:

$$Q_1 \equiv a^m(b^m+c^m-a^m)N_1'+b^m(a^m+c^m-b^m)L_1'+c^m(a^m+b^m-c^m)J_1'$$

$$Q_2 \equiv c^m(a^m+b^m-c^m)L_2'+a^m(b^m+c^m-a^m)J_2'+b^m(a^m+c^m-b^m)N_2'$$

$$Q_2 \equiv b^m(a^m+c^m-b^m)J_3'+c^m(a^m+b^m-c^m)N_3'+a^m(b^m+c^m-a^m)L_3'$$

Geht man nunmehr auf das ursprüngliche Coordinatensystem zurück, indem man für $J$, $L$ und $N$ die oben für dieselben aufgestellten Werte in $A$, $B$, $C$ setzt, so erhält man nach durchgeführter Reduction die Ausdrücke

$$Q_1 \equiv a^m(2bc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))A+b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))B$$
$$+c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m))C$$

$$Q_2 \equiv b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))A+c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m))B$$
$$+a^m(2b^mc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))C$$

$$Q_3 \equiv c^m(2a^mb^m+c^m(a^m+b^m-c^m)A+a^m(2b^mc^m+a^m(b^m+c^m-a^m))B$$
$$+b^m(2a^mc^m+b^m(a^m+c^m-b^m))C$$

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit denjenigen, welche oben mit $Z$ bezeichnet wurden, so findet sich, dass dieselben bzhw. identisch sind, d. h. es sind immer zwei Kegelschnitte, welche in beiden Fällen zu derselben Schaar und zu demselben $m$ gehören, concentrisch. Zwei solche zusammengehörige Kegelschnitte sind aber auch ähnlich und in ähnlicher Lage. Dies ergibt sich daraus, dass die Mittelpunkte dreier den beiden Kegelschnitten gemeinsamer Sehnen von verschiedener Richtung zusammenfallen, und dass somit die zwischen die beiden Kegelschnitte fallenden Stücke dieser Sehnen gleich lang sind. Es soll dieses für zwei zusammengehörige Kegelschnitte der beiden ersten Schaaren dargetan werden. Es ist die Mitte der Sehne $J_1' N_1''$, welche die andere Curve in $A_m G_{m1}$ trifft, ausgedrückt durch

$$\tfrac{1}{2}[2a^m A + (b^m + c^m)B + (b^m + c^m)C]$$

dies ist aber, wie man sofort sieht, auch die Mitte von $A_m G_{m1}$. Ebenso erhält man sowol für die Mitte von $L_1'' N_1'$ als auch für jene von $B_m G_{m1}$ den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}[(a^m + c^m)A + 2b^m B + (a^m + c^m)C]$$

Endlich ergibt sich sowol für die Mitte von $L_1' M_1''$ als für die Mitte von $C_m G_{m1}$ der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}[(a^m + b^m)A + (a^m + b^m)B + 2c^m C]$$

Die nämlichen Betrachtungen aber führen bei den beiden anderen Kegelschnittschaaren zu denselben Resultaten.

Kempten (Bayern).

# XVI.

# Ueber das sphärische Polarsystem und seine Anwendung auf das Tetraeder.

Von

Dr. **Karl Theodor Meyer**

in Saarbrücken.

---

Im Raume nehmen wir einen festen Punkt $M$ an und ordnen jedem Punkte $P$ diejenige Ebene $\pi$ zu, welche normal zu der Geraden $\overline{PM}$ ist und diese in einem Punkte $Q$ so schneidet, dass das Product $PM.MQ$ einen constanten, positiven oder negativen Wert hat. Dann lässt sich zeigen, dass durch diese Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem von besonderer Art bestimmt ist[1]).

Legen wir nämlich durch den Punkt $P$ eine Ebene $\alpha$ und fällen auf dieselbe von $M$ aus die Normale, welche $\pi$ in $A$ und die Ebene $\alpha$ selbst in $B$ schneidet, dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AMQ$ und $PMB$, dass $AM.MB = PM.MQ$ ist, dass also die durch $P$ gehende Ebene $\alpha$ dem auf $\pi$ liegenden Punkte $A$ entspricht. Ist ferner $g$ eine beliebige Gerade durch $P$, und schneidet die Normalebene aus $M$ zu $g$ diese Gerade in einem Punkte $F$ und die Ebene $\pi$ in einer Geraden $g'$, deren Schnittpunkt mit $\overline{MF}$ $F'$ heissen möge, so sehen wir, dass jedem Punkte $G$ von $g$ die zu $\overline{GM}$ normale Ebene $\gamma$ von $g'$ entspricht, und dass $g(G)$ proj. $g'(\gamma)$ ist. Nennen wir

---

1) S. auch Reye, synth. Geom. der Kugeln. Leipzig 1879. S. 29.

noch $G'$ den Punkt von $g$, durch welchen die Ebene $\gamma$ geht, dann ist in dem Dreieck $GG'F'$ $\overline{G'M}$ Höhe zu der Seite $GF'$, folglich geht die dem Punkte $G'$ entsprechende Ebene $\gamma'$ auch durch $G$ und somit erkennen wir, dass die projectivische Beziehung zwischen $g(G)$ und $g'(\gamma)$ auch eine involutorische ist. Hiermit ist der Beweis für die Behauptung erbracht, dass die oben angegebene Zuordnung von Punkten und Ebenen ein räumliches Polarsystem bestimmt. Es besitzt — und dadurch wird es zu einem besondern — die charakteristische Eigenschaft, dass die Normalen aus den Punkten des Systems auf die entsprechenden Ebenen alle durch einen Punkt gehen, und von ihm so geteilt werden, dass das Product der entstandenen Abschnitte einen constanten Wert hat.

Nähert sich $P$ dem Punkte $M$, dann entfernt sich $\pi$ von letzterem Punkte und bei der Vereinigung von $P$ und $M$ wird $\pi$ zur unendlich fernen Ebene. $M$ ist also der Mittelpunkt des Systems, und folglich entspricht jeder durch $M$ gehenden Ebene der in normaler Richtung unendlich fern gelegene Punkt.

Die Ordnungsfläche des Systems ist nur dann reell und zwar eine Kugelfläche, wenn das constante Product, die Potenz des Systems, negativ ist, $M$ also die Strecke $PQ$ äusserlich teilt. Die Kugel hat $M$ zum Mittelpunkt und die Quadratwurzel aus dem absoluten Werte des Products zum Radius Wegen dieser Tatsache, dass die Ordnungsfläche des Systems eine reelle oder imaginäre Kugel ist, kann das Polarsystem ein sphärisches genannt werden.

Jedes Poltetraeder des Systems ist von besonderer Art, insofern sich in ihm die 4 Höhen schneiden und zwar im Mittelpunkt des Polarsystems. Diese Tetraeder sind entweder alle spitzwinklig, stumpfwinklig, oder alle rechtwinklig, je nachdem die Potenz des Systems positiv, negativ oder null ist [1]).

Bewegt sich in dem sphärischen Polarsystem $P$ auf einer Fläche II. O. $f$, dann durchläuft $\pi$ einen Ebenenbüschel II. O., dessen Einhüllungsfläche $f'$ von besonderer Art ist, je nach der Lage, die $M$ zu $f$ einnimmt. Liegt nämlich $M$ auf $f$, dann wird $f'$ von der unendlich fernen Ebene berührt, ist also ein elliptisches oder hyper-

---

1) Auch in diesem Falle kann man noch von einem sphärischen Polarsystem reden. Jedem Punkte $P$ entspricht die zu $\overline{PM}$ normale Ebene von $M$ und jede Ebene, die nicht durch M geht, hat letzteren Punkt zu ihrem Pol. Enthält eine Ebene den Punkt $M$, dann entspricht ihr jeder Punkt auf ihrer durch $M$ gehenden Normalen. Die Ordnungsfläche reducirt sich auf den Punkt $M$.

bolisches Paraboloid, je nachdem $f$ eine nicht geradlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. Ist $f$ eine Kegelfläche II. O., dann wird $f'$ zu einer Parabel, deren Ebene normal zu dem Kegelstrahl steht, auf welchem der Punkt $M$ liegt. — Nehmen wir zweitens $M$ innerhalb $f$ an und setzen diese Fläche zunächst als krummlinig voraus, dann ist $f'$ ein Ellipsoid. Ist aber $f'$ eine Regel- oder Kegelfläche II. O., dann wird $f'$ zu einem einschaligen Hyperboloid oder zu einer Ellipse. — Für den Fall endlich, dass $M$ ausserhalb $f$ liegt, erhalten wir für $f'$ ein zwei- oder einschaliges Hyperboloid, je nachdem $f$ eine krummlinige Fläche II. O. oder eine Regelfläche II. O. ist. $f'$ geht über in eine Hyperbel, falls $f$ eine Kegelfläche ist. Jeder Kugel $f$ entspricht in dem sphärischen Polarsystem eine Rotationsfläche II. O. $f'$, welche $M$ zu einem Brennpunkt und die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Mittelpunkte $O$ der Kugel zur Rotationsachse hat. Nimmt man daher eine Kugel als gegeben an und beachtet, dass in Bezug auf dieselbe das Product der Sehnen- und Secantenabschnitte des Punktes $M$ constant ist, so erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Legt man zu den Strahlen eines Punktes in ihren Schnitt-„punkten mit einer Kugelfläche die Normalebenen, so umhüllen diese „ein Rotationsellipsoid oder Rotationshyperboloid, je nachdem der „Punkt innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt [1]). Der Punkt ist „ein Brennpunkt der Rotationsfläche.“

— Die Tatsache, dass im sphärischen Polarsystem jeder Kugel eine Rotationsfläche II. O. entspricht, gibt uns ein Mittel an die Hand, um die Sätze der Kugel in einfacher Weise auf jene zu übertragen. So hat z. B. der Satz: „Durch 4 Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ist eine Kugel bestimmt“ — den folgenden zu seinem reciproken:

„Durch 4 Ebenen, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, „ist eine Rotationsfläche II. O. bestimmt, welche einen bestimmten „Punkt zu einem Brennpunkt hat.“

Wir verzichten darauf, andere Kugelsätze zu übertragen, da dies wenigstens teilweise schon von Salmon in seiner analytischen Geometrie des Raumes geschehen ist, allerdings nur unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die Ordnungsfläche des Systems reell ist. Weil einer Curve II. O. in dem sphärischen Polarsystem eine bestimmte Kegelfläche II. O. entspricht, (die supplementär ist

1) Liegt der Punkt auf der Kugelfläche, dann gehen die Normalebenen teils durch diesen Punkt, teils durch seinen Gegenpunkt auf der Kugel

zu der andern Kegelfläche, welche aus dem Punkte $M$ die Curve projicirt), so lassen sich auch zu den Sätzen über die Curven II. O. bestimmte reciproke über die Kegelflächen II. O. bilden. Es möge dies durch ein Beispiel gezeigt werden. Einem Brennpunkt $P$ der Curve II. O. $\lambda$ entspricht eine Ebene durch den Mittelpunkt $O$ der Kegelfläche, deren Strahlensystem aus der Geraden $\overline{OM}$ durch eine orthogonale Ebeneninvolution projicirt wird. Weil nun eine Curve II. O. 2 Brennpunkte hat, so ergibt sich der Satz:

„Zu jeder durch den Mittelpunkt einer Kegelfläche II. O. gelegten „Geraden gibt es zwei Ebenen von der Art, dass das Strahlensystem „einer jeden derselben aus der Geraden durch eine orthogonale „Ebeneninvolution projicirt wird."

Weil ferner die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte durch den Pol der unendlich fernen Geraden von $\lambda$ geht, so folgt weiter:

„Jene beiden Ebenen schneiden sich auf der Polarebene der „Geraden."

Man sieht leicht, wie mit Hülfe der Curve II. O. die Ebenen construirt werden können.

Auch auf diese Uebertragungen wollen wir hier nicht weiter eingehen, sondern uns nunmehr zu dem Tetraeder wenden, um von demselben mittelst des sphärischen Polarsystems eine Reihe von Sätzen abzuleiten, die noch nicht alle bekannt sein dürften.

## I. Das allgemeine Tetraeder.

Die Eckpunkte eines Tetraeders mögen mit $A$, $B$, $C$, $D$ und die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bezeichnet werden. Ferner seien in den bezüglich eines sphärischen Polarsystems reciproken Tetraeder $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ die den Eckpunkten des erstern entsprechenden Seiten und $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ die den Seiten des erstern entsprechenden Eckpunkte.

Ziehen wir nun im Tetraeder $ABCD$ die Höhe aus $A$ zu $\alpha$, so hat dieselbe im reciproken Tetraeder $A'B'C'D'$ als entsprechendes Element diejenige Gerade von $\alpha'$, durch welche die Normalebene des Punktes $M$[1]) zu der Geraden $\overline{MA'}$ geht. Da nämlich $A'$ der Ebene $\alpha$ entspricht, so ist die Gerade $\overline{MA'}$ normal zu $\alpha$, also parallel zu der Höhe durch $A$ und mithin auch normal zu der Ebene, welche

1) $M$ wie oben Mittelpunkt des Systems.

die jener Höhe entsprechende Gerade enthält. Da nun bei dem allgemeinen Tetraeder die 4 Höhen auf einer Regelschaar liegen, weil sie von den Normalen der Seitenflächen, welche durch die Höhenschnittpunkte der letzteren gehen, getroffen werden, so folgt:

„Legt man durch einen Punkt die Normalebenen zu seinen Ver-„bindungsgeraden mit den Eckpunkten eines Tetraeders, so schnei-„den dieselben die gegenüberliegenden Seiten in 4 Geraden einer „Regelschaar."

Diese 4 Geraden können in einem besondern Falle zu zwei Paaren in zwei Ebenen und in einem noch besonderen in einer Ebene liegen. Dies folgt daraus, dass die Höhen des Tetraeders mit 2 zu einander normalen Gegenkanten zwei Paare sich schneidender Geraden bilden, und dass die Höhen des Tetraeders mit 2 Paar normaler Gegenkanten alle durch einen Punkt, den Höhenschnittpunkt des Tetraders, gehen.

Da den Eckpunkten $A$ und $B$ des ersten Tetraeders die Seiten $\alpha'$, $\beta'$ des zweiten entsprechen, so entspricht dem unendlich fernen Punkte $P_\infty$ auf der Geraden $\overline{AB}$ diejenige (zu $\overline{AB}$) normale Ebene, welche $M$ mit der Geraden $\overline{\alpha'\beta'}$ verbindet. Weil ferner der Mittelpunkt $M_1$ der Kante $AB$ von dem unendlich fernen Punkte $P_\infty$ durch $A$ und $B$ harmonisch getrennt ist, so ist auch die entsprechende Ebene $\mu'$ harmonisch getrennt von $M$ durch $\alpha'$ und $\beta'$. Verbinden wir nun den Punkt $M_1$ mit der gegenüberliegenden Kante $CD$ durch eine Ebene — die Mittelebene der letztern Kante —, so entspricht derselben in dem reciproken Tetraeder der Punkt, in welchem $\mu'$ von der Kante $\overline{\gamma'\delta'}$ getroffen wird, und da bekanntlich die 6 Mittelebenen eines Tetraeders durch einen Punkt, den Schwerpunkt $S$ desselben, gehen, wobei sie sich 4 mal zu dreien in einer Geraden schneiden, so führt uns das sphärische Polarsystem zu folgendem Satze:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die durch die „Seiten derselben von einem festen Punkt $M$ harmonisch getrennte „Ebene und bringt sie zum Durchschnitt mit der gegenüberliegenden „Kante, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, welche 4 mal zu dreien „in einer Geraden liegen."

Die Ebene soll gemäss der Bezeichnungsweise bei dem entsprechenden Satze über das Dreieck die Harmonikalebene des Punktes $M$ genannt werden, und sie werde, weil sie dem Schwerpunkt $S$ entspricht, mit $s$ bezeichnet.

Durch reciproke Uebertragung des letzten Satzes erhalten wir weiter den folgenden:

„Bestimmt man auf jeder Kante eines Tetraeders den Punkt, „welcher durch die Eckpunkte von einer festen Ebene harmonisch ge- „trennt ist, und verbindet denselben mit der gegenüberliegenden „Kante, so erhält man 6 Ebenen eines Punktes, welche 4 mal zu „dreien durch eine Gerade gehen."

In diesem Satze ist auch der von dem Schnittpunkte der 6 Mittelebenen eines Tetraeders enthalten, und somit erkennen wir, wie uns das sphärische Polarsystem von einem nur für einen besondern Fall gültigen Satze sofort zu dem allgemein gültigen geführt hat.

Bewegen wir nun das Tetraeder $ABCD$ so lange im Raume bis sein Schwerpunkt $S$ mit dem Mittelpunkte $M$ des sphärischen Polarsystems zusammenfällt, dann rückt die Harmonikalebene $s$ des Punktes $M$ in Bezug auf das reciproke Tetraeder $A'B'C'D'$ in die unendliche Ferne, und folglich ist letzterer mit $S$ vereinigter Punkt auch Schwerpunkt des Tetraeders $A'B'C'D'$. Wir haben also für das sphärische Polarsystem den Satz:

„Fällt der Schwerpunkt eines Tetraeders mit dem Mittelpunkte „eines sphärischen Polarsystems zusammen, so vereinigt sich mit „letzterem Punkte auch der Schwerpunkt des reciproken Tetraeders."

Legt man also zu jeder Schwerlinie eines Tetraeders die Ebene, welche die Strecke zwischen dem Eckpunkte und dem Schwerpunkte in 2 Abschnitte von constantem Producte teilt, so erhält man ein zweites Tetraeder, welches mit dem ersteren den Schwerpunkt gemeinsam hat und zu ihm reciprok in Bezug auf ein sphärisches Polarsystem ist. Zugleich erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Die Normalebenen der Schwerlinien eines Tetraeders in „ihren zweiten Schnittpunkten mit der dem Tetraeder umgeschriebe- „nen Kugel bilden ein Tetraeder, welches mit dem ersten den „Schwerpunkt gemeinsam hat und zu ihm in Bezug auf ein sphäri- „sches Polarsystem reciprok ist."

Eine einfache Folgerung des Satzes von den 5 Mittelebenen eines Tetraeders ist auch der: Die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders werden durch den Schwerpunkt halbirt. Die reciproke Uebertragung dieses Satzes lautet:

„Legt man durch 2 Gegenkanten eines Tetraeders die durch „ihre Seiten von einem Punkte $M$ harmonisch getrennten Ebenen, so

„schneiden sich diese auf der Harmonikalebene des Punktes $M$ und „sind durch $M$ und diese Ebene harmonisch getrennt.“

Wir denken uns nun zu dem Tetraeder $ABCD$ die umgeschriebene Kugel mit dem Mittelpunkt $U$. Dann entsprechen den Punkten derselben die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Punkt $M$ zu einem Brennpunkt hat und auch die Seitenflächen des Tetraeders $A'B'C'D'$ berührt. Dem Mittelpunkt $U$ der Kugel entspricht eine Ebene $u$, welche die Polarebene des Punktes $M$ bezüglich der Rotationsfläche ist. Da sich nun in dem Punkte $U$ die normal zu den Kanten des Tetraeders $ABCD$ und zwar durch deren Mittelpunkt gelegten Ebenen schneiden, wobei sie viermal zu dreien durch eine Gerade gehen, so ergibt sich durch reciproke Uebertragung folgender Satz:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren „Seitenflächen durch einen Punkt $M$ harmonisch getrennte Ebene „und bringt diese zum Durchschnitt mit der Normale des Punktes „$M$ zu seiner Verbindungsebene mit der Kante, so erhält man 6 „Punkte einer Ebene, welche 4mal zu dreien auf einer Geraden „liegen.“

Diese Ebene ist die Polarebene des Punktes $M$ bezüglich derjenigen Rotationsfläche II. O., welche die Seiten des Tetraeders berührt und $M$ zu einem Brennpunkt hat.

Verbinden wir nun den Mittelpunkt $M_1$ der Kante $AB$ mit dem Mittelpunkte $M_2$ der gegenüberliegenden Kante $CD$, dann wird, wie bereits hervorgehoben, die Strecke $M_1M_2$ durch den Schwerpunkt $S$ halbirt. Ziehen wir daher durch $M_1$ die Parallele zu $CD$, und nennen wir $C_1$ und $D_1$ die Punkte, in welchen diese Parallele die Geraden $CS$ und $\overline{DS}$ trifft, dann ist $CS = SC_1$, $DS = SD_1$ und folglich $C_1D_1 = CD$. Ebenso geht die durch $M_2$ zu der Kante $AB$ gezogene Parallele durch die zu $A$ und $B$ bezüglich des Schwerpunktes symmetrisch gelegenen Punkte $A_1$ und $B_1$, und wir erkennen weiter, dass die durch die Mitte der vier übrigen Kanten zu ihren jedesmaligen Gegenkanten gezogenen Parallelen bzhw. die Punktepaare $C_1A_1$, $C_1B_1$, $D_1A_1$, $D_1B_1$ verbinden. Das Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$, welches durch jene 6 Gerade bestimmt ist, hat mit dem Tetraeder $ABCD$ die Mitten der Kanten und daher auch den Schwerpunkt gemeinsam; die Tetraeder liegen ferner zu einander perspectivisch und sind symmetrisch, aber nicht congruent Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

„Zieht man durch die Mitte jeder Kante eines Tetraeders die „Parallele zu der gegenüberliegenden Kante, so erhält man 6 Gerade,

„welche 4mal zu dreien durch einen Punkt gehen, also die Kanten „eines zweiten Tetraeders bilden. Dieses hat mit ersterem den „Schwerpunkt gemeinsam, liegt zu ihm perspectivisch und symmetrisch."

Den reciproken Satz wollen wir, wie folgt, aussprechen:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren „Seiten durch einen Punkt $M$ harmonisch getrennte Ebene und bringt „letztere zum Durchschnitt mit der Verbindungsebene des Punktes „$M$ mit der Gegenkante, so erhält man 6 Gerade, welche 4 mal zu „dreien in einer Ebene liegen, also die Kanten eines Tetraeders „bilden. — Beide Tetraeder haben dieselbe Harmonikalebene in Bezug „auf den Punkt $M$ und liegen so zu einander perspectivisch, dass „sich je 2 entsprechende Ebenen auf der Harmonikalebene schneiden „und von dieser und dem Punkte $M$ harmonisch getrennt sind."

Dieser Satz enthält wieder den vorhergehenden, aus welchem er abgeleitet wurde, als besonderen Fall.

Errichten wir nun zu den Kanten des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ in ihren Mittelpunkten $M_1$, $M_2$ . . . $M_6$ die Normalebenen, so gehen dieselben durch einen Punkt $H$, nämlich den Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ umgeschriebenen Kugel. Da nun die Kanten des Tetraeders $ABCD$ mit denen des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ parallel laufen und die Mittelpunkte gemeinsam haben, so können jene Ebenen auch aufgefasst werden als solche, welche durch die Mitte der Kanten des Tetraeders $ABCD$ normal zu den Gegenkanten gelegt sind, und somit ergibt sich sofort der Satz von Monge:

„Die Normalebenen aus den Mitten der Kanten eines Tetraeders „zu den Gegenkanten schneiden sich in einem Punkte, und zwar gehen „diese Ebenen viermal zu dreien durch eine Gerade."

Da $U$ der Mittelpunkt der dem Tetraeder $ABCD$, und $H$ der Mittelpunkt der dem Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ umgeschriebenen Kugel ist, so sind $U$ und $H$ entsprechende Punkte in den beiden bezüglich des gemeinsamen Schwerpunktes $S$ symmetrisch gelegenen Tetraedern. Folglich ergibt sich weiter die Beziehung:

„In jedem Tetraeder liegt der Schwerpunkt $S$, der Mittelpunkt „$U$ der umgeschriebenen Kugel und derjenige Punkt $H$ in einer „Geraden, in welchem die Normalebenen aus den Mitten der Kanten „zu den Gegenkanten sich schneiden. Die Strecke $UH$ wird durch „den Punkt $S$ halbirt."

Der Satz von Monge lautet in seiner reciproken Uebertragung:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders die von ihren „Seiten durch einen festen Punkt $M$ harmonisch getrennte Ebene

„und bringt letztere zum Durchschnitt mit der Normalen des Punktes
„$M$ zu seiner Verbindungsebene mit der Gegenkante, so erhält man
„6 Punkte einer Ebene, die 4 mal zu dreien auf einer Geraden liegen.“

Aus dem vorletzten Satze folgt weiter, dass für jedes Tetraeder die Ebenen $s$, $u$ und $h$ durch eine Gerade gehen und dass $s$ von $u$ und $h$ durch $M$ harmonisch getrennt ist.

Während es nur eine Kugel gibt, welche durch die Ecken eines Tetraeders geht, gibt es deren 8, welche die Seiten des Tetraeders berühren. Zu dieser Erkenntuiss führt uns folgende Ueberlegung. Ist $J$ der Mittelpunkt einer die Seitenflächen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des Tetraeders berührenden Kugel, dann hat dieser Punkt von den Ebenen gleiche Entfernung, liegt also auf der Halbirungsebene der von den Ebenen gebildeten Winkel. In dem Punkte $A$ stossen die Ebenen $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zusammen nud die Winkel, welche 2 von diesen Ebenen, etwa $\beta$ und $\gamma$ bilden, werden durch 2 zu einander normale, durch die Kante $AD$ gehende Ebenen halbirt; ebenso haben die Winkel, welche $\gamma$ und $\delta$ miteinander bilden, zwei zu einander normale durch die Kante $AB$ gehende Halbirungsebenen. Diese 4 Halbirungsebenen schneiden sich ausser in den Kanten $AD$ und $AB$ noch in 4 andern durch $A$ gehenden Geraden. Jeder Punkt derselben ist von den Ebenen $\beta$, $\gamma$, $\delta$ gleichweit entfernt, also gehen auch die Halbirungsebenen der Winkel, welche $\beta$ und $\delta$ miteinander bilden, durch die 4te Gerade. Diejenigen Punkte dieser Geraden nun, welche von der vierten Ebene $\alpha$ des Tetraeders ebenso weit entfernt sind als von $\beta$, $\gamma$, $\delta$, liegen offenbar auf den beiden Halbirungsebenen der von $\alpha$ mit einer der übrigen Ebenen gebildeten Winkel. Wir erhalten also $4 . 2$ oder 8 Punkte, welche von den Ebenen gleichweit entfernt sind, also die Mittelpunkte der die Seitenflächen berührenden Kugeln sind. Zugleich sehen wir, dass diese Punkte 16 mal zu zweien mit einer Ecke in einer Geraden und 12 mal zu vieren mit einer Kante in einer Ebene liegen.

Bilden wir nun die reciproke Beziehung, so erhalten wir den Satz:

„Es gibt 8 Rotationsflächen II. O., welche durch 4 Punkte gehen
„und einen andern fünften Punkt zu einem Brennpunkt haben. Die
„8 Polarebenen des Brennpunktes schneiden sich 16 mal zu zweien
„auf einer Seitenfläche des von den 4 Punkten gebildeten Tetraeders
„und gehen 12 mal zu vieren durch einen Punkt auf einer Kante
„des Tetraeders.“

## II. Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt.

Wir haben bei der allgemeinen Betrachtnug über das sphärische Polarsystem bereits erwähnt, dass die Poltetraeder dieses Systems

solche sind, in welchen die 4 Höhen durch einen Punkt gehen. Umgekehrt können wir jedes Tetraeder $ABCD$ mit einem Höhenschnittpunkte $H$ zu einem Poltetraeder eines sphärischen Polarsystems machen, wenn wir nur bestimmen, dass $H$ der Mittelpunkt des Systems und das constante Product der Höhenabschnitte die Potenz desselben sein soll. Alsdann ist es möglich, in einfacher Weise zu den bisher bekannten Sätzen [1]) über das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt noch andere interessante abzuleiten, die gleich den früher bekannten recht deutlich die Analogie dieses räumlichen Gebildes mit dem Dreieck hervortreten lassen.

Indem wir nun beachten, dass den Eckpunkten $ABCD$ des Tetraeders mit dem Höhenschnittpunkt $H$ in dem sphärischen Polarsystem die ihnen gegenüberliegenden Seiten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ entsprechen, erkennen wir sofort die Richtigkeit der folgenden Sätze:

„Durchschneidet man die Kanten eines Tetraeders mit Höhen- „schnittpunkt durch eine Ebene $\pi$ in 6 Punkten und fällt zu jeder „Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Höhenschnittpunkt $H$ „aus der gegenüberliegenden Kante die Normalebene, so erhält man „6 Ebenen, welche durch einen Punkt $P$ gehen, der auf der Normalen „von $H$ zu $\pi$ liegt. Ist $Q$ der Schnittpunkt dieser Normalen mit $\pi$, „dann ist $QH.HP$ gleich dem constanten Product der Höhenabschnitte „des Tetraeders."

„Verbindet man einen Punkt mit den Kanten eines Tetraeders „mit Höhenschnittpunkt durch Ebenen und fällt zu denselben aus dem „Höhenschnittpunkt $H$ die Normalen, so treffen diese die jedesma- „ligen gegenüberliegenden Kanten in 6 Punkten einer Ebene $\pi$, welche „normal zu der Geraden $\overline{PH}$ liegt. Ist $Q$ der Schnittpunkt dieser „Normalen mit $\pi$, dann ist $PH.HQ$ gleich dem constanten Product „der Höhenabschnitte des Tetraeders."

„Verbindet man eine Gerade $g$ mit den 4 Eckpunkten eines „Tetraeders mit Höhenschnittpunkt und fällt auf diese Ebenen vom „Höhenschnittpunkt $H$ aus die Normalen, so treffen dieselben die „gegenüberliegenden Seiten in 4 Punkten einer zu $g$ normal gelegenen „Geraden $g'$. Die kürzeste Entfernung dieser beiden Geraden wird „durch $H$ in zwei Abschnitte geteilt, deren Product gleich dem con- „stanten Product der Höhenabschnitte ist"

1) Am eingehendsten scheint bis jetzt Vogt in einer interessanten wissenschaftlichen Beilage zum Programm des Friedrichs-Gymnasiums in Breslau vom Jahre 1881 das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt untersucht zu haben.

Dem Mittelpunkte $M_1$ der Kante $AB$ entspricht diejenige Ebene $\mu_1$ durch die gegenüberliegende Kante $CD$, welche normal zu der Geraden $\overline{M_1 H}$ ist. Ferner hat der unendlich ferne Punkt $P_\infty$ auf der Geraden $\overline{AB}$ diejenige Ebene $\pi$ zu seinem entsprechenden Element, welche $H$ mit $\overline{CD}$ verbindet. Da nun aber $M_1$ von $P_\infty$ durch die Eckpunkte $A$ und $B$ harmonisch getrennt ist, so sind auch die Ebenen $\mu_1$ und $\pi$ harmonisch getrennt von den Seiten $\alpha$ und $\beta$. Wir haben also den Satz:

„Ist in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt letzterer Punkt „mit der Mitte einer Kante durch eine Gerade verbunden und legt „man zu derselben aus der gegenüberliegenden Kante die Normal-„ebene, dann ist diese harmonisch getrennt von dem Höhenschnitt-„punkt durch die Seitenflächen der letzteren Kante."

Oder:

„Legt man durch eine Kante eines Tetraeders mit Höhenschnitt-„punkt die von diesem Punkte durch die Seiten der Kante harmo-„nisch getrennte Ebene, so trifft die Normale derselben aus dem „Höhenschnittpunkt die gegenüberliegende Kante in ihrer Mitte."

Legen wir ferner durch eine Kante die Mittelebene, d. h. die Ebene, welche diese Kante mit der Mitte der Gegenkante verbindet, dann ist die von dieser Ebene durch die beiden Seitenflächen der Kante harmonisch getrennte Ebene parallel mit der Gegenkante, und es trifft die Normale aus dem Höhenschnittpunkt $H$ zu letzterer Ebene die gegenüberliegende Kante in ihrem Höhenfusspunkt. Daraus folgt nun der Satz:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt trifft die Normale „aus diesem Punkte zu einer Mittelebene die gegenüberliegende „Kante in einem Punkte, welcher von den Eckpunktenderselben durch „ihren Höhenfusspunkt harmonisch getrennt ist."

Bestimmen wir nun auf jeder Kante den Punkt, welcher von den Eckpunkten durch ihren Höhenfusspunkt, oder, was dasselbe ist, welcher von den Seitenflächen der Gegenkante durch den Höhenschnittpunkt des Tetraeders harmonisch getrennt ist, so erhält man 6 Punkte einer Ebene, nämlich der Harmonikalebene des Höhenschnittpunktes. Da ferner diese Ebene in dem Polarsystem dem Schwerpunkt $S$ des Tetraeders entspricht, so folgt:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt steht die Harmonikal-„ebene des Höhenschnittpunkts $H$ normal zu der Verbindungsgeraden „dieses Punktes mit dem Schwerpunkt $S$. Heisst $Q$ der Schnittpunkt

„von $\overline{SH}$ mit der Harmonikalebene, dann ist das Product $SH.HQ$ „gleich dem Product der Höhenabschnitte des Tetraeders."

Den Höhenfusspunkten der Kanten entsprechen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche parallel zu den ersten Kanten laufen, und die Mittelpunkte der Kanten haben zu ihren entsprechenden Elementen diejenigen Ebenen durch die Gegenkanten, welche durch die Seitenflächen derselben durch den Höhenschnittpunkt harmonisch getrennt sind. Da nun in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt die Mittelpunkte der Kanten und folglich auch die Höhenfusspunkte derselben auf einer Kugel liegen, welche den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, so folgt:

„Legt man durch jede Kante eines Tetraeders mit Höhenschnitt- „punkt

„1) die Parallelebene zur Gegenkante,

„2) die von den Seitenflächen der Kante durch den Höhen- „schnittpunkt harmonisch getrennte Ebene, so erhält man 12 Ebenen, „welche von einer Rotationsfläche II. O. berührt werden, die den „Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt und die Harmonikalebene „desselben zu der zugehörigen Leitebene hat."

Die Punkte, in welchen die Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O. von ihrer Normalen aus einem Brennpunkt getroffen werden, liegen auf einer Kugel, welche mit der Fläche den Mittelpunkt gemeinsam hat. Da nun in unserm Falle die Ebenen der ersteren Art von ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt in den Höhenfusspunkten der Kanten getroffen werden, so liegen auf der durch diese und die Mittelpunkte der Kanten gehenden Kugel auch die Schnittpunkte der Ebenen zweiter Art mit ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt. Indem wir noch vorausschicken, was gleich bewiesen werden soll, dass der Höhenschnittpunkt des Tetraeders zu dem Mittelpunkt $U$ der umgeschriebenen Kugel bezüglich des Schwerpunktes $S$ symmetrisch liegt, so können wir nun folgenden Zusatz zu dem letzten Satze bilden:

„Die Rotationsfläche hat den Schwerpunkt des Tetraeders zum „Mittelpunkt und den Höhenschnittpunkt und den Mittelpunkt der „umgeschriebenen Kugel zu Brennpunkten."

Ferner erkennen wir die Richtigkeit des folgenden Satzes:

„In einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt liegen die Punkte, „in welchen die Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunktes mit „den Mitten der Kanten von ihren Normalebenen aus den jedes- „maligen gegenüberliegenden Kanten getroffen werden, auf derselben

„Kugel, welche auch durch die Mitten der Kanten und die Höhen-„fusspunkte derselben geht."

Nach dem im ersten Abschnitt (S. 370) dargelegten Satze von Monge liegt in jedem Tetraeder bezüglich des Schwerpunktes $S$ der Mittelpunkt $U$ der umgeschriebenen Kugel zu demjenigen Punkte $H$ symmetrisch, durch welchen die aus den Mitten der Kanten normal zu den Gegenkanten gelegten Ebenen gehen. Weil nun aber bei einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt je 2 Gegenkanten zu einander normal sind, so enthält die Ebene, welche normal zu der einen Kante durch die Mitte der Gegenkante gelegt wird, die letztere Kante ganz, und somit erkennen wir, dass bei diesem besonderen Tetraeder der Punkt $H$ identisch ist mit dem Höhenschnittpunkt. Es ist also jetzt gezeigt, was wir vorhin als erwiesen annahmen, dass in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt die Strecke zwischen diesem Punkte und dem Mittelpunkte der umgeschriebenen Kuge durch den Schwerpunkt halbirt wird.

Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte seien mit $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ bezeichnet. Dann ist das Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ mit dem Tetraeder $ABCD$ ähnlich und ähnlich liegend in Bezug auf $H$ als äusseren Aehnlichkeitspunkt. Denn je zwei entsprechende Kanten z. B. $A_2B_2$ und $AB$ sind zu einander parallel und stehen in dem Verhältniss 1 : 2. Der Mittelpunkt $U_2$ der dem Tetraeder $A_2B_2C_2D_2$ umgeschriebenen Kugel ist der Mittelpunkt der Strecke $UH$, also identisch mit dem Schwerpunkt $S$ des Tetraeders $ABCD$. Folglich gilt der Satz[1]):

„Die Kugel, welche durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte „eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt geht, hat den Schwerpunkt „des Tetraeders zum Mittelpunkt und ihr Radius ist gleich der „Hälfte von dem Radius der umgeschriebenen Kugel."

Da nun in dem sphärischen Polarsystem dem Mittelpunkt eines oberen Höhenabschnittes die zu dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch gelegene Ebene entspricht, so gilt der Satz: Legt man zu jeder Seite eines Tetraeders mit Höhenschnittpunkt diejenige Parallelebene, welche mit dem Höhenschnittpunkt bezüglich der zugehörigen Seitenfläche symmetrisch liegt, so erhält man 4 Berührungsebenen einer Rotationsfläche II. O., welche den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt und dessen Harmonikalebene zur Directrixebene hat.

---

1) Vgl. auch Vogt § 8.

Wir benutzen nun noch folgenden Satz und verweisen bezüglich seiner Ableitung auf § 10 der erwähnten Arbeit von Vogt:

„In jedem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt liegen die Schwer- „punkte und die Höhenschnittpunkte der Seitenflächen auf einer „Kugel, deren Mittelpunkt $F$ auf der Verbindungsgeraden der Punkte „$H$ und $U$ liegt."

Von diesem Satze führt uns das sphärische Polarsystem sofort zu folgendem:

„Legt man durch die Ecken eines Tetraeders mit Höhenschnitt- „punkt die Parallelebenen zu den gegenüberliegenden Seitenflächen „und die Normalebenen zu den Verbindungsgeraden des Höhenschnitt- „punktes mit den Schwerpunkten auf den gegenüberliegenden Seiten- „flächen, so erhält man 8 Ebenen, welche eine Rotationsfläche II. O. „berühren, die den Höhenschnittpunkt zu einem Brennpunkt hat, und „deren Mittelpunkt auf der Geraden $\overline{HU}$ liegt.

Da nun diese Ebenen von ihren Normalen aus dem Höhenschnittpunkt in den Punkten einer Kugel getroffen werden, und 4 von diesen Punkten die Eckpunkte des Tetraeders sind, so folgt weiter:

„Verbindet man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt den „Schwerpunkt einer Seitenfläche mit dem Höhenschnittpunkt des Te- „traeders durch eine Gerade, so wird dieselbe von ihrer Normal- „ebene aus dem gegenüberliegenden Eckpunkte in einem Punkte der „dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel getroffen."

Ist in einem sphärischen Polarsystem ein Tetraeder mit dem Höhenschnittpunkt $H$ gegeben, und fällt letzterer Punkt nicht mit dem Mittelpunkt $M$ des Systems zusammen, dann ist das reciproke Tetraeder nur dann von derselben Art, falls $M$ auf einer Höhe des ersten Tetraeders liegt. Ist z. B. $M$ ein Punkt der Höhe $\overline{AH}$, dann entspricht der Kante $AB$ in dem reciproken Tetraeder eine Kante $A'B'$, welche normal zu der Ebene $\overline{ABH}$, also parallel mit der Kante $CD$ ist. Die letzterer Kante in dem reciproken Tetraeder entsprechende Kante $C'D'$ ist normal zu $CD$, also auch zu $A'B'$. Ebenso erkennt man, dass auch die Kanten $A'C'$ und $B'D'$ zu einander normal sind. Das Tetraeder $A'B'C'D'$ hat also 2 Paare zu einander normaler Gegenkanten, folglich schneiden sich seine Höhen in einem Punkte $H'$. Zugleich überzeugen wir uns von der Richtigkeit des folgenden Satzes:

„Nimmt man in einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt auf einer „Höhe desselben einen Punkt $M$ an und legt zu den Verbindungs- „geraden dieses Punktes mit den Eckpunkten des Tetraeders in ihren „zweiten Schnittpunkten mit der umgeschriebenen Kugel die Normal- „ebenen, so erhält man ein Tetrader, dessen Höhen durch einen „Punkt gehen, der auf der gemeinsamen Höhe beider Tetraeder liegt.“

Aber auch dann, wenn $M$ nicht auf einer Höhe des Tetraeders $ABCD$ liegt, ist das reciproke Tetraeder $A'B'C'D'$ noch von besonderer Art. Wir unterlassen es, seine Eigenschaften hier näher anzugeben; dieselben ergeben sich wieder am einfachsten durch reciproke Uebertragung derjenigen des Tetraeders mit Höhenschnittpunkt.

## XVII.

# Anwendung des Taylor'schen Satzes zur Rectification der Ellipse und zur Complanation des Ellipsoids.

Von

Herrn **C. Benz,**

Lehrer in Luckenwalde.

---

Bezeichnet $aE(\varepsilon, \varphi)$ einen Ellipsenbogen, $a$ die halbe grosse Achse, $\varepsilon$ die numerische Excentricität, $\varphi$ den Winkel des Bogens, von der kleinen Achse an gerechnet, so ist

$$\text{I)}\quad aE(\varepsilon,\varphi) = a\left\{\varphi - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5!}\varphi^5 - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7!}\varphi^7 + \frac{(64\varepsilon^2 - 1008\varepsilon^4 + 2520\varepsilon^6 - 1575\varepsilon^8)}{9!}\varphi^9 - \frac{(256\varepsilon^2 - 16320\varepsilon^4 + 105840\varepsilon^6 - 189000\varepsilon^8 + 99225\varepsilon^{10})}{11!}\varphi^{11} + \dots\right\}$$

Nach dem Taylor'schen Satze ist nämlich, wenn wir $E(\varepsilon, \varphi)$ kurz mit $F_{(\varphi)}$ und die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von $F_{(\varphi)}$ nach $\varphi$ bezüglich mit $F_{(\varphi)}^{I}$, $F_{(\varphi)}^{II}$, $F_{(\varphi)}^{III}$ u. s. w. bezeichnen,

$$F_{(\varphi)} = F_{(\varphi=0)} + (F_{(\varphi=0)}^{I}).\varphi + \frac{(F_{(\varphi=0)}^{II})}{1.2}\varphi^2 + \frac{(F_{(\varphi=0)}^{III})}{1.2.3}\varphi^3 + \dots$$

Aus der Gleichung der Ellipse

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = b\cos\varphi$$

folgt nun

$$aE(\varepsilon, \varphi) = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

also

$$E(\varepsilon, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

folglich

$$F_{(\varphi=0)} = 0$$

ferner

$$F_{(\varphi)}{}^{I} = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{I} = 0$$

$$F_{(\varphi)}{}^{II} = -\frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{II} = 0$$

$$F_{(\varphi)}{}^{III} = -\frac{\varepsilon^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{III} = -\varepsilon^2$$

$$F_{(\varphi)}{}^{IV} = \frac{4\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3\varepsilon^4 (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{3\varepsilon^6 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{IV} = 0$$

$$F_{(\varphi)}{}^{V} = \frac{4\varepsilon^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{22\varepsilon^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 3\varepsilon^4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{18\varepsilon^6 (\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{15\varepsilon^4 \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{V} = 4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4$$

$$F_{(\varphi)}{}^{VI} = -\frac{16\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{60\varepsilon^4 (\sin \varphi \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{210\,\varepsilon^6 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi - 45\,\varepsilon^6 (\sin \varphi \cos^5 \varphi + \sin^5 \varphi \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{150\,\varepsilon^8 (\sin^3 \varphi \cos^5 \varphi - \sin^5 \varphi \cos^3 \varphi)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{7}{2}}}$$

$$- \frac{105\,\varepsilon^{10} \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{9}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}{}^{VI} = 0$$

$$F_{(\varphi)}^{VII} = -\frac{16\,\varepsilon^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{60\,\varepsilon^4(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cos^2\varphi) - 16\,\varepsilon^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{1035\varepsilon^6(\sin^2\varphi\cos^4\varphi - \sin^4\varphi\cos^2\varphi) - 45\varepsilon^6(\cos^6\varphi - \sin^6\varphi)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\frac{2550\varepsilon^8\sin^4\varphi\cos^4\varphi - 675\varepsilon^8(\sin^2\varphi\cos^6\varphi + \sin^6\varphi\cos^2\varphi)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{7}{2}}}$$

$$-\frac{1050\varepsilon^{10}(\sin^4\varphi\cos^6\varphi - \sin^6\varphi\cos^4\varphi) - 525\varepsilon^{10}(\sin^4\varphi\cos^6 - \sin^6\varphi\cos^4\varphi)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{9}{2}}}$$

$$-\frac{945\,\varepsilon^{12}\sin^6\varphi\cos^6\varphi\cos^6\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{11}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}^{VII} = -16\varepsilon^2 + 60\varepsilon^4 - 45\varepsilon^6$$

und abgekürzt:

$$F_{(\varphi)}^{VIII} = \frac{64\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1008\varepsilon^4\sin\varphi\cos^3\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{2520\varepsilon^6\sin\varphi\cos^5\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1575\varepsilon^8\sin\varphi\cos^7\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{7}{2}}}, \qquad F_{(\varphi=0)}^{VIII} = 0$$

$$F_{(\varphi=0)}^{IX} = 64\varepsilon^2 - 1008\varepsilon^4 + 2520\varepsilon^6 - 1575\varepsilon^8$$

$$F_{(\varphi=0)}^{XI} = -256\varepsilon^2 + 16320\varepsilon^4 - 105840\varepsilon^6 - 189000\varepsilon^8 + 99225\varepsilon^{10}$$

u. s. w.

Setzt man die Werte von $F_{(\varphi=0)}$, $F_{(\varphi=0)}^{I}$, $F_{(\varphi=0)}^{II}$ u. s. w. in die Taylor'sche Reihe für $aE(\varepsilon, \varphi) = aF_{(\varphi)}$ ein, so erhält man die oben angegebene Reihe I).

Für den Ellipsenquadranten erhält man

$$\text{II)} \quad aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) = a\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{(4\varepsilon^2 - 3\varepsilon^4)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{(16\varepsilon^2 - 60\varepsilon^4 + 45\varepsilon^6)}{7!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \ldots\right\}$$

und für den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\text{III)} \quad aE\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = a\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} + \ldots\right\}$$

$$= a\sin\frac{\pi}{2} = a$$

Aus den 5 ersten Gliedern der Reihe III) erhält man $a = 1{,}0000036\,a$, aus den 6 ersten $a = 0{,}9999999\,a$.

Da $E(\varepsilon, \varphi)$ eine stetige Function von $\varepsilon$ und $\varphi$ ist, und Reihe I) für die grössten und kleinsten Werte von $E(\varepsilon, \varphi)$ convergirt, so muss sie auch für alle dazwischen liegenden Werte convergiren.

Anmerkung. Den directen Beweis für die Convergenz der Reihe I) vermag Verfasser nicht zu erbringen. Ebenso ist es dem Verfasser nicht gelungen, in $A_n$ für den grössten Coefficienten der bezüglichen Potenz von $\varepsilon$ eine allgemeine Formel behufs Herleitung der Convergenz zu finden.

Um bei solchen Werten von $\varepsilon$, welche sehr nahe bei 1 liegen, bei der Summirung der ersten Glieder eine grössere Genauigkeit für den Näherungswert zu erhalten, addire man in Reihe I) $\sin\varphi$ und subtrahire die Sinusreihe; man erhält dann

$$\text{IV)}\quad aE(\varepsilon, \varphi) = a\left\{\sin\varphi + \frac{(1-\varepsilon^2)}{3!}\varphi^3 - \frac{1-(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!}\varphi^5 + \frac{1-(16\varepsilon^2-60\varepsilon^4+45\varepsilon^6)}{7!}\varphi^7 - \ldots\right\}$$

Das Integral $\int \frac{d\varphi}{a(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$ lässt sich ähnlich wie das Integral $a\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ entwickeln. Für das zweifache Integral $a\int\limits_0^\varphi d\varphi\int\limits_0^\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ erhält man

$$a\int\limits_0^\varphi d\varphi\int\limits_0^\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\left\{\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{6!}\varphi^6 - \ldots\right\}$$

Für $\varepsilon = 1$ wird diese Reihe $= a(1-\cos\varphi)$.

Nimmt man in Gleichung I) links und rechts den Differentialquotienten nach $\varphi$ und dividirt beiderseits durch $a$, so erhält man

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} = 1 - \frac{\varepsilon^2\varphi^2}{1.2} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{4!}\varphi^4 - \ldots$$

Anmerkung. Die Convergenz dieser Reihe lässt sich ebenso wie die Convergenz der Reihe I) beweisen. Für $\varphi = 0$ wird dieselbe $= 1$, für $\varepsilon = 1$ wird sie $= \cos\varphi$, für $\varepsilon = 0$ wird sie ebenfalls $= 1$, convergirt also für den grössten und kleinsten Wert von $\varepsilon$.

Will man nun beispielsweise in Reihe I) nur die ersten 6 Glieder berücksichtigen, so setze man

$$\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi} = \frac{\varphi}{11} - \frac{\varepsilon^2\varphi^3}{1.2.11} + \frac{(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{1.2.3.4.11}\varphi^5 - \frac{(16\varepsilon^2-60\varepsilon^4+45\varepsilon^6)}{6!.11}\varphi^7 + \dots$$

Addirt man nun in Reihe I) den Ausdruck $\frac{\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{11}$ und subtrahirt die demselben gleiche Reihe, so erhält man

$$aE(\varepsilon,\varphi) = a\left\{\frac{(10+\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{11}\varphi - \frac{8\varepsilon^2}{1.2.3.11}\varphi^3 + \frac{6(4\varepsilon^2-3\varepsilon^4)}{5!.11}\varphi^5 - \frac{4(16\varepsilon^2-60\varepsilon^4+45\varepsilon^6)}{7!.11}\varphi^7 + \frac{2(64\varepsilon^2-1008\varepsilon^4+2520\varepsilon^6-1575\varepsilon^8)}{9!.11}\varphi^9 - 0 + \dots\right\}$$

Setzt man in $\int_0^\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$

$$\sin\varphi = x$$

also

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^x \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

und entwickelt letzteren Ausdruck nach dem Taylor'schen oder, was bequemer ist, nach dem binomischen Satze, so erhält man

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2x^2}{1-x^2}}\,dx = x + \frac{(1-\varepsilon^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{3.4(3-2\varepsilon^2-\varepsilon^4)}{2^2.5!}x^5 + \frac{4.5.6(3.5-9\varepsilon^2-3\varepsilon^4-3\varepsilon^6)}{2^3.7!}x^7 + \frac{5.6.7.8(3.5.7-60\varepsilon^2-18\varepsilon^4-12\varepsilon^6-15\varepsilon^8)}{2^4.9!}x^9 + \frac{10!(1.3.5.7.9-525\varepsilon^2-150\varepsilon^4-90\varepsilon^6-75\varepsilon^8-105\varepsilon^{10})}{5!\,2^5.11!} + \dots\}$$

Das $n$te Glied dieser Reihe ist immer kleiner als

$$\frac{\{n(n+1)\ \ldots\ (2n-2)\}1.3.5.7\ \ldots\ (2n-3)}{2^{n-1}.(2n-1)!}x^{2n-1}$$

oder kleiner als

$$\frac{(2n-2)!(n-1)^2}{(n-1)!2^{n-1}.(2n-1)!}x^{2n-1}$$

das $n+1$te Glied kleiner als

$$\frac{(2n)!n^2}{n!2^n(2n+1)!}x^{2n+1}$$

also

$$\frac{A_{n+1}x^{2n+1}}{A_n x^{2n-1}},\ \text{für}\ n=\infty,\ \text{gleich}\ \frac{x^2}{2n+1}$$

die Reihe convergirt also. Für $\varepsilon = 0$ geht dieselbe über in $\arcsin x$ für $\varepsilon = 1$ in $x$. Entwickelt man

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2+\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

ebenso wie $\int_0^\varphi \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ in Gleichung I), so erhält man in den Gliedern der Reihe Ausdrücke von der Form $\frac{m\varepsilon^{2p}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{2p-1}{2}}}$.

Für $\varepsilon = 1$ werden dieselben $=\infty$. Für Werte von $\varepsilon$, welche nahe bei 1 liegen, würde also die Reihe unbrauchbar sein. Sie ist deshalb zur Rectification der Ellipse nicht geeignet, um so für $\varphi$ den Ausdruck $\frac{\varphi}{2}$ einzuführen und die Reihe I) für den Grenzfall auf $\frac{\pi}{4}$ zu reduciren.

Führt man in die Reihe I) statt des Winkels $\varphi$ die geographische Breite $\psi$ ein, so ist

$$\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi = \frac{b^2}{a_2}\operatorname{tg}\psi,\quad \varphi = \operatorname{arc\,cotg}\{\sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{tg}\psi\} = \beta$$

Ist nun gegeben

1) $aE(\varepsilon,\ \beta_1) = x$
2) $aE(\varepsilon,\ \beta_2) = x+l_1$
3) $aE(\varepsilon,\ \beta_3) = x+l_2$

wo $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, und diese Grössen, sowie $l_1$ und $l_2$ bekannt sind, so erhält man nach Elimination von $x$ und $a$, wenn für $\varepsilon$ der richtige Wert eingesetzt ist, eine Gleichung von der Form

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

wo

$$L_1 = \beta_2 - \beta_1 - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3}(\beta_2^3 - \beta_1^3) + \dots$$

$$L_2 = \beta_3 - \beta_2 - \frac{\varepsilon^2}{1.2.3}(\beta_3^3 - \beta_2^3) + \dots$$

Der Wert von $\varepsilon$ lässt sich durch Versuche und Interpolation bestimmen. Ist $\varepsilon$ gefunden, so hat man

$$a = \frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2}$$

Ist $l_1$ und $l_2$ für die Meereshöhe $h$ gegeben und

$$a_1 = \frac{l_1}{L_1}$$

gefunden, so ist

$$a = a_1 - h$$

Ist z. B. gegeben $\psi_1 = 70^0\ 40'\ 11{,}23''$

$l_1 = 1370,2159\,km$ $\quad \psi_2 = 58\ \ 22\ \ 47{,}56$

$l_2 = 1451,5730\,km$ $\quad \psi_3 = 45\ \ 20\ \ \ 2{,}94$

also

$$\beta_1 = 19\ \ 23\ \ 27{,}63$$
$$\beta_2 = 31\ \ 42\ \ 25{,}11$$
$$\beta_3 = 44\ \ 45\ \ 46{,}93$$

so ist

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{0{,}214\,817\,209}{0{,}227\,574\,788}$$

wenn

$$\varepsilon = 0{,}082\,235$$

gesetzt wird, ferner

$$\log\frac{l_1}{l_2} - \log\frac{L_1}{L_2} = 0,\ 000\,0052.$$

Anmerkung. Die benutzten Daten sind dem Werke des Herrn Pr. Martus, „Astronomische Geographie", Leipzig, Koch's Verlagsbuchhandlung, entnommen.

Die gewöhnliche Berechnung von $\varepsilon$ aus den Krümmungsradien eines Meridians und den bezüglichen Breiten ist allerdings weit bequemer und, da wegen der Kleinheit von $\varepsilon$ die Bogen des Meridians

von den Bogen der entsprechenden Krümmungskreise unmerklich verschieden sind, auch hinreichend genau.

Das Differential einer krummen Fläche, welches man auch aus der Berechnung eines Parallelogramms, dessen zusammenstossende Seiten $\sqrt{(dx)^2+(dz_x)^2}$ und $\sqrt{(dy)^2+(dz_y)^2}$ und dessen Diagonale $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz_x-dz_y)^2}$ ist, erhalten kann, ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy$$

die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoids ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Berechnet man aus dieser Gleichung die Differentialquotienten, setzt

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2,\quad \frac{b^2-c^2}{b^2}=\zeta^2,\quad \frac{a^2-c^2}{a^2}=\eta^2$$

und führt Polarcoordinaten ein, so erhält man

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy=\left\{\frac{1-\dfrac{\{(1-\varepsilon^2)\eta^2\sin^2\chi+\zeta^2\cos^2\chi\}r^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}}{1-\dfrac{\{\cos^2\chi+(1-\varepsilon^2)\sin^2\chi\}r^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}}\right\}^{\frac{1}{2}} r\,dr\,d\chi$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach $r$ entweder nach dem Taylorschen oder, was bequemer ist, nach dem binomischen Satze, so erhält man, wenn man im letzteren Falle nach $r$ integrirt und

$$(1-\varepsilon^2)\eta^2\sin^2\chi+\zeta^2\cos^2\chi=\alpha^2,\quad \cos^2\chi+(1-\varepsilon^2)\sin^2\chi=\beta^2$$

setzt,

$$\int_0^\chi\int_0^r\left\{\frac{1-\dfrac{\{(1-\varepsilon^2)\eta^2\sin^2\chi+\zeta^2\cos^2\chi\}}{a^2(1-\varepsilon^2)}r^2}{1-\dfrac{\{(1-\varepsilon^2)\sin^2\chi+\cos^2\chi\}}{a^2(1-\varepsilon^2)}r^2}\right\}^{\frac{1}{2}} r\,dr\,d\chi$$

$$=\int_0^\chi\Big\{\tfrac{1}{2}r^2+\frac{3(\beta^2-\alpha^2)}{1.2\,3.4}r^4+\frac{3\,4.5\{3\beta^4-(\alpha^4+2\alpha^2\beta^2)\}}{2^2.6!}r^6$$

$$+\frac{4.5\,6.7\{1.3.5\beta^6-(3\alpha^6+3\alpha^4\beta^2+3.3\alpha^2\beta^4)\}}{2^3.8!}r^8$$

$$+\frac{5.6.7.8.9}{2^4.10!}\{1.3.5.7\beta^8-(1.3.5\alpha^8+3.4\alpha^6\beta^2+2.3.3\alpha^4\beta^4+1.3.4.5\alpha^2\beta^6)\}r^{10}$$

$$+\frac{11!}{5!2^5.12!}\{1.3.5.7.9\beta^{10}-(1.3.5.7\alpha^{10}+1.3.5.5\alpha^8\beta^2+1.3.3.2.5\alpha^6\beta^4$$

$$+1.3.5.3.5\alpha^4\beta^6+1.3.5.7.5\alpha^2\beta^8)\}r^{12}+\ldots\Big\}d\chi$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2}\operatorname{tg}\varphi$$

$$r^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)$$

$$\sin^2\chi = \frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}, \quad \cos^2\chi = \frac{b^2\cos^2\varphi}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\cos^2\varphi}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}$$

$$d\chi = \frac{ab\,d\varphi}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)}$$

so geht das letzte Integral über in

$$\text{V)} \quad ab\int\limits_0^{\varphi}\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{3(\delta^2-\gamma^2)}{4!} + \frac{3.4.5\{3\delta^4-(\gamma^4+2\gamma^2\delta^2)\}}{2^2.6!} + \ldots\right\}d\varphi$$

wo

$$\gamma^2 = \eta^2\sin^2\varphi + \zeta^2\cos^2\varphi = \zeta^2 + (\eta^2-\zeta^2)\sin^2\varphi$$

und

$$\delta^2 = 1$$

ist. Der Ausdruck ist also leicht zu integriren.

Die Reihe V) convergirt zunächst, wie aus den Bedingungen der Gültigkeit des binomischen Satzes hervorgeht, wenn sowol $\frac{\{(1-\varepsilon^2)\eta^2\sin^2\chi+\zeta^2\cos\chi)\}}{a^2(1-\varepsilon^2)}r^2$, als auch $\frac{\{(1-\varepsilon^2)\sin^2\chi+\cos^2\chi\}}{a^2(1-\varepsilon^2)}r^2 < 1$ ist; da man aber nach dem Taylor'schen Satze dieselbe Reihe ohne Integration nach $r$ erhält, weil $F_{(r,\chi)}$ sowol für $r = 0$, als auch für $\varphi = 0$ verschwinden muss, ebenso $\frac{d(F_{(r,\chi)})}{d\chi}$ für $r = 0$, so convergirt dieselbe auch noch, wenn

$$\gamma^2 = \eta^2\sin^2\varphi + \zeta^2\cos^2\varphi \leqq 1$$

ist. Da sowol $\eta$ als auch $\zeta \leqq 1$, so ist diese Bedingung erfüllt.

Das $n$te Glied der Reihe V) $= A_n . F_{(\varphi)}$ ist immer kleiner als $\frac{(2n-1)!\,(n-1)^2}{(n-1)!\,2^{n-1}\,(2n)!}\varphi$, woraus sich für den Grenzfall und für $n = \infty$

$$\frac{A_{n+1}.\varphi}{A_n.\varphi} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{ergibt.}$$

Für $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$ wird die Reihe V)

$$= a^2\varphi\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{3}{2^2.1.2.6} + \frac{15}{2^3.3!.8} + \frac{105}{2^4.4!.10} + \ldots\right\}$$

$= a^2\varphi$, wie sich aus $\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{r} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$ ergibt.

Anmerkung. Das Integral für den Teil der Oberfläche des Rotationsellipsoids, welcher vom Winkel $\varphi$ umfasst wird, ist $ab\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$. Setzt man nun

$$\varepsilon\sin\varphi = \sin\psi,\quad d\varphi = \frac{\cos\psi}{\varepsilon\cos\psi}\,d\psi$$

so erhält man $ab\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi}{\varepsilon}\,d\psi$ u. s. w.

Für $\zeta = 1$, $\eta = 1$ wird die Reihe V) $= ab\frac{\varphi}{2}$,

für $\varepsilon = 0$, $\zeta = 1$, $\eta = 1$ wird sie $a^2\frac{\varphi}{2}$,

für $\varepsilon = \zeta = 1$ wird sie $= 0$.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man in den Grenzfällen $\frac{1}{8}$ der Oberfläche der Kugel $= a^2\frac{\pi}{2}$, resp. $\frac{1}{8}$ der Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$= ab\frac{\pi}{2}\left\{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} + \frac{\operatorname{arc}(\sin\varepsilon)}{2\varepsilon}\right\}$$

einen Ellipsenquadranten $= ab\frac{\pi}{4}$ resp. einen Kreisquadranten $= a^2\frac{\pi}{2}$.

Nähert sich Reihe V) einer dieser Grössen, so kann man letztere zu der Reihe addiren und die der addirten Grösse entsprechende Reihe subtrahiren, um bei der Summirung der ersten Glieder für den Näherungswert eine grössere Genauigkeit zu erhalten.

---

XVIII.

# Die Curven, welche von Punkten von Kegelschnitten, die sich ohne zu gleiten längs anderer Curven wälzen, beschrieben werden.

Von

**H. Ekama.**

---

### Allgemeine Formeln.

In der Zeitschrift Nouvelle correspondance mathématique, Tome II und III hat Brocard getrachtet die Eigenschaften der Curve, welche ein Punkt durchläuft, fest mit einem Kegelschnitte verbunden, welcher sich ohne zu gleiten eine gerade Linie entlang wälzt, zu finden. Ich habe versucht die Betrachtungen über diese Curven allgemeiner zu machen, indem ich den beschreibenden Punkt nicht nur auf den Hauptachsen wählte und auch einige Fälle untersuchte, bei welchen die Directrix keine gerade Linie ist.

Die gesuchte Curve wird bestimmt in einem geradwinkligen Coordinatensysteme, in welchem auch die Directrix gegeben ist. Das Coordinatensystem, in welchem die Generatrix bestimmt ist, ist im allgemeinen schiefwinklig und ändert seine Lage in Bezug zum geradwinkligen Systeme. Zwei conjugirte Achsen sind, wenn die Generatrix ein Kegelschnitt ist, die Achsen und zwar so gewählt, dass der beschreibende Punkt auf der $\xi'$Achse liegt. $\xi$ und $\eta$ sind die Coordinaten eines Punktes der Directrix, welche vorläufig willkürlich genommen wird, in dem festen Coordinatensysteme. Die Entfernung des beschreibenden Punktes von dem Coordinatenanfang sei $p$. $\xi$ und $\eta$, $\xi'$ und $\eta'$ sind die Coordinaten des Berührungspunktes der beiden gegebenen Curven in jedem Coordinatensysteme. Die von dem Punkte beschriebene Curve wird verschieden sein, je nach der Seite

der Directrix, an welcher die Generatrix sich wälzt. Die Normalen im Berührungspunkte an beiden Curven gezogen, können eine in der andern Verlängerung oder zusammen fallen. Ersteres ist in Fig. 1, letzteres in Fig. 2 vorausgesetzt.

$P$ und $P'$ sind die beschreibenden Punkte, $PE$ und $P'E'$ sind die $\xi'$Achsen des Kegelschnittes, $BE$ und $B'E'$ sind die Normalen an dem Kegelschnitte in den Punkten $B$ und $B'$ welche die Berührungspunkte sind.

$\sigma$ und $\sigma'$ sind die Winkel, welche die gemeinsame Normale mit der $\xi$ und mit der $\xi'$Achse macht.

In Fig. 1 ist

$$\text{Wkl. } DBE = \omega - \sigma' + 180^0$$
$$\text{Wkl. } DBC = \omega - \sigma - \sigma' + 90^0$$
$$\text{Wkl. } EPF = \sigma + \sigma' - 90^0$$

In Fig. 2 ist

$$\text{Wkl. } D'B'E' = \omega - \sigma' + 180^0$$
$$\text{Wkl. } D'B'C' = 90^0 - (\sigma - \sigma' + \omega)$$
$$\text{Wkl. } E'P'F' = 90^0 - (\sigma - \sigma')$$

Folglich ist für Fig. 1

$$x_a = \xi + \eta' \cos(\sigma + \sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos(\sigma + \sigma')$$
$$y_a = \eta + \eta' \sin(\sigma + \sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin(\sigma + \sigma')$$

und für Fig. 2

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \xi - \eta' \cos\{\sigma - (\sigma' - \omega)\} + (p - \xi') \cos(\sigma - \sigma') \\ y_i &= \eta - \eta' \sin\{\sigma - (\sigma' - \omega)\} + (p - \xi') \sin(\sigma - \sigma') \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

$x$ und $y$ sind die Coordinaten eines Punktes der gesuchten Curven Aus diesen Formeln folgt, wenn wir $x$ und $y$ nach dem Bogen der Generatrix, welcher dem durchlaufenen Bogen der Directrix gleich ist, differentiiren:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \pm \frac{d\eta'}{ds} \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \mp \eta' \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$
$$\pm \frac{d\xi'}{ds} \cos\{\sigma \pm \sigma'\} \pm (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma') \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d\eta}{ds} \pm \frac{d\eta'}{ds} \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \pm \eta' \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$
$$\pm \frac{d\xi'}{ds} \sin\{\sigma \pm \sigma'\} \mp (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma') \left\{\frac{d\sigma}{ds_1} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$

In diesen Formeln so wie im Folgenden haben die obenstehenden Zeichen Beziehung auf den Fall, dass die Normalen eine in der andern Verlängerung fallen; die untenstehenden hingegen auf den Fall, dass sie zusammenfallen.

Nun ist

$$\sin\sigma = \frac{d\xi}{ds} \quad \text{und} \quad \sigma' = -\frac{d\eta}{ds}$$

weil die Normalen an den gegebenen Curven nach dem Krümmungsmittelpunkt gezogen werden. Ebenso ist

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds}\sin\omega \quad \text{und} \quad \cos\sigma' = -\frac{d\eta'}{ds}\sin\omega$$

Man hat also

$$\frac{dx}{ds} = \sin\sigma \mp \frac{\cos\sigma'\cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\}}{\sin\omega} \pm \frac{\cos(\omega - \sigma')\cos(\sigma \pm \sigma')}{\sin\omega}$$
$$\mp \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}[\eta'\sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\sin(\sigma \pm \sigma')]$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos\sigma \mp \frac{\cos\sigma'\sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\}}{\sin\omega} \pm \frac{\cos(\omega - \sigma')\sin(\sigma \pm \sigma')}{\sin\omega}$$
$$\pm \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}[\eta'\cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\cos(\sigma \pm \sigma')]$$

Folglich

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \mp \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}[\eta'\sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\sin(\sigma \pm \sigma')] \\ \frac{dy}{ds} &= \pm \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}[\eta'\cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\cos(\sigma \pm \sigma')] \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Sei $\tau$ der Winkel, welchen die Tangente der gesuchten Curve mit der $X$Achse macht, so ist:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{\eta'\cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\cos(\sigma \pm \sigma')}{\eta'\sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi')\sin(\sigma \pm \sigma')} \quad \text{(III)}$$

Ist $\Sigma$ der Winkel, welchen die Normale der gesuchten Curve mit der $X$Achse macht, so ist

$$\operatorname{tg}\Sigma = -\frac{dx}{dy}$$

Nennen wir die veränderlichen Coordinaten eines Punktes der Normale $x_1$ und $y_1$, so wird die Gleichung

$$(x - x_1)\operatorname{tg}\Sigma = (y - y_1)$$

oder

$$[\xi \pm \eta' \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} \mp (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma') - x_1] \operatorname{tg} \Sigma = \eta \pm \eta' \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega) \mp (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma') - y_1$$

Nach Substitution des Wertes für $\operatorname{tg} \Sigma$ finden wir

$$(\xi - x_1) \operatorname{tg} \Sigma = \eta - y_1$$

was uns lehrt, dass die Normale der gesuchten Curve immer durch den Berührungspunkt der gegebenen Curven geht, was auch zu erwarten war, weil dieser Punkt das Momentancentrum ist. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass wenn an jeder Seite der Directrix sich dieselbe Curve wälzt, bei demselben Punkte der Directrix anfangend und mit demselben beschreibenden Punkte, die Tangenten in zwei entsprechenden Punkten der entstandenen Curven und an der Directrix im Berührungspunkte gezogen, einander in einem Punkte schneiden.

Ein Teil der Normale liegt zwischen dem beschreibenden Punkte und dem Berührungspunkte. Nennen wir diesen Teil $k$, so ist

$$k^2 = \eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi') \cos \omega$$

Wir können auch den Krümmungsradius $P$ in jedem Punkte der gesuchten Curve bestimmen, wofür wir die bekannte Formel gebrauchen

$$P = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mp [\eta' \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')] \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} \pm \frac{d^2\sigma'}{ds^2}\right)$$
$$\mp \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right)^2 [\eta' \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')]$$
$$- \cos\sigma \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \pm [\eta' \cos\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \cos(\sigma \pm \sigma')] \left(\frac{d^2\sigma}{ds^2} \pm \frac{d^2\sigma'}{ds^2}\right)$$
$$\mp \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right)^2 [\eta' \sin\{\sigma \pm (\sigma' - \omega)\} - (p - \xi') \sin(\sigma \pm \sigma')]$$
$$- \sin\sigma \left\{\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right\}$$

Folglich

$$P = \frac{k^3 \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right)^3}{\pm \{\eta' \cos(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \cos\sigma'\} \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right)^2 + k^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{d\sigma'}{ds}\right)^3}$$

oder

$$P = \frac{k^3}{\pm\{\eta'\cos(\sigma'-\omega)-(p-\xi')\cos\sigma'\}\frac{1}{{}^1/q \pm {}^1/q'}+k^2} \qquad \text{(IV)}$$

in welcher Formel $q$ und $q'$ die Krümmungsradien der beiden gegebenen Curven im Berührungspunkte sind.

Um den Winkel $\varepsilon$, welchen die Normale der gesuchten Curve im Berührungspunkte mit der Tangente an der Directrix macht, zu bestimmen, haben wir:

$$\operatorname{cotg}\varepsilon = -\operatorname{tg}(\sigma-\Sigma) = \pm\frac{\eta'\sin(\sigma'-\omega)-(p-\xi')\sin\sigma'}{\eta'\cos(\sigma'-\omega)-(p-\xi')\cos\sigma'}$$

oder

$$\sin\varepsilon = -\frac{\eta'\cos(\sigma'-\omega)-(p-\xi')\cos\sigma'}{\sqrt{\{\eta'^2+(p-\xi')^2-2\eta'(p-\xi')\cos\omega\}}}$$

Folglich wird jetzt [1])

$$P = \frac{k^2}{\mp\frac{1}{{}^1/q\pm{}^1/q'}\sin\varepsilon+k}$$

Die Curve wird einen Wendepunkt haben, wenn

$$k = \pm\frac{qq'}{q'\pm q}\sin\varepsilon \qquad \text{(V)}$$

Berühren die beiden gegebenen Curven einander inwendig, das heisst fallen die Normalen zusammen, so wird $P=0$ für $q=q'$; die gesuchte Curve hat eine Spitze.

Für die Länge eines Bogenelementes finden wir

$$\frac{dL_a}{ds} = \left\{\frac{d\sigma}{ds}+\frac{d\sigma'}{ds}\right\}\sqrt{(\eta'^2+(p-\xi')^2-2\eta'(p-\xi')\cos\omega)} = \left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}\right)k$$

und

$$\frac{dL_i}{ds} = \pm\left\{\frac{d\sigma}{ds}-\frac{d\sigma'}{ds}\right\}\sqrt{(\eta'^2+(p-\xi')^2-2\eta'(p-\xi')\cos\omega)}$$
$$= \pm\left\{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}\right\}k$$

Sei

$$q > q' \quad \text{also} \quad {}^1/q < {}^1/q'$$

und man hat

$$dL_i = -\{{}^1/q - {}^1/q'\}k\,ds$$

folglich

$$dL_a + dL_i = 2\,{}^1/q'\,k\,ds \qquad \text{(VI)}$$

---

1) Salmon Fiedler. Höhere ebene Curven. Seite 347.

Ist immer $q > q'$, so ist die Summe der Curven an beiden Seiten der Directrix beschrieben, unabhängig von der Form der Directrix und zwar zweimal so gross als die Curve, welche bei einer gleich grossen Wälzung der Generatrix eine gerade Linie entlang durchlaufen sein würde.

Sei aber $q < q'$ also

$$dL_i = +\{{}^1/q - {}^1/q'\}\,k\,ds$$

und folglich

$$dL_a - dL_i = 2\,{}^1/q'\,k\,ds \qquad \text{(VII)}$$

Nun ist die Differenz der Curven an beiden Seiten der Directrix beschrieben unabhängig von der Form dieser Curve. Während der betrachteten Wälzung darf die Form $\frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$ nicht die Zeichen wechseln.

Berühren die Generatrix und die Directrix einander immer in übereinkünftigen Punkten, während sie congruent sind, so ist $dL_i$ immer null, folglich ist dann $L_a$ zweimal so lang als die Curve, welche bei einer gleich grossen Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben wird.

Um die Oberfläche zu bestimmen, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die Directrix und die Normalen beim Anfang und beim Ende der Bewegung, so können wir uns die Oberfläche geteilt denken in kleine Vierecke (Fig. 3), von welchen $ds$ die eine Seite ist, und die Normalen der durchlaufenen Curve, welche durch die Enden von $ds$ gehen, die anliegenden Seiten sind, während die vierte Seite das Bogenelement der gesuchten Curve ist.

Teilen wir jetzt das Viereck $ABCD$ in zwei Dreiecke $ABC$ und $ACD$, so ist

$$AD = AC = BC = k$$

Ist weiter

$$\text{Wkl } CBA = 180^0 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } DAC = \delta$$

so ist die Oberfläche eines Vierecks $\frac{1}{2}k^2\delta + \frac{1}{2}k\,ds\sin\varepsilon$. Berühren die beiden Curven einander auswendig, so ist

$$\delta = d\sigma + d\sigma'$$

bei innerer Berührung ist

$$\delta = \pm(d\sigma - d\sigma')$$

die ganze Oberfläche eingeschlossen zwischen den beiden Curven, welche durch den Punkt bei einer Wälzung der Directrix an beiden Seiten der Generatrix durchlaufen werden, und die Normalen beim Anfang und beim Ende sind immer gleich

$$-\int\{\eta'\cos(\sigma'-\omega) - (p-\xi')\cos\sigma'\}\,ds$$
$$+\int\{\eta'^2 + (p-\xi')^2 - 2\eta'(p-\xi')\cos\omega\}\,d\sigma' \qquad \text{(VIII)}$$

Innerhalb der Grenzen des Integrals dürfen jedoch die gegebenen Curven keine Spitzen haben. Man findet also, dass die gesuchte Oberfläche unabhängig von der Directrix ist, und dass sie immer zweimal grösser ist als die Oberfläche, eingeschlossen durch die Curve, welche durch den Punkt bei einer gleich grossen Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben wird.[1])

### A. Die Generatrix ist eine Ellipse.

Seien die beiden halben conjugirten Achsen $\beta$ und $\beta'$ und der Coordinatenwinkel $\omega$, so ist

$$\xi' = \beta \cos \Theta \quad \text{und} \quad \eta' = \beta' \sin \Theta$$

in welcher Formel $\Theta$ die excentrische Anomalie ist. $\beta$ kann grösser und kleiner sein als $\beta'$.

Die halben Hauptachsen der Ellipse sind $a$ und $b$, während $\psi$ der excentrische Winkel zwischen den Achsen $\beta$ und $a$ ist, dann hat man

$$\left.\begin{aligned} \beta^2 &= a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi \\ \beta'^2 &= a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \\ \text{und} \quad 2\beta\beta' \cos \omega &= (b^2 - a^2) \sin^2 \psi \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Weiter ist:

$$\frac{\cos(\omega - \sigma')}{\cos \sigma'} = -\frac{d\xi'}{d\eta'} = \frac{\beta}{\beta'} \operatorname{tg} \Theta \tag{b}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \cos(\omega - \sigma') &= +\frac{d\xi'}{ds} \sin \omega = -\beta \sin \Theta \sin \omega \frac{d\Theta}{ds} \\ \cos \sigma' &= -\frac{d\eta'}{ds} \sin \omega = -\beta' \cos \Theta \sin \omega \frac{d\Theta}{ds} \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

$$\frac{d\sigma'}{ds} = \beta\beta' \sin \omega \left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 \tag{d}$$

Endlich finden wir [2])

$$\left(\frac{ds}{d\Theta}\right)^2 = \left(\frac{d\xi'}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta'}{d\Theta}\right)^2 + 2\frac{d\xi'}{d\Theta}\frac{d\eta'}{d\Theta} \cos \omega$$
$$= \beta^2 \sin^2 \Theta + \beta'^2 \cos^2 \Theta - 2\beta\beta' \sin \Theta \cos \Theta \cos \omega$$

1) Man kann dieses Resultat auch auf einem viel längeren Wege au rein analytische Weise erhalten. Die oben gegebene Ableitung verdanke ich Prof. Dr. H. A. Lorentz zu Leiden.

2) Schlömilch. Comp. der höheren Analysis. Seite 385.

Liegt der beschreibende Punkt auf der Hauptachse, so wird $\beta = a$, $\beta' = b$ und $\omega = 90^0$.

Die Formeln (IV) und (V) werden

$$P = \frac{\{\beta'^2 \sin^2\Theta + (p-\beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p-\beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\}^{3/2}}{\mp\beta'(\beta - p\cos\Theta)\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{(\beta'^2\cos^2\Theta+\beta^2\sin^2\Theta-2\beta\beta'\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega)}}}{{}^1/q \pm {}^1/q'} + \{\beta'^2\sin^2\Theta + (p-\beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p-\beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\}} \quad \text{(IV*)}$$

und

$$\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p-\beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p-\beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega = \pm\frac{\beta'(\beta-p\cos\Theta)}{{}^1/q \pm {}^1/q'}\,\frac{1}{\sqrt{\{\beta^2\sin^2\Theta+\beta'^2\cos^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega\}}} \quad \text{(V*)}$$

In diesen Formeln ist

$$\frac{1}{q} = \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{\beta\beta'\sin\omega}{\sqrt{\{\beta^2\sin^2\Theta+\beta'^2\cos^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega\}^3}}$$

Die Formel (VIII) gibt für die Oberfläche bei einer ganzen Wälzung der Ellipse:

$$O = \beta'\sin\omega\int_0^{2\pi}(\beta - p\cos\Theta)\,d\Theta + \beta\beta'\sin\omega\times$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{\beta'^2\sin^2\Theta+(p-\beta\cos\Theta)^2-2\beta'\sin\Theta\,(p-\beta\cos\Theta)\cos\omega}{\beta'^2\cos^2\Theta+\beta^2\sin^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega}\,d\Theta$$

oder

$$O = 2\beta\beta'\sin\omega\,\{\int_0^{\pi}d\Theta$$
$$+\int_0^{\pi}\frac{\beta'^2\sin^2\Theta+p^2+\beta^2\cos^2\Theta+2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega}{\beta'^2\cos^2\Theta+\beta^2\sin^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega}\,d\Theta$$
$$= 2\beta\beta'\sin\omega(\beta^2+\beta'^2+p^2)\times$$
$$\int_0^{\pi}\frac{d\Theta}{\beta'^2\cos^2\Theta+\beta^2\sin^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega}$$
$$= 2\beta\beta'\sin\omega\,(\beta^2+\beta'^2+p^2)\int\frac{dx}{\beta'^2-2\beta\beta'\cos\omega\,x+\beta^2x^2}$$

folglich

$$O = 2\pi\beta^2 + 2\pi\beta'^2 + 2\pi p^2 \qquad \text{(VIII*)}$$

Dieses lehrt uns, dass diese Oberfläche immer gleich ist zweimal der Summe der Oberflächen von drei Kreisen, von welchen die halben

conjugirten Achsen und die Entfernung des beschreibenden Punktes von dem Mittelpunkte die Radien sind.

### I. Die Ellipse wälzt eine gerade Linie entlang.

Die gerade Linie sei die $X$ Achse des festen Coordinatensystems und zum Coordinatenanfang wählen wir den Punkt, wo die $\xi$ Achse die $X$ Achse beim Anfang der Bewegung schneidet. Nun ist $\sigma = 270^0$ und $\xi$ ist gleich dem Bogen der Ellipse zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte, wo die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt, die Ellipse schneidet. Nun ist $\sigma = 270^0$ und $\xi$ ist gleich dem Bogen der Ellipse zwischen dem Berührungspunkte und dem Punkte, wo die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt, die Ellipse schneidet. Also wird (I)

$$x = \xi + \eta' \sin(\sigma' - \omega) - (p - \xi') \sin \sigma'$$
$$y = \quad - \eta' \sin(\sigma' - \omega) + (p - \xi') \cos \sigma'$$

$\xi$ ist negativ, weil sich die Ellipse nach der negativen Seite der $X$ Achse wälzt. Nehmen wir die positive Seite der $X$ Achse in Uebereinstimmung mit der Richtung der Wälzung, so finden wir:

$$x = \xi + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma'$$
$$y = \quad - \eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma'$$

Diese Formeln können auch unmittelbar aus einer Figur abgeleitet werden.

Wir werden untersuchen, welche Culminationspunkte die Curve in Bezug zur $X$ Achse haben kann. Es muss die Ordinate $y$ ihr Maximum oder Minimum erreichen, also $\frac{dy}{ds} = 0$ sein.

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{dy'}{ds} \cos(\omega - \sigma') - \eta' \sin(\omega - \sigma') \frac{d\sigma'}{ds}$$
$$- (p - \xi') \sin \sigma' \frac{d\sigma'}{ds} - \frac{d\xi'}{ds} \cos \sigma = 0$$

und nach (c)

$$\eta' \sin(\omega - \sigma') = -(p - \xi') \sin \sigma'$$

Diese Formel ist, wie zu erwarten war, die Bedingung, dass das Perpendikel aus einem willkürlichen Punkte nach der Tangente der Ellipse gezogen so klein oder so gross als möglich ist. Es wird sein Minimum erreichen, wenn dies Perpendikel gerade durch den Berührungspunkt geht (Fig. 4.), sein Maximum, wenn es durch den Punkt $P'$ geht, der auf derselben Achse gleichweit vom Mittelpunkte der Ellipse wie der Punkt $P$ liegt (Fig. 5.).

In den Dreiecken $PRC$ und $P'C'R$ ist:

$$\eta' : \xi' - p = \sin\sigma' : \sin(\omega - \sigma')$$

oder

$$\eta' \sin(\omega - \sigma') = -(p - \xi')\sin\sigma'$$

Transformiren wir diese Gleichung durch Einführung der $\Theta$:

$$\eta' \sin\omega\cos\sigma' = (\eta'\cos\omega - p + \xi')\sin\sigma'$$

$$\beta'^2 \sin^2\omega \sin\Theta = \{\beta'\sin\Theta\cos\omega - p + \beta\cos\Theta\}\{\beta\,\mathrm{tg}\,\Theta - \beta'\cos\omega\}$$

$$\beta'^2\sin\Theta\cos\Theta = \beta\beta'\cos\omega(\sin^2\Theta - \cos^2\Theta) - p\beta\sin\Theta + \beta^2\sin\Theta\cos\Theta + p\beta'\cos\omega\cos\Theta \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung muss $\Theta$ bestimmt werden, wenn wir einführen $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\Theta$, so finden wir in Bezug auf diese Unbekannte eine Gleichung vom vierten Grade, welche im allgemeinen nicht zu lösen ist.

Für den Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der $X$ Achse macht, finden wir nach (III)

$$\mathrm{tg}\,\tau = \frac{\eta'\sin(\omega - \sigma') + (p - \xi')\sin\sigma'}{\eta'\cos(\omega - \sigma') - (p - \xi')\cos\sigma'} \quad (2)$$

Für $\Theta = \pi$ wird $\sigma' = \omega$ also

$$\mathrm{tg}\,\tau = -\mathrm{cotg}\,\omega$$

Die Tangente steht in jenem Falle senkrecht auf der bewegten $\xi'$ Achse.

Um zu finden, ob die Curve auch Wendepunkte hat, müssen wir (V*) gebrauchen, alsdann finden wir

$$\{\beta - p\cos\Theta\}\{\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega\}$$
$$= \beta\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\} \quad (3)$$

Auch aus dieser Formel ist $\Theta$ im allgemeinen nicht zu lösen.

Den Krümmungsradius finden wir mittels (IV*)

$$P = \frac{\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\} - \frac{(\beta - p\cos\Theta)}{\beta} \times (\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega)} \quad (4)$$

Für $\Theta = 2n\pi$ ist

$$P = \frac{\beta(p - \beta)^2}{(p - \beta)\beta + \beta'^2}$$

für $\Theta = (2n + 1)\pi$

$$P = \frac{\beta(p+\beta)^2}{(p+\beta)\beta - \beta'^2}$$

und für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$

$$P = \frac{(\beta' \pm p)^3}{(\beta' \pm p)^2 - \beta^2}$$

Für die Länge $L$ des Weges, welchen der Punkt bei einer Wälzung der Ellipse durchläuft, findet man:

$$L = \int \{\eta'^2 + (p - \xi')^2 - 2\eta'(p - \xi')\cos\omega\}^{\frac{1}{2}} d\sigma'$$

oder

$$L = \beta\beta'\sin\omega \int_0^{2\pi} \frac{\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega} d\Theta \quad (5)$$

Führen wir in diese Formel ein $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta = x$, so wird sie

$$L = \beta\beta'\sin\omega \int \frac{\begin{array}{l}[(p-\beta)^2 + 4(p-\beta)\beta'\cos\omega x + 2(2\beta'^2 + p^2 - \beta^2)x^2 \\ \qquad - 4(p+\beta)\beta'\cos\omega x^3 + (p+\beta)^2 x^4]^{\frac{3}{2}}\end{array}}{4\beta^2x^2 + \beta'^2(1-x^2)^2 - 4\beta\beta'\cos\omega x(1-x^2)} dx \quad (6)$$

Für die Oberfläche, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die gerade Linie und die Normalen beim Anfang und beim Ende einer Wälzung der Ellipse, finden wir nach (VIII) und nach (VIII*)

$$O = \pi\beta^2 + \pi\beta'^2 + \pi p^2 = \pi a^2 + \pi b^2 + \pi p^2 \quad (7)$$

die Oberfläche ist also gleich der Summe der Oberflächen von drei Kreisen, von welchen die halben Hauptachsen und die Entfernung des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt die Radien sind [1]). Gebrauchen wir diese Formeln für einige besonderen Fälle.

1. Der beschreibende Punkt liegt auf der Ellipse.

In diesem Falle ist $p = \beta$.

Die Gleichung (1), welche uns die Culminationspunkte gibt, wird jetzt:

$$\beta'^2\sin\Theta\cos\Theta = -\beta\beta'\cos\omega\cos2\Theta - \beta^2\sin\Theta(1-\cos\Theta) + \beta\beta'\cos\omega\cos\Theta$$

$$2\beta'^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta\cos\Theta = 2\beta\beta'\cos\omega\sin\tfrac{1}{2}\Theta\sin\tfrac{3}{2}\Theta - 2\beta^2\sin\Theta\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta$$

folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}\Theta = 0 \quad \therefore \quad \Theta = 2n\pi$$

dieses ist der Fall, wenn der beschreibende Punkt in die gerade Linie kommt.

---

1) Nouv. Corr. Math. Tome III. p. 11 und Jacob Steiner's Gesammelte Werke 2 ter Band, Seite 136.

Weiter ist

$$\beta'^2\cos\tfrac{1}{2}\Theta(\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta-\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta)=\beta\beta'\cos\omega(3\sin\tfrac{1}{2}\Theta-4\sin^3\tfrac{1}{2}\Theta)-2\beta^2\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}\Theta$$

folglich

$$\beta'^2\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}\Theta-3\beta\beta'\cos\omega\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}\Theta+(2\beta^2-\beta'^2)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta+\beta\beta'\cos\omega=0$$

Wir müssen untersuchen, wann diese Gleichung drei reelle Wurzeln hat. Sei

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta=y+\frac{\beta}{\beta'}\cos\omega$$

so finden wir

$$y^3+\left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2}-1-3\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cos^2\omega\right)y+2\frac{\beta^3}{\beta'^3}\sin^2\omega\cos\omega=0$$

Sollen die Wurzeln reell sein, so muss sein

$$\left(2\frac{\beta^3}{\beta'^3}\sin^2\omega\cos\omega\right)^2+\frac{4}{27}\left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2}-1-3\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cos^2\omega\right)^3<0$$

oder

$$27\beta^6\sin^4\omega-27\beta^6\sin^6\omega-(\beta'^2+\beta^2)^3+9(\beta'^2+\beta^2)\beta^2\sin^2\omega$$
$$-27(\beta'^2+\beta^2)\beta^4\sin^4\omega+27\beta^6\sin^6\omega<0$$

$$-(\beta'^2+\beta^2)^3+9(\beta'^2+\beta^2)^2\beta^2\sin^2\omega-27\beta'^2\beta^4\sin^4\omega<0$$

Nach Einführung der Hauptachsen finden wir

$$-(a^2+b^2)^3+9(a^2+b^2)\frac{a^2b^2}{\beta'^2}-27\frac{a^4b^4}{\beta'^2}<0$$

folglich

$$\beta^2<\frac{(a^2+b^2)^4-9a^2b^2(a^2+b^2)+27a^4b^4}{(a^2+b^2)^3}$$

Soll $\beta$ reell sein, so muss der Zähler positiv sein. Dieses ist immer der Fall, denn man kann ihn transformiren in

$$\{(a^2+b^2)^2-4{,}5a^2b^2\}^2+6{,}75a^4b^4$$

Sei $a$ die kleinste halbe Achse, so muss $\beta>a$ sein, also

$$a^2<\beta^2<\frac{a^8-5a^6b^2+15a^4b^4-5a^2b^6+b^8}{(a^2+b^2)^3} \qquad (a)$$

folglich

$$8a^6-12a^4b^2+6a^2b^4-b^6<0$$

oder

$$2a^2-b^2<0$$

also

$$b>a\sqrt{2}$$

Soll die Curve drei Culminationspunkte in Bezug auf die $X$ Achse haben können, so muss die längste Achse der Ellipse grösser

sein als die kürzeste Achse multiplicirt mit $\sqrt{2}$; was übereinstimmt mit $b^2 - a^2 > a^2$, das heisst, die Excentricität muss grösser sein, als die halbe kleine Achse der Ellipse.

Die Grenzen von $\beta$ sind durch die Formel ($\alpha$) bestimmt. Die Gleichuug (3) wird in diesem Falle

$$(1-\cos\Theta)\{\beta^2\sin^2\Theta+\beta'^2\cos^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega\}$$
$$=\beta'^2\sin^2\Theta+\beta^2(1-\cos\Theta)^2,-2\beta\beta'\cos\omega\sin\Theta(1-\cos\Theta)$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $1-\cos\Theta$, also $\Theta=2n\pi$ dieses gibt wieder dieselben Punkte in der $X$ Achse.

Auch ist

$$\beta^2\sin^2\Theta+\beta'^2\cos^2\Theta-2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega$$
$$=\beta'^2(1+\cos\Theta)+\beta^2(1-\cos\Theta)-2\beta\beta'\cos\omega\sin\Theta$$

$$\beta^2(\sin^2\Theta-1+\cos\Theta)+\beta'^2(\cos^2\Theta-\cos\Theta-1)$$
$$+2\beta\beta'\cos\omega(1-\cos\Theta)\sin\Theta=0$$

oder

$$\beta'^2\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\Theta+8\beta\beta'\cos\omega\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}\Theta+(2\beta^2-4\beta'^2)\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta-(2\beta^2+\beta'^2)=0$$

Diese Gleichung hat immer zwei imaginäre Wurzeln, die beiden anderen Wurzeln werden reell sein, wenn die Curve drei Culminationspunkte in Bezug auf die $X$ Achse hat

In den Punkten, welche in der $X$ Achse liegen, ist der Krümmungsradius $P=0$; diese Punkte sind also Spitzen.

Für die Länge der Curve, welche durchlaufen wird bei einer Wälzung der Ellipse, finden wir nach (6)

$$L=4\beta\beta'\sin\omega\int^{\circ}\frac{x\,dx\sqrt{\{\beta'^2-2\beta\beta'\cos\omega x+\beta^2x^2\}}}{4\beta^2x^2+\beta'^2(1-x^2)^2-4\beta\beta'\cos\omega x(1-x^2)}$$

2. Der beschreibende Punkt liegt auf einer Hauptachse

Die Gleichungen der Curve sind

$$x=\xi+\eta'\cos\sigma'+(p-\xi')\sin\sigma'$$
$$y=\quad-\eta'\sin\sigma'+(p-\xi')\cos\sigma'$$

Führen wir die Werte für $\xi'$, $\eta'$ und $\sigma'$ ein, so ist:

$$x=\int_0^{\Theta}\sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}d\Theta-\frac{(b^2-a^2)\sin\Theta\cos\Theta-ap\sin\Theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}}$$

$$y = \frac{b(a-p\cos\Theta)}{\sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}}$$

Ist $p > a$, so werden verschiedene Teile der Curve einander schneiden, wir werden den Ort dieser Doppelpunkte bestimmen.

Für zwei Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ muss

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2$$

sein, folglich

$$\frac{a-p\cos\Theta}{\sqrt{\{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\Theta\}}} = \frac{a-p\cos\Theta'}{\sqrt{\{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\Theta'\}}}$$

Setzen wir

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = l^2$$

so muss sein:

$$(a-p\cos\Theta)^2(1-l^2\cos^2\Theta') = (a-p\cos\Theta')^2(1-l^2\cos^2\Theta)$$

$$-2a(\cos\Theta-\cos\Theta')+p(\cos^2\Theta-\cos^2\Theta')$$
$$+2al^2(\cos\Theta\cos^2\Theta'-\cos\Theta'\cos^2\Theta) = 0$$

folglich kann

$$\cos\Theta = \cos\Theta'$$

sein und also

$$\Theta' = 2n\pi-\Theta$$

oder auch

$$-2a+p(\cos\Theta+\cos\Theta')-2al^2\cos\Theta\cos\Theta' = 0$$

Dieser Gleichung können nicht zugleich reelle Werte von $\Theta$ und $\Theta'$ genügen, weil entweder $\cos\Theta$ oder $\cos\Theta'$ grösser als 1 sein müsste.

Soll $x_1 = x_2$ sein, dann muss sein:

$$\int_0^\Theta \sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}d\Theta - \frac{(b^2-a^2)\sin\Theta\cos\Theta+ap\sin\Theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}}$$
$$=\int_0^{\Theta'} \sqrt{(a^2\sin^2\Theta'+b^2\cos^2\Theta')}d\Theta' - \frac{(b^2-a^2)\sin\Theta'\cos\Theta'+ap\sin\Theta'}{\sqrt{(a^2\sin^2\Theta'+b^2\cos^2\Theta')}}$$

Nach Substitution wird

$$-2\,\frac{(b^2-a^2)\cos\Theta\sin\Theta+pa\sin\Theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta)}}$$
$$=\int_0^{2n\pi-\Theta}\sqrt{(b^2\cos^2\Theta+a^2\sin^2\Theta)}d\Theta-\int_0^\Theta\sqrt{(b^2\cos^2\Theta+a^2\sin^2\Theta)}d\Theta$$

Nennen wir ein Viertel des Ellipsenumfanges $bK$, in welcher Formel

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \Theta\right)^{\frac{1}{2}} d\Theta$$

ist, so haben wir nach der Lehre der elliptischen Functionen:

$$-\frac{(b^2 - a^2)\cos\Theta \sin\Theta + pa \sin\Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)}}$$

$$= 2nbK - \int_0^{\Theta} \sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)}\, d\Theta$$

Substituiren wir dieses in die Gleichung für $x$, so finden wir für die Doppelpunkte

$$x = 2nbK$$

Diese Formel lehrt uns,' dass diese Punkte immer liegen auf Linien, welche senkrecht zur $X$ Achse stehen, und welche den halben Umfang der Ellipse von einander entfernt sind.

Die Formel (1) gibt uns zur Bestimmung der Culminationspunkte

$$b^2 \sin\Theta \cos\Theta = -pa \sin\Theta + a^2 \sin\Theta \cos\Theta$$

diesem genügt

$$\sin\Theta = 0$$

also

$$\Theta = n\pi$$

und

$$\cos\Theta = \frac{pa}{a^2 - b^2}$$

$a$ ist die Achse, auf welcher der beschreibende Punkt liegt.

Ist $a > b$ so muss $p < \frac{a^2 - b^2}{a}$

„ $a < b$ „ „ $p < \frac{b^2 - a^2}{a}$

sein, damit $\cos\Theta$ reell ist.

Für die Culminationspunkte ist

$$x = \int_0^{n\pi} \sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)}\, d\Theta - 2nbK$$

und

$$y = a - p \quad \text{oder} \quad y = a + p$$

Gibt es noch zwei Culminationspunkte, so ist

$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - b^2 - p^2}{a^2 - b^2}}$$

3. Das Ende der Hauptachse ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p = a$, so gibt die Formel (1)

$$b^2 \sin\Theta \cos\Theta = -a^2 \sin\Theta + a^2 \sin\Theta \cos\Theta$$

folglich ist wieder

$$\sin\Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

und

$$\cos\Theta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

Dieser letzte Wert ist reell, wenn $b^2 > 2a^2$ ist, wie wir früher gefunden haben.

Die Ellipse, welche in Fig. 6. die gezeichneten Curven entstehen lässt, genügt dieser Bedingung; Fig. 6A. gibt die Curve, welche durch das Ende der grossen Achse durchlaufen wird und Fig. 6B. diejenige, welche durch das Ende der kleinen Achse beschrieben wird.

Die Coordinaten der Culminationspunkte sind

für $\Theta = n\pi$ wird

$$x = 2nbK \quad \text{und} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = 2a$$

für $\cos\Theta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$ wird

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$$

Jetzt ist es auch möglich die Wendepunkte zu finden. Die Formel (3) wird:

$$(1 - \cos\Theta)\{a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta\} = b^2 \sin^2\Theta + a^2(1 - \cos\Theta)^2$$

$$a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\Theta = b^2(1 + \cos\Theta) + a^2(1 - \cos\Theta)$$

also ist

$$1 - \cos\Theta = 0 \quad \text{oder} \quad \Theta = 2n\pi$$

Diese sind wieder die Punkte in der $X$ Achse; auch ist

$$(a^2 - b^2)\cos^2\Theta - (a^2 - b^2)\cos\Theta + b^2 = 0$$

folglich

$$\cos\Theta = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - b^2}}$$

Für das + Zeichen ist $\cos\Theta > 1$

$\cos\Theta$ muss grösser sein als $-1$ oder $-1 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-5b^2}{a^2-b^2}}$

$$3 > \sqrt{\frac{a^2-5b^2}{a^2-b^2}}$$

$$9a^2 - 9b^2 < a^2 - 5b^2$$

oder

$$2a^2 < b^2$$

also $b$ muss grösser als $a\sqrt{2}$ sein, wenn $\Theta$ reell sein soll. Den gefundenen Wert für $\Theta$ können wir in $y$ und $\operatorname{tg}\tau$ substituiren.

Für den Krümmungsradius finden wir mittels (4)

Für $\Theta = 2n\pi$ $\qquad P = 0$

„ $\Theta = (2n+1)\pi$ $\qquad P = \frac{4a^3}{2a^2-b^2}$

„ $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ $\qquad P = \frac{(b^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2}$

Die Länge der Curve wird nach (6)

$$L = 4ab\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx\sqrt{(b^2+a^2x^2)}}{4a^2x^2+b^2-2b^2x^2+b^2x^4}$$

Sei $b^2+a^2x^2 = y^2$, so ist:

$$L = 4a^3b\int\limits_b^\infty \frac{y^2\,dy}{b^2(b^4+2a^2b^2-3a^4)+2y^2(2a^4-a^2b^2-b^4)+b^2y^4}$$

## 4. Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt.

In diesem Falle ist $a > b$ und $p = c$, wenn $a^2 - b^2 = c^2$ ist.

Um die Culminationspunkte zu finden, haben wir nach (1)

$$b^2\sin\Theta\cos\Theta = -ac\sin\Theta + a^2\sin\Theta\cos\Theta$$

$$\sin\Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

und

$$\cos\Theta = \frac{a}{c} > 1$$

also wie zu erwarten war, immer imaginär. Die Curve hat also nur zwei Culminationspunkte, für welche

$$x = 2nbK$$

und

$$y = a - c \quad \text{oder} \quad y = a + c \quad \text{ist.}$$

Die Formel (3) gibt für die Wendepunkte

$$(a - c\cos\Theta)(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta) = a\{b^2\sin^2\Theta + (c - a\cos\Theta)^2\}$$

oder

$$(a - c\cos\Theta)(a^2 - c^2\cos^2\Theta) = a(a - c\cos\Theta)^2$$

folglich

$$\cos\Theta = \frac{a}{c}$$

dieser Wert ist imaginär, und

$$a + c\cos\Theta = a \quad \text{oder} \quad \cos\Theta = 0$$

also

$$\Theta = (2n+1)\tfrac{1}{2}\pi$$

Jeder Teil der Curve (Fig. 6 C.) hat also zwei Wendepunkte. Mittels der Formel (2) finden wir den Winkel $\tau$, welchen die Tangente in diesen Punkten an die Curve gezogen mit der $X$ Achse macht.

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{b^2\cos\Theta\sin\Theta + (c - a\cos\Theta)a\cos\Theta}{ba\sin^2\Theta - (c - a\cos\Theta)b\cos\Theta} = \pm\frac{c}{b}$$

Für diese Punkte ist:

$$x = (2n+1)bK \mp c \quad \text{und} \quad y = b$$

Für den Krümmungsradius in jedem Punkte der Curve finden wir nach (4)

$$P = \frac{a\{b^2\sin^2\Theta + (c - a\cos\Theta)^2\}^{3/2}}{-(a - c\cos\Theta)(a^2 - c^2\cos^2\Theta) + a\{b^2\sin^2\Theta + (c - a\cos\Theta)^2\}}$$

Ist die Länge der Normale

$$k = \sqrt{\{b^2\sin^2\Theta + (c - a\cos\Theta)^2\}}$$

so finden wir

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{k} = \frac{-(a - c\cos\Theta)(a^2 - c^2\cos^2\Theta) + 2a(a - c\cos\Theta)^2}{a(a - c\cos\Theta)^3} = \frac{1}{a}$$

Dieser Eigenschaft zufolge kann die Figur, welche entsteht durch die Rotation dieser Curve um die gerade Linie, eine Gleichgewichtsfläche einer Flüssigkeit, welche keinen auswendigen Kräften ausgesetzt ist, sein. Diesem Rotationskörper hat Plateau[1]) den Namen von Onduloïde gegeben.

---

1) Plateau. Statique des liquides Vol. I pag. 83.

In den Culminationspunkten findet man

$$\text{für } \Theta = 2n\pi \qquad P = \frac{a}{c}(a-c)$$

$$\text{für } \Theta = (2n+1)\pi \qquad P = \frac{a}{c}(a+c)$$

Für die Länge eines Teiles finden wir mittels (6)

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{(\eta'^2+(c-\xi')^2)}\,d\sigma' = 2ab\int_0^\pi \frac{d\Theta}{a+c\cos\Theta}$$

Sei $\Theta = 2\varphi$ so wird

$$L = 4ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(a+c)\cos^2\varphi+(a-c)\sin^2\varphi}$$

$$= \left| \frac{4ab}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\varphi\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}\right)\right|_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

also

$$L = 2\pi a \tag{$\beta$}$$

Die Länge dieser Curve ist also immer gleich dem Umfang des Kreises, welcher die halbe grosse Achse als Radius hat, und diese Länge ist also immer von der kurzen Achse unabhängig.

Die Oberfläche

$$O = \pi a^2+\pi b^2+\pi c^2 = 2\pi a^2$$

5. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p = 0$ (Fig. 6D).

Für die Culminationspunkte finden wir durch die Formel (1):

$$b^2\sin\Theta\cos\Theta = a^2\sin\Theta\cos\Theta$$

Dieser Formel genügt

$$\sin 2\Theta = 0; \quad \text{also} \quad \Theta = \tfrac{1}{2}\pi$$

Jeder Teil der Curve hat also vier Culminationspunkte, und die Coordinaten dieser Punkte sind:

$$x = nbK \quad \text{und} \quad y = a \quad \text{oder} \quad y = b$$

Die Formel (3) wird in diesem Falle

$$a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta = b^2\sin^2\Theta+a^2\cos^2\Theta$$

folglich

$$a^2\cos 2\Theta = b^2\cos 2\Theta \quad \text{und} \quad 2\Theta = (2n+1)\tfrac{1}{2}\pi$$

Jeder Teil der Curve hat also auch vier Wendepunkte. Die Coordinaten [1]) dieser Punkte sind:

$$x = b\,E\{k.(2n+1)\tfrac{1}{2}\pi\} \quad \text{und} \quad y = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Durch die Formel (2) finden wir

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{b^2-a^2}{ab}\sin\Theta\cos\Theta$$

folglich ist in einem Wendepunkte

$$\operatorname{tg}\tau = \pm\frac{c^2}{2ab}$$

Der Krümmungsradius ist in den Culminationspunkten

$$\text{für } \Theta = 2n\tfrac{1}{2}\pi \qquad P = \frac{a^3}{a^2-b^2}$$

$$\text{für } \Theta = (2n+1)\tfrac{1}{2}\pi \qquad P = \frac{b^3}{a^2-b^2}$$

Für die Länge der Curve bei einer Wälzung der Ellipse beschrieben, finden wir nach (5):

$$L = 4ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(b^2\sin^2\Theta+a^2\cos^2\Theta)^{\frac{1}{2}}}{a^2\sin^2\Theta+b^2\cos^2\Theta}\,d\Theta$$

Sei

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = k^2 \quad \text{und} \quad \frac{b^2}{a^2} = l^2$$

während wir immer dafür sorgen können, dass $0 < k' < 1$ ist, so wird

$$L = 4b\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{(1-k^2\sin^2\Theta)}}{l^2+k^2\sin^2\Theta}\,d\Theta$$

also

$$L = 4b(1+l^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\Theta}{(l^2+k^2\sin^2\Theta)\sqrt{(1-k^2\sin^2\Theta)}} - 4b\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\Theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\Theta)}}$$

$$= 4b\,\{(1+l^2)\,\Pi(l.k.\tfrac{1}{2}\pi) - F(k.\tfrac{1}{2}\pi)\} \qquad (\gamma)$$

## II. Die Ellipse wälzt sich einen Kreis entlang.

Die Ellipse kann den Kreis auswendig oder inwendig berühren; auf den ersten Fall beziehen sich in den folgenden Betrachtungen

---

1) Nouv. Corr. Math. Tome III p. 6.

die obenstehenden, auf den zweiten die untenstehenden Zeichen. Der Mittelpunkt des Kreises wird zum Coordinatenanfang gewählt.

Jetzt ist

$$\xi = R\cos\varphi \quad \text{und} \quad \eta = R\sin\varphi \quad \sigma = 180^0 + \psi$$

$$x = R\cos\varphi \mp \eta'\cos\{\varphi \pm (\sigma' - \omega)\} \pm (p - \xi')\cos(\varphi \pm \sigma')$$
$$y = R\sin\varphi \mp \eta'\sin\{\varphi \pm (\sigma' - \omega)\} \pm (p - \xi')\sin(\varphi \pm \sigma')$$

Führen wir Polarcoordinaten ein, für welche

$$x = r\cos\chi \quad \text{und} \quad y = r\sin\chi$$

so wird

$$r^2 = R^2 + (p - \xi')^2 + \eta'^2 - 2\eta'(p - \xi')\cos\omega \mp 2\eta' R\cos(\sigma' - \omega) \pm 2R(p - \xi')\cos\sigma'$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \chi) = \frac{r\sin\varphi\cos\chi - r\cos\varphi\sin\chi}{r\cos\varphi\cos\chi + r\sin\varphi\sin\chi}$$
$$= \frac{\eta'\sin(\sigma' - \omega) - (p - \xi')\sin\sigma'}{R \mp \eta'\cos(\sigma' - \omega) \pm (p - \xi')\cos\sigma'}$$

Beginnen wir die Anomalie zu zählen bei einem Punkte, in welchen die bewegende $\xi'$ Achse den Kreis in dem Berührungspunkte schneidet, so ist der Bogen zwischen einem Berührungspunkte und dem genannten Punkte dem Bogen der Ellipse gleich. Nennen wir diesen Bogen $B$, so ist

$$\psi = \frac{B}{R} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta'\sin(\sigma' - \omega) - (p - \xi')\sin\sigma'}{R \mp \eta'\cos(\sigma' - \omega) \pm (p - \xi')\cos\sigma'}$$

Wir müssen bestimmen, wann der Radiusvector ein Maximum oder ein Minimum wird, hier muss $dr = 0$ sein.

$$\frac{r\,dr}{ds} = -(p - \xi')\frac{d\xi'}{ds} + \eta'\frac{d\eta'}{ds} + \frac{d\xi'}{ds}\eta'\cos\omega$$
$$-(p - \xi')\frac{d\eta'}{ds}\cos\omega \mp R\frac{d\eta'}{ds}\cos(\omega - \sigma')$$
$$\mp R\eta'\sin(\omega - \sigma')\frac{d\sigma'}{ds} \mp R\frac{d\xi'}{ds}\cos\sigma' \mp R(p - \xi')\sin\sigma'\frac{d\sigma'}{ds}$$

Folglich soll nach Substitution sein:

$$0 = \{\beta(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta + \beta'^2\cos\Theta\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega\sin^2\Theta$$
$$-(p - \beta\cos\Theta)\beta'\cos\Theta\cos\omega\}\frac{d\Theta}{ds} \mp R\frac{d\sigma'}{ds}\{\eta'\sin(\omega - \sigma') + (p - \xi')\sin\sigma'\}$$

oder

$$0 = \{\beta(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta + \beta'^2\sin\Theta\cos\Theta + \beta\beta'\cos\omega(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)$$
$$- p\beta'\cos\Theta\cos\omega\} \times$$

$$\left\{1 \pm R\,\beta\beta' \sin\omega \left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3\right\} \tag{1'}$$

Dieser Gleichung genügt

$$\beta(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta + \beta'^2 \sin\Theta\cos\Theta + \beta\beta'\cos\omega(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)$$
$$- p\beta'\cos\Theta\cos\omega = 0$$

Welche Formel ganz übereinstimmt mit der Formel (1) und also Anleitung zu denselben Betrachtungen gibt.

Wälzt sich die Ellipse ausserhalb des Kreises, so kann nimmer

$$1 + R\beta\beta'\sin\omega\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 = 0$$

sein, weil $\frac{d\Theta}{ds}$ positiv ist.

Jedoch kann sehr gut, wenn die Ellipse den Kreis inwendig berührt,

$$1 - R\beta\beta'\sin\omega\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 = 0$$

sein. Jetzt ist

$$\beta\beta'\sin\omega\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 = \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{1}{q'}$$

in welcher Formel $q'$ der Krümmungsradius der Ellipse ist. Die Bedingung für einen Scheitel ist also $R = q'$, aber wenn $a > b$ ist, so hat man bei einer Ellipse

$$\frac{b^2}{a} < q' < \frac{a^2}{b}$$

oder

$$\frac{b^2}{a} < R < \frac{a^2}{b}$$

Liegt nun der Wert von $R$ zwischen dem grössten und dem kleinsten Krümmungsradius der Ellipse, so hat die Curve noch zwei Scheitel.

Wir müssen für diese Punkte $\Theta$ bestimmen, dazu bringen wir die Gleichung in die Form:

$$\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\omega = \sqrt[3]{(R^2\beta^2\beta'^2\sin^2\omega)}$$

Substituiren wir in diese Formel die Gleichungen (a) und $\varepsilon$ für $\Theta + \psi$, so finden wir

$$a^2\sin^2\varepsilon + b^2\cos^2\varepsilon = \sqrt[3]{R^2a^2b^2}$$

und

$$\cos^2\varepsilon = \frac{a^2 - \sqrt[3]{a^2 b^2 R^2}}{a^2 - b^2}$$

Dieser Wert von $\varepsilon$ ist also unabhängig vom Orte des beschreibenden Punktes. Soll $\varepsilon$ reell sein, so muss $R$ der oben genannten Bedingung genügen.

Für die Wendepunkte finden wir mittels der Formel (V*)

$$\pm \frac{\beta'(\beta - p\cos\Theta)}{\sqrt{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega)}}$$
$$= \left\{\frac{1}{R} \pm \frac{\beta\beta'\sin\omega}{\sqrt{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2\cos^2\Theta - 2\beta\beta'\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega)^3}}\right\}$$
$$\times \{\beta'^2\sin^2\Theta + (p - \beta\cos\Theta)^2 - 2\beta'(p - \beta\cos\Theta)\sin\Theta\cos\omega\} \qquad (2')$$

Der Krümmungsradius $P$ kann null werden, wenn die Ellipse und der Kreis einander inwendig berühren, so

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{1}{q'} \quad \text{oder} \quad R = q' \quad \text{ist.}$$

Dieses ist der Fall in den hier oben gefundenen exceptionellen Scheiteln, diese Punkte sind also Spitzen.

Die Formeln (VI) und (VII) können nur angewendet werden, wenn $R$ nicht liegt zwischen $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{b^2}{a}$.

Auch hier werden wir einige Fälle untersuchen, jedoch sind die Gleichungen nur in den einfachsten Fällen zu lösen, weil immer eine Quadrirung vermieden werden muss.

1. Der beschreibende Punkt liegt auf einer Hauptachse.

Wir werden damit anfangen, in diesem Falle den Ort der Doppelpunkte zu suchen.

Für zwei Punkte der Curve in einem Doppelpunkte muss $r = r'$ und $\psi = \psi'$ sein.

$$r^2 = R^2 + p^2 - 2ap\cos\Theta + a^2\cos^2\Theta + b^2 - b^2\cos^2\Theta$$
$$\pm 2bR \frac{a - p\cos\Theta}{\sqrt{\{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\Theta\}}}$$
$$= R^2 + p^2 - 2ap\cos\Theta' + a^2\cos^2\Theta' + b^2 - b^2\cos^2\Theta'$$
$$\pm 2bR \frac{a - p\cos\Theta'}{\sqrt{\{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\Theta'\}}}$$

Dieser Formel wird genügt durch

$$\cos\theta = \cos\theta' \quad \text{das ist} \quad \theta' = 2n\pi - \theta$$

Sollen die $\psi$ einander gleich sein, so muss sein

$$\frac{1}{R}\int_0^{\theta}(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta-\operatorname{arctg}\frac{\{ap-(a^2-b^2)\cos\theta\}\sin\theta}{R\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}-b(a-p\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{R}\int_0^{\theta'}(a^2\sin^2\theta'+b^2\cos^2\theta')^{\frac{1}{2}}d\theta'$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{\{ap-(a^2-b^2)\cos\theta'\}\sin\theta'}{R\sqrt{(a^2\sin^2\theta'+b^2\cos^2\theta')}-b(a-p\cos\theta')}$$

Substituiren wir in diese Formel den Wert für $\theta'$, so finden wir

$$\frac{1}{R}\int_0^{2n\pi-\theta}(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta-\frac{1}{R}\int_0^{\theta}(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{\{ap-(a^2-b^2)\cos\theta\}\sin\theta}{R\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}-b(a-p\cos\theta)}$$

Der erste Teil dieser Gleichung ist

$$\frac{4nbK}{R}-\frac{2}{R}\int_0^{\theta}(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

folglich in einem Doppelpunkte

$$\psi = \frac{2nbK}{R}$$

Sind die Umfänge der Ellipse und des Kreises unter einander messbar, während ihr Verhältniss $t:s$ ist, so ist

$$4sbK = 2\pi Rt$$

folglich

$$\psi = n\frac{t\pi}{s}$$

Der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Linien, auf welchen die Doppelpunkte liegen, ist also gleich $\frac{\pi}{s}$, also liegen die Doppelpunkte auf den Linien, welche die Oberfläche um den Mittelpunkt des Kreises in $2s$ gleiche Sectoren teilen [1]). Leicht kann man zeigen, dass diese Linien auch Linien von Symmetrie sind.

---

1) Arch. der Math. u. Phys. 2. Reihe, Teil VII. p. 209.

Aus der Formel (1') folgt, dass die Scheitel gefunden werden für $\theta = n\pi$ und $\cos\theta = \frac{pa}{a^2-b^2}$.

Wir finden dann für

$$\theta = 2n\pi \qquad r = R \pm (a-p) \qquad \psi = \frac{4nbK}{R}$$

$$\theta = (2n+1)\pi \qquad r = R \pm (a+p) \qquad \psi = (2n+1)\frac{2bK}{R}$$

Für $\theta = \arccos\frac{pa}{a^2-b^2}$, im Falle dass dies $\theta$ reell ist.

$$r^2 = R^2 + \frac{a^2-b^2-p^2}{a^2-b^2} \pm 2Rb\sqrt{\frac{a^2-b^2-p^2}{a^2-b^2}}$$

oder

$$r = R \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2-p^2}{a^2-b^2}}$$

Für den Ort der Wendepunkte gibt uns (2')

$$\pm\frac{b(a-p\cos\theta)}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}} = \left\{\frac{1}{R} \pm \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^3}}\right\} \times \{b^2\sin^2\theta+(p-a\cos\theta)^2\} \qquad (2'')$$

Für den Krümmungsradius folgt aus IV*

$$P = \{b^2\sin^2\theta+(p-a\cos\theta^2\}^{\frac{3}{2}} \qquad (3'')$$

$$\left\{\mp\frac{b(a-p\cos\theta)}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\sin^2\theta)}}\frac{1}{R\pm\frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^3}}} + b^2\sin^2\theta+(p-a\cos\theta)^2\right\}$$

Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $a > b$ und $p^2 = a^2-b^2 = c^2$.

Die Radienvectoren der Scheitel werden also für

$$\theta = 2n\pi \qquad r = R \pm (a-c) \qquad \psi = \frac{4nbK}{R}$$

$$\theta = (2n+1)\pi \qquad r = R \pm (a+c) \qquad \psi = (2n+1)\frac{2bK}{R}$$

Die Radienvectoren der Spitzen, wenn es diese gibt, sind

$$r^2 = R^2 + 2a^2 - 3\sqrt[3]{a^2b^2R^2} - \frac{r}{a}(a^2 - \sqrt[3]{a^2b^2R^2})^{\frac{3}{2}}$$

Wir müssen jetzt suchen, ob die Curve Wendepunkte haben wird Die Formel (2″) gibt:

$$\pm \frac{b(a - c\cos\Theta)}{(a^2 - c^2\cos^2\Theta)^{\frac{1}{2}}} = \left\{\frac{1}{R} \pm \frac{ab}{(a^2 - c^2\cos^2\Theta)^{\frac{3}{2}}}\right\}(a - c\cos\Theta)^2$$

$$\pm b(a^2 - c^2\cos^2\Theta) = \frac{1}{R}(a^2 - c^2\cos^2\Theta)^{\frac{3}{2}}(a - c\cos\Theta) \pm ab(a - c\cos\Theta)$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $a - c\cos\Theta$, was nur für einen imaginären Wert. null ist,

Wir haben auch

$$\pm bc\cos\Theta = \frac{1}{R}(a^2 - c^2\cos^2\Theta)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$R^2 b^2 c^2 \cos^2\Theta = (a^2 - c^2\cos^2\Theta)^3$$

Sei $\cos^2\Theta = x$, so haben wir eine Gleichung vom dritten Grade.

$$c^6 x^3 - 3a^2 c^4 x^2 + (3a^4 c^2 + R^2 b^2 c^2)x - a^6 = 0$$

Setzen wir $\frac{a^2}{c^2} = t^2$ und $x = y + t^2$, so finden wir:

$$y^3 + \frac{R^2 b^2}{c^4} y + \frac{R^2 b^2 a^2}{c^6} = 0$$

Der Coefficient der ersten Potenz der Unbekannten ist immer positiv, folglich gibt es immer nur eine reelle Wurzel.

Ausserdem muss $0 < x < 1$ sein.

Für $x = 0$ wird die Linke negativ,
„ $x = 1$ wird sie $\{-b^4 + R^2 c^2\} b^2$

folglich ist sie negativ für $b^2 > Rc$, alsdann gibt es keinen Wendepunkt (Fig. 7.);

sie ist positiv für $b^2 < Rc$, alsdann besteht wol ein Wendepunkt (Fig. 8., die Curven *a. a. a.* und *b. b. b.*)

3. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

Nehmen wir $b > a$ und $p$ ist 0.

Die Scheitel werden gefunden nach (1) für $\Theta = \frac{1}{2}n\pi$ und zwar

für $\Theta = 2n\frac{1}{2}\pi$ $\quad r = R \pm a \quad$ und $\quad \psi = 2n\frac{bK}{R}$

für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ $\quad r = R \pm b \quad$ und $\quad \psi = (2n+1)\frac{bK}{R}$

Gibt es Spitzen, so ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises

$$r^2 = R^2 + a^2 + b^2 - 3\sqrt[3]{a^2 b^2 R^2}$$

Bestimmen wir jetzt, wann die Curve Wendepunkte haben wird. Die Formel (2″) gibt:

$$\pm ab(b^2 - a^2)\cos 2\Theta = \frac{1}{R}(b^2 \sin^2\Theta + a^2 \cos^2\Theta)\sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)^3}$$

$$\pm ab\{2(b^2 \cos 2\Theta + a^2 \sin^2\Theta) - (b^2 + a^2)\} = \frac{1}{R}\{(b^2 + a^2)$$
$$-(b^2 \cos^2\Theta + a^2 \sin^2)\Theta\}\sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)^3}$$

Sei $\sqrt{(a^2 \sin^2\Theta + b^2 \cos^2\Theta)} = y$

$$\pm Rab\{2y^2 - (a^2 + b^2)\} = \{(b^2 + a^2) - y^2\}y^3$$

oder

$$y^5 - (a^2 + b^2)y^3 \pm 2Raby^2 \mp Rab(b^2 + a^2) = 0$$

Betrachten wir erstens den Fall, dass sich die Ellipse ausserhalb des Kreises wälzt, so haben wir:

$$y^5 - (a^2 + b^2)y^3 + 2Raby^2 - Rab(b^2 + a^2) = 0$$

Diese Gleichung vom fünften Grade hat höchstens drei positive und zwei negative reelle Wurzeln, denn welches Zeichen wir den fehlenden Gliedern geben, wir finden immer drei Zeichenwechsel und zwei Zeichenfolgen. Für die Curve können jedoch nur die Werte, welche zwischen $+b$ und $+a$ liegen, gebraucht werden, während wir $b > a$ voraussetzen; die negativen Wurzeln fallen also weg.

Vermindern wir die Wurzeln mit $a$, indem wir für $y$ substituiren $y + a$, so finden wir:

$$y^5 + 5ay^4 + (9a^2 - b^2)y^3 + a(7a^2 - 3b^2 + 2Rb)y^2$$
$$+ a^2\{2a^2 - 3b^2 + 4Rb\}y - ab\{a^2 b + R(b^2 - a^2)\} = 0$$

Die beiden letzten Glieder sind negativ. Das vierte Glied kann negativ oder positiv sein, aber wenn das dritte negativ ist, also für $b^2 > 9a^2$, so ist das vierte es auch, folglich hat diese Gleichung nur einen Zeichenwechsel, also eine positive Wurzel.

Vermindern wir nun die Wurzeln der Gleichung mit $b$ durch Substitution von $y + b$ für $y$, so hat man

$$y^5 + 5by^4 + (9b^2 - a^2)y^3 + b(7b^2 - 3a^2 + 2Ra)y^2$$
$$+ b^2(2b^2 - 3a^2 + 4Ra)y - ab\{ab^2 - R(b^2 - a^2)\} = 0$$

Das letzte Glied wird immer positiv sein für $a < R\frac{b^2 - a^2}{b^2}$, dann ist

das vorletzte Glied auch positiv, denn nehmen wir im ungünstigsten Falle $R = \frac{ab^2}{b^2 - a^2}$, so wird dieses Glied $\frac{2(a^2-b^2)^2+a^4+3a^2b^2}{b^2-a^2}$. Das dritte Glied wird dann $\frac{4(a^2-b^2)^2+3b^4-a^4}{b^2-a^2}$, also auch positiv. Die Gleichung hat jetzt nur Zeichenfolgen und wir finden also nur eine reelle Wurzel zwischen $a$ und $b$; folglich hat die Curve nur einen Wendepunkt (Fig. 8. *e. e. e.*) Für $a > R\frac{b^2-a^2}{b^2}$ hat die letzte Gleichung immer noch eine Zeichenfolge, also liegt keine Wurzel zwischen $a$ und $b$ und die Curve hat keinen Wendepunkt (Fig. 8. *d. d. d*).

Betrachten wir jetzt den Fall, dass die Ellipse und der Kreis einander inwendig berühren, so ist die Gleichung:

$$y^6-(a^2+b^2)y^3-2Raby^2+Rab(a^2+b^2)=0$$

Welches Zeichen wir auch den fehlenden Gliedern geben mögen, immer hat man drei Zeichenfolgen und zwei Zeichenwechsel, also höchsens zwei positive Wurzeln. Auch diese müssen zwischen $a$ und $b$ liegen. Wir finden, da die negativen Wurzen ausser Betracht bleiben: für

$y=\infty$ $f(y)$ ist $+$

$y=b$ $f(y)=-ab\{ab^2+R(b^2-a^2)\}$ also $-$

$y=a$ $f(y)=-ab(ba^2-R(b^2-a^2)\}$ also $+$ oder $-$

$y=0$ $f(y)$ ist $+$

Eine positive Wurzel liegt immer zwischen $b$ und $\infty$, die andere wird zwischen $b$ und $a$ liegen, wenn

$$ba^2 < R(b^2-a^2) \quad \text{oder} \quad R > b\frac{a^2}{b^2-a^2}$$

Die Curve hat also einen Wendepunkt (Fig. 8. *c. c. c.* und *f. f. f.*).

Für $R < b\frac{a^2}{b^2-a^2}$ hat die Gleichung keine Wurzel zwischen $a$ und $b$, die Curve hat also keinen Wendepunkt.

Für die Krümmungsradien in den Scheiteln finden wir für

$$\theta = 2n\tfrac{1}{2}\pi \qquad P = \frac{a^2(b^2 \pm aR)}{\mp Rb^2 + ab^2 \pm a^2R}$$

$$\theta = (2n+1)\tfrac{1}{2}\pi \qquad P = \frac{b^2(a^k \pm bR)}{\mp Ra^2 + ba^2 \pm b^2R}$$

III. Die Ellipse wälzt sich längs einer congruenten Ellipse, während die entsprechenden Elemente einander berühren.

Wir finden mittels (I) die Coordinaten der gesuchten Curve, wenn wir in diese substituiren

$$\xi = \xi'; \quad \eta = \eta'; \quad \omega = 90^0 \quad \text{und} \quad \sigma = \sigma'$$

also

$$x = \xi + \eta \sin 2\sigma - (p - \xi) \cos 2\sigma \qquad (\text{I}^*)$$
$$y = \eta - \eta \cos 2\sigma - (p - \xi) \sin 2\sigma$$

Diese Formeln können wir transformiren durch $\xi - p = \xi''$ und $x - p = x'$ zu setzen

$$x' = \xi'' + \eta \sin 2\sigma + \xi'' \cos 2\sigma \qquad (\text{I}^{**})$$
$$y = \eta - \eta \cos 2\sigma + \xi'' \sin 2\sigma$$

Den Coordinatenanfangspunkt haben wir jetzt versetzt in den Punkt der Directrix, der übereinstimmt mit dem beschreibenden Punkt der Generatrix.

Bestimmen wir für eine Curve $f(x_1 y_1)$ die Fusspunktlinie in Bezug auf einen bestimmten Punkt, den wir als Coordinatenanfang nehmen, so muss jeder Punkt der Fusspunktlinie den Gleichungen genügen:

$$x \operatorname{tg} \sigma = y. \qquad (x_1 - x) \operatorname{tg} \tau = y_1 - y$$

Folglich

$$x = \frac{x_1 + y_1 \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg}^2 \sigma}, \quad \text{denn} \quad \operatorname{tg} \tau = -\operatorname{cotg} \sigma$$

also

$$x = \frac{x_1 + y_1 \operatorname{tg} \sigma}{\sec^2 \sigma} = x_1 \cos^2 \sigma + y_1 \sin \sigma \cos \sigma$$

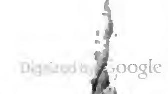
$$y = \frac{x_1 + y_1 \operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{cotg} \sigma + \operatorname{tg} \sigma} = y_1 \sin^2 \sigma + x_1 \sin \sigma \cos \sigma$$

Die Coordinaten der Fusspunktlinie sind also

$$2x = x_1 + y_1 \sin 2\sigma + x_1 \cos 2\sigma \qquad (\text{I}^{***})$$
$$2y = y_1 - y_1 \cos 2\sigma + x_1 \sin 2\sigma$$

Sind die Directrix und die Generatrix gleichförmig mit der Curve $f(x_1 y_1)$, so sind in den Gleichungen (I**) und (I***) die $\sigma$ gleich. Die gesuchten Curven werden auch dieselben sein, wenn $\xi'' = \frac{1}{2} x_1$ und $\eta = \frac{1}{2} y_1$; dieses ist der Fall, wenn die Parameter der ersteren die Hälfte sind von jenen der letzteren.

Dieses lehrt uns also, dass die Fusspunktlinie einer gegebenen Curve in Bezug auf einen bestimmten Punkt der Weg ist, der durch-



laufen durch den entsprechenden Punkt einer Curve, welche mit der gegebenen gleichförmig ist, deren Parameter jedoch die Hälfte von jenem sind, und der wälzt längs einer Curve, welche mit ihr congruent ist, während immer entsprechende Elemente einander berühren [1]). Der Coordinatenanfangspunkt ist der Punkt, aus welchem die Normalen gezogen werden, also der Punkt der Directrix, der übereinstimmt mit dem beschreibenden Punkte der Generatrix.

Wir werden nur einige Bemerkungen über einige besonderen Fälle machen. Sei der Mittelpunkt der beschreibende Punkt, so gibt uns (I*)

$$x = \frac{2ab^2\cos\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \quad \text{und} \quad y = \frac{2ba^2\sin\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$

Folglich

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2)}$$

oder auf Polarcoordinaten

$$r = 2\sqrt{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}$$

Diese letzte Gleichung gibt eine einfache Construction der Curve (Fig. 9.). $r$ ist dem Radiusvector der Ellipse gleich, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, und $\varphi$ ist die excentrische Anomalie. Hat man $r$ auf die bekannte Weise construirt, so setzt man es auf eine Linie, welche mit der $X$ Achse einen Winkel $\varphi$ macht.

Die Scheitel in Bezug auf die $Y$ Achse finden wir also

$$\frac{dx}{d\theta} = 2ab^2\frac{(a^2 + a^2\cos^2\theta - b^2\cos^2\theta)\sin\theta}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2} = 0$$

folglich

$$\sin\theta = 0 \quad \text{oder} \quad \theta = n\pi$$

und

$$\cos^2\theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad \text{oder} \quad \sin^2\theta = \frac{b^2 - 2a^2}{b^2 - a^2}$$

Dieser Wert ist nur reell für $b > a\sqrt{2}$.

Bestimmen wir die Länge dieser Curve, so finden wir

$$L = 8b\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\theta)}}{l^2 + k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

oder

$$L = 8b\{(1 + l^2)\,\Pi(l.k.\tfrac{1}{2}\pi) - F(k.\tfrac{1}{2}\pi)$$

Dieses stimmt mit den Formeln (VI) und ($\gamma$) überein.

---

1) Jacob Steiner's gesammelte Werke. II. Bd. Seite 157.

Für die durch die Curve eingeschlossene Oberfläche finden wir

$$O = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 = 4\pi v^2$$

Also ist sie der Oberfläche eines Kreises, welcher eine der gleichen Achsen der Generatrix als Radius hat, gleich.

Aus der Formel (I*) folgt für den Weg, welchen ein Brennpunkt durchläuft,

$$y^2 + (x + c)^2 = 4a^2$$

also ist, wie zu erwarten war, dieser Weg ein Kreis, dessen Radius die halbe grosse Achse der Ellipse ist.

Für die Oberfläche dieses Kreises fanden wir nach (VIII)

$$O = 2\pi a^2 + 2\pi b^2 + 2\pi c^2 = 4\pi a^2$$

Die Länge dieser Curve ist $4\pi a$, was auch übereinstimmt mit den Formeln (VI) und ($\beta$).

Endlich werden wir den Weg bestimmen, welchen die Scheitel der Ellipse durchlaufen, diese Curve stimmt auch überein mit der Fusspunktlinie einer Ellipse in Bezug auf einen der Scheitel. Weil diese Curve weniger bekannt ist, werden wir sie ein wenig genauer betrachten,

Aus der Formel (I*) folgt, da $p = a$ ist, nach Substitution der Werte für $\xi$, $\eta$ und $\sigma$:

$$x = a\cos\Theta + \frac{2ab^2\sin^2\Theta\cos\Theta - a(1-\cos\Theta)(b^2\cos^2\Theta - a^2\sin^2\Theta)}{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta}$$

oder

$$x = a\,\frac{2b^2\cos\Theta - b^2\cos^2\Theta + a^2\sin^2\Theta}{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta}$$

folglich

$$x - a = 2ab^2\,\frac{\cos\Theta(1-\cos\Theta)}{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta}$$

Auch finden wir:

$$y = 2a^2b\,\frac{\sin\Theta(1-\cos\Theta)}{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta}$$

also

$$\frac{y}{x-a} = \frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\Theta$$

und

$$\{(x-a)^2 + y^2\}^2 = 4a^2(\sec\Theta - 1)^2(x-a)^2$$

Sei

$$x - a = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

so wird

$$r + 2a\cos\varphi = 2\sqrt{\{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi\}}$$

Um die Scheitel zu finden, haben wir

$$\frac{dx}{ds} = 2\{\eta\cos 2\sigma + 2(a-\xi)\sin 2\sigma\}\frac{d\sigma}{ds}$$

folglich muss

$$\eta(1-2\sin^2\sigma) + 2(a-\xi)\cos\sigma\sin\sigma = 0 \quad \text{sein}$$

$$b\sin\Theta(b^2\cos^2\Theta - a^2\sin^2\Theta) + 2ba^2(1-\cos\Theta)\cos\Theta\sin\Theta = 0$$

also

$$\sin\Theta = 0 \quad \text{demnach} \quad \Theta = n\pi$$

In diesen Scheiteln ist

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = a \quad \text{oder} \quad x = 3a$$

Auch ist

$$(b^2 - a^2)\cos^2\Theta + 2a^2\cos\Theta - a^2 = 0$$

was uns gibt

$$\cos\Theta = \frac{a}{a \mp b}$$

Sollen beide Werte reell sein, so muss $b > 2a$ sein.

Für die Punkte ist

$$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \quad \text{oder} \quad x - a = \frac{b^2}{a+b}$$

und

$$y = \frac{b}{a \mp b}\sqrt{b(b \mp 2a)}$$

Für $x = a$ ist

$$\Theta = 0 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\pi$$

daher

$$y = 0 \quad \text{ooer} \quad y = 2b$$

Um die Wendepunkte zu bestimmen, haben wir nach (V)

$$\eta\sin\sigma - (a-\xi)\cos\sigma = -\frac{2}{9}k^2$$

Nach Substitution

$$\{ab\sin^2\Theta - ab(1-\cos\Theta)\cos\Theta\}\frac{d\Theta}{ds}$$

$$= 2ab\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3\{b^2\sin^2\Theta + a^2(1-\cos\Theta)^2\}$$

$$(b^2 - a^2)\{\cos^2\Theta - 2\cos\Theta + 1\} = 3b^2$$

$$\cos\Theta = 1 \pm \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

Das positive Zeichen genügt nimmer, soll das andere Zeichen genügen, so muss

$$-1 < 1 - \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^k}}$$

oder

$$2 > \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2 - a^2}}$$

folglich, wie zu erwarten war, $b > 2a$ sein. (Fig. 10).

Die durch die Curve eingeschlossene Oberfläche ist

$$O = 4\pi a^2 + 2\pi b^2$$

### B. Die Generatrix ist eine Hyperbel.

Die Hyperbel sei gegeben in Bez. auf zwei conjugirte Achsen, welche einen Winkel $\omega$ mit einander machen. Sind die beiden halben Achsen wieder $\beta$ und $\beta'$, so wird die Gleichung der Hyperbel

$$\frac{\xi'^2}{\beta^2} - \frac{\eta'^2}{\beta'^2} = 1$$

Setzen wir

$$\xi' = \beta \sec\Theta \qquad \text{und} \qquad \eta' = \beta' \operatorname{tg}\Theta$$

so finden wir

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds}\sin\omega = +\beta\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta}\sin\omega\frac{d\Theta}{ds}$$

$$\cos\sigma' = -\frac{d\eta'}{ds}\sin\omega = -\beta'\frac{1}{\cos^2\Theta}\sin\omega\frac{d\Theta}{ds}$$

und

$$\left(\frac{ds}{d\Theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^4\Theta}\{\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega\}$$

Weiter ist

$$\frac{d\sigma'}{ds} = -\frac{\beta\cos\Theta}{\beta'\sin\omega}\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3\left(\frac{d\eta'}{ds}\right)^2\sin^2\omega$$

$$= -\frac{\beta\beta'\sin\omega\cos^3\Theta}{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sin(\omega - \sigma') = \frac{-\beta\sin\quad\cos\omega - \beta'}{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\sin\sigma' = \frac{\beta'\cos\omega + \beta\sin\Theta}{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)^{\frac{1}{2}}}$$

Auch müssen wir noch bemerken, dass nur die Werte von $\Theta$ einem Berührungspunkte der Hyperbel mit der Directrix genügen, welche liegen zwischen 90° bis 180° und von 180° bis 270°.

Wälzt sich jedoch die Hyperbel eine gerade Linie entlang, bis ihre Asymptote mit dieser zusammenfällt, so berührt auch der andere Zweig der Hyperbel die Linie. Wälzt sich dieser jetzt die Directrix entlang, bis die andere Asymptote mit der geraden Linie zusammenfällt, wonach sich der erstgenannte Zweig wieder längs der Linie wälzt, so bekommt man eine ununterbrochene Curve. In Wirklichkeit werden diese Curven nie durchlaufen, weil die Werte $\Theta = 90^0$ und $\Theta = 270^0$ bei einer endlichen Schnelligkeit nach einer unendlich grossen Zeit erreicht werden.

I. Die Hyperbel wälzt sich eine gerade Linie entlang.

Die allgemeine Formel (I) gibt uns wieder, weil $\sigma = 270^0$ ist,

$$x = \text{Hyperbelbogen} + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma'$$
$$y = \qquad\qquad - \eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma'$$

Nach Substitution finden wir

$$y = \frac{\{-\beta\beta' \sin\Theta \operatorname{tg}\Theta - (p - \beta\sec\Theta)\beta'\} \sin\omega}{\sqrt{\{\beta^2 \sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin\Theta \cos\omega)}}$$
$$= -\beta' \sin\omega \,\frac{p - \beta\cos\Theta}{\sqrt{\{\beta^2 \sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta' \sin\Theta \cos\omega\}}}\,.$$

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist

$$y = -\frac{p\beta' \sin\omega}{\sqrt{(\beta^2 + \beta'^2 \pm 2\beta\beta' \cos\omega)}}$$

$y$ nähert sich also bei der Bewegung einem bestimmten Werte, welchen sie jedoch nimmer erreichen wird. Der Nenner des gefundenen Bruches sind die Diagonalen eines Parallelogramms, welches auf den halben Achsen beschrieben ist.

Bestimmen wir den Winkel, welchen die Tangenten in diesen Punkten mit der $X$ Achse macht.

Nach (III) ist

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin\sigma'}{\eta' \cos(\omega - \sigma') - (p - \xi') \cos\sigma'}$$
$$= -\frac{(\beta^2 + \beta'^2) \operatorname{tg}\Theta + \beta\beta' \cos\omega\, (\operatorname{tg}\Theta \sin\Theta + \sec\Theta) - p(\beta\sin\Theta + \beta'\cos\Theta)}{\beta' \sin\omega (p - \beta\cos\Theta)}$$

Für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ wird

$$\operatorname{tg}\tau = \infty \qquad \text{also} \qquad \tau = \tfrac{1}{2}\pi$$

In den Culminationspunkten der Curve in Bezug auf die $X$ Achse muss $\frac{dy}{d\Theta} = 0$ sein.

$$\frac{dy}{d\Theta} = -\beta\beta'\sin\omega$$

$$\times \frac{(\beta^2+\beta'^2)\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega + \beta\beta'\sin^2\Theta\cos\omega - p\cos\Theta(\beta\sin\Theta + \beta'\cos\omega)}{(\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

also wird

$$(\beta^2+\beta'^2)\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega + \beta\beta'\cos\omega\sin^2\Theta - p\cos\Theta(\beta\sin\Theta + \beta'\cos\omega) = 0 \quad (1)$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht zu lösen.

Den Krümmungsradius finden wir mittels (IV)

$$P = \frac{\{\beta'^2\mathrm{tg}^2\Theta + (p - \beta\sec\Theta)^2 - 2\beta'\mathrm{tg}\Theta(p - \beta\sec\Theta)\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\{\beta'^2\mathrm{tg}^2\Theta + (p - \beta\sec\Theta)^2 - 2\beta'\mathrm{tg}\Theta(p - \beta\sec\Theta)\cos\omega\} - \frac{p - \beta\cos\Theta}{\beta\cos^3\Theta}}$$
$$\times (\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)$$

oder

$$P = \frac{\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p\cos\Theta - \beta)^2 - 2\beta'\sin\Theta(p\cos\Theta - \beta)\cos\omega\}^{\frac{3}{2}}}{\cos\Theta\{\beta'^2\sin^2\Theta + (p\cos\Theta - \beta)^2 - 2\beta'\sin\Theta(p\cos\Theta - \beta)\cos\omega\} - \frac{p - \beta\cos\Theta}{\beta}}$$

(4*) $$\times (\beta^2\sin^2\Theta + \beta'^2 + 2\beta\beta'\sin\Theta\cos\omega)$$

Für $\Theta = 2n\pi$ ist $P = \frac{(p-\beta)^2\beta}{p\beta - \beta^2 - \beta'^2}$

„ $\Theta = (2n+1)\pi$ „ $P = \frac{(p+\beta)^2\beta}{p\beta + \beta^2 + \beta'^2}$

„ $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ „ $P = \frac{\beta(\beta'^2 + \beta^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}{p(\beta^2 + \beta'^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)}$

$$= \frac{\beta}{p}\sqrt{(\beta'^2 + \beta^2 \pm 2\beta\beta'\cos\omega)}$$

Wälzt sich die Hyperbel bis die Asymptote mit der gegebenen Linie zusammenfällt, so kommt der Mittelpunkt in die gerade Linie. Wir können die Entfernung des Ortes, wo der Mittelpunkt kommt vom Punkte, in welchem die Scheitel der Hperbel' die gerade Linie berührte, bestimmen. Diese Entferuung ist gleich dem Unterschiede in Länge der Asymptote und eines halben Zweiges der Hyperbel. Diese Differenz ist bekanntlich eine endliche Grösse und zwar gleich [1]):

---

1) Schlömilch, Compendium. I. Bd p. 389 und II. Bd. p. 350.

$$V = \tfrac{1}{2}\pi a \left\{ \frac{k}{2} + (1/2)^2 \frac{k^3}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^5}{6} \cdot \cdot \cdot \cdot \right\}$$

in welcher Formel

$$k = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Diese Punkte können wir also näherungsweise bestimmen, wodurch wir die Curve construiren können.

a. Der beschreibende Punkt liegt auf der Hyperbel.

In diesem Falle ist $p = -\beta$ und folglich finden wir für die Culminationspunkte $y = 0$. Wir wollen sehen, ob die Formel (1') noch andere Culminationspunkte gibt, diese ist

$$(\beta^2 + \beta'^2)\sin\Theta + \beta\beta'\cos\omega(\sin^2\Theta + 1 + \cos\Theta) + \beta^2\cos\Theta\sin\Theta = 0$$

$$(\beta^2 + \beta'^2)\sin\tfrac{1}{2}\Theta + \beta\beta'\cos\omega\cos\tfrac{1}{2}\Theta(3 - 2\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta)$$
$$+ \beta^2\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta(2\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta - 1) = 0$$

folglich

$$\cos\tfrac{1}{2}\Theta = 0 \quad \text{also} \quad \Theta = n\pi$$

Diese sind die Punkte in der $X$ Achse.

$$2\beta^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta + \beta'^2\sin\tfrac{1}{2}\Theta + \beta\beta'\cos\omega\cos\tfrac{1}{2}\Theta(3 - 2\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta) = 0$$

$$2\beta^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta + \beta'^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta + 1) + \beta\beta'\cos\omega(3\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\Theta - 1) = 0$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta = y$, so wird die Gleichung:

$$\beta'^2 y^3 + 3\beta\beta'\cos\omega\, y^2 + (2\beta^2 + \beta'^2)y + \beta\beta'\cos\omega = 0$$

Sei für $y$ gesetzt $y - \frac{\beta}{\beta'}\cos\omega$; so finden wir

$$y^3 + \left(\frac{2\beta^2}{\beta'^2} + 1 - 3\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cos\omega\right)y - 2\frac{\beta^3}{\beta'^3}\cos\omega\sin^2\omega = 0$$

Sollen alle Wurzeln reell sein, so muss

$$\left(2\frac{\beta^3}{\beta'^3}\cos\omega\sin^2\omega\right)^2 + \frac{4}{27}\left(2\frac{\beta^2}{\beta'^2} + 1 - 3\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cos^2\omega\right)^3 < 0$$

sein; oder

$$-(\beta^2 - \beta'^2)^3 + 9(\beta^2 - \beta'^2)\beta^2\sin^2\omega + 27\beta'^2\beta^4\sin^4\omega < 0$$

Führen wir jetzt ein

$$\beta^2 - \beta'^2 = a^2 - b^2 \quad \text{und} \quad \beta\beta'\sin\omega = ab$$

in welchen Formeln $a$ und $b$ die halben Hauptachsen der Hyperbel sind, so finden wir

$$(a^2-b^2)^3-9(a^2-b^2)^2\frac{a^2b^2}{\beta'^2}-27\frac{a^4b^4}{\beta'^2}>0$$

oder

$$-(a^2-b^2)^4+\beta^2(a^2-b^2)^3-9(a^2-b^2)^2a^2b^2-27a^4b^4>0$$

folglich

$$\beta^2>\frac{a^8+5a^6b^2+15a^4b^4+5a^2b^6+b^8}{(a^2-b^2)^3}$$

Also sieht man, dass $a>b$ sein muss, sonst wird $\beta$ imaginär, übrigens kann $\beta$ der oben stehenden Bedingung immer genügen, weil $\beta$ wachsen kann bis $\infty$. Den kleinsten Wert des $\beta$ gibt die gefundene Formel. Genügt $\beta$ der Bedingung, so hat die Formel drei reelle Wurzeln und die Curve also im ganzen vier Culminationspunkte in Bezug auf die $X$ Achse. (Fig. 11. *a. a. a.*).

Für $\Theta=(2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist

$$y=\frac{\beta\beta'}{\sqrt{(\beta^2+\beta'^2\pm2\beta\beta'\cos\omega)}}$$

b. Der beschreibende Punkt liegt auf der reellen Hauptachse

Jetzt ist $\omega=90^0$, $\beta=a$ und $\beta'=b$.

Die Formel (1') gibt uns:

$$(a^2+b^2)\sin\Theta-pa\sin\Theta\cos\Theta=0$$

Folglich

$$\sin\Theta=0 \quad \text{also} \quad \Theta=n\pi$$

und

$$\cos\Theta=\frac{a^2+b^2}{pa}$$

Soll $\cos\Theta$ reell sein, so muss $p>\frac{a^2+b^2}{a}$ sein. Wir werden sehen ob die Curve auch Wendepunkte hat.

Die Formel (V) gibt

$$\{b^2\operatorname{tg}^2\Theta+(p-a\sec\Theta)^2\}ab\cos\Theta=b(-a\cos\Theta+p)(a^2\sin^2\Theta+b^2)$$

$$ab^2\sin^2\Theta\cos\Theta+ap^2\cos^3\Theta-2a^2p\cos^2\Theta+a^3\cos\Theta$$
$$=pa^2\sin^2\Theta-a^3\sin^2\Theta\cos\Theta+pb^2-ab^2\cos\Theta$$

$$a\{p^2-(a^2+b^2)\}\cos^3\Theta-a^2p\cos^2\Theta+2a(a^2+b^2)\cos\Theta-p(a^2+b^2)=0 \tag{2'}$$

Auch diese Gleichung ist nur in einigen Fällen zu lösen.

Wir werden die Oberfläche bestimmen, welche eingeschlossen wird durch die Curve, die Linie und die Ordinaten beim Anfang und beim Ende einer Wälzung.

Jetzt ist

$$O = \int y\,dx \quad \text{und} \quad dx = y\,d\sigma'$$

also

$$O = \int y^2\,d\sigma'$$

folglich ist

$$O = -2ab^3 \int_{\pi}^{3/2\pi} \frac{(p - a\cos\Theta)^2}{(c^2 - a^2\cos^2\Theta)^2}\cos\Theta\,d\Theta$$

$$p^2 \int \frac{\cos\Theta\,d\Theta}{(c^2 - a^2\cos^2\Theta)^2} = \frac{p^2}{2b^2}\,\frac{\sin\Theta}{b^2 + a^2\sin^2\Theta} + \frac{p^2}{2b^3a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\sin\Theta\right)$$

$$a^2 \int \frac{\cos^3\Theta\,d\Theta}{(c^2 - a^2\cos^2\Theta)^2} = \frac{a^2 + b^2}{2b^2}\,\frac{\sin\Theta}{b^2 + a^2\sin^2\Theta} + \frac{a^2 - b^2}{2b^3a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\sin\Theta\right)$$

$$-2ap \int \frac{\cos^2\Theta\,d\Theta}{(c^2 - a^2\cos^2\Theta)^2} = -\frac{ap}{b^2}\,\frac{\operatorname{tg}\Theta}{b^2 + c^2\operatorname{tg}^2\Theta} - \frac{ap}{b^3c}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\Theta\right)$$

folglich ist

$$O = ab\,\frac{p^2 + b^2 + a^2}{b^2 + a^2} + \{p^2 - b^2 + a^2\}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + a^2\frac{p}{c}\pi \tag{3'}$$

Wälzt sich der andere Zweig der Hyperbel die gerade Linie entlang, während der beschreibende Punkt derselbe bleibt, so sind die Grenzen der Integrale 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und also

$$O = -ab\,\frac{p^2 + b^2 + a^2}{b^2 + a^2} - (p^2 - b^2 + a^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + a^2\frac{p}{c}\pi$$

Folglich ist die ganze Oberfläche

$$= 2a^2\frac{p}{c}\pi \tag{4'}$$

c. Der Scheitel ist der beschreibende Punkt.

Sei $p = -a$ (Fig. 12. *a. a. a.*). In den Culminationspunkten ist $y = 0$ und $y = 2a$. Die Formel (1') gibt für die anderen Culminationspunkte

$$\sin\Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos\Theta = -\frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

aber dieser Wert ist imaginär.

Aus der Formel (2') finden wir

$$b^2\cos^3\Theta - a^2\cos^2\Theta - 2(a^2 + b^2)\cos\Theta - (a^2 + b^2) = 0$$

Diese Gleichung kann dividirt werden durch $\cos\Theta+1$, und wir haben ausser

$$\Theta=(2n+1)\pi$$

auch

$$b^2\cos^2\Theta-(a^2+b^2)\cos\Theta-(a^2+b^2)=0$$

Wir finden eine positive Wurzel, welche nicht genügt, weil dieses $\cos\Theta>1$, und eine negative:

$$\cos\Theta=\frac{a^2+b^2}{2b^2}-\frac{1}{2b^2}\sqrt{\{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)b^2\}}$$

Jetzt muss auch sein

$$-1<\frac{a^2+b^2}{2b^2}-\frac{1}{2b^2}\sqrt{\{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)b^2\}}$$

$$3b^2+a^2>\sqrt{\{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)b^2\}}$$

oder

$$4b^4>0$$

also immer eine reelle Wurzel, folglich hat die Curve immer einen Wendepunkt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Für | $\Theta=2n\pi$ | ist | $P=\dfrac{4a^3}{2a^2+b^2}$ |
| „ | $\Theta=(2n+1)\pi$ | „ | $P=0$ |
| „ | $\Theta=(2n+1)\frac{1}{2}\pi$ | „ | $P=c$ |

d. Der Brennpunkt sei der beschreibende Punkt.

Jetzt ist $p=-c$ und $c^2=a^2+b^2$ (Fig. 12. *b. b. b.*)

Wir finden für die Culminationspunkte

$$y=a-c \quad \text{und} \quad y=a+c$$

Die Formel (1′) gibt uns auch

$$\sin\Theta=0 \quad \text{und} \quad \cos\Theta=-\frac{c}{a}$$

dieser Wert ist immer imaginär.

Für $\Theta=(2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist $y=b$ (Fig. 12. *b′. b′.*).

Um die Wendepunkte zu finden, gibt uns die Formel (2′)

$$a^2\cos^2\Theta+2ac\cos\Theta+c^2=0$$

folglich

$$a\cos\Theta+c=0 \quad \text{also} \quad \cos\Theta=-\frac{c}{a}$$

gleichfalls imaginär.



Der Krümmungsradius in jedem Punkte der Curve ist nach (IV)

$$P = \frac{a\{b^2\mathrm{tg}^2\Theta + (-c - a\sec\Theta)^2\}^{\frac{3}{2}}\cos^3\Theta}{-\{a\,\mathrm{tg}\,\Theta\sin\Theta + (-c - a\sec\Theta)\}\{a^2\sin^2\Theta + b^2\} + a\{b^2\mathrm{tg}^2\Theta + (-c - a\sec\Theta)^2\}\cos^3\Theta}$$

und die Normale ist

$$k = \sqrt{\{b^2\mathrm{tg}^2\Theta + (-c - a\sec\Theta)^2\}}$$

folglich ist

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{k} = \frac{-(-c - a\cos\Theta)\{(c^2 - a^2\cos^2\Theta) + 2a\cos\Theta(a\cos\Theta + c)^2}{a(a\cos\Theta + c)^3} = \frac{1}{a}$$

Diese Curve gibt bei einer Rotation um die gerade Linie eine Oberfläche, die Plateau [1]) die Nodoide genannt hat. Diese Oberfläche kann der genannten Eigenschaft wegen eine Gleichgewichtsfläche einer Flüssigkeit, welche keinen auswendigen Kräften ausgesetzt ist, sein.

Für $\Theta = (2n + 1)\frac{1}{2}\pi$ ist $P = a$.

Um die Länge zu bestimmen, haben wir

$$L = \int \sqrt{(\eta'^2 + (p - \xi')^2)}\,d\sigma'$$

oder

$$L = -\int_0^{2\pi} \sqrt{\{(b^2\mathrm{tg}^2\Theta + (-c - a\sec\Theta)^2\}}\,\frac{ab\cos\Theta}{a^2\sin^2\Theta + b^2}\,d\Theta$$

$$= -2ab\int_0^{\pi} \frac{d\Theta}{c + a\cos\Theta}$$

folglich

$$L = -4ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(c + a)\cos^2\varphi + (c - a)\sin^2\varphi} = 2\pi a$$

Für die durch die Curve und die gerade Linie eingeschlossene Oberfläche finden wir nach (4′)

$$O = 2\pi a^2$$

Diese Oberfläche ist also immer gleich zweimal der Oberfläche eines Kreises, der einen Radius gleich der halben reellen Achse hat, und unabhängig von der imaginären Achse.

e. Der Mittelpunkt ist der beschreibende Punkt.

$p = 0$ und wir finden für die Culminationspunkte (Fig. 12. *c. e. c.*)

---

1) Plateau, Statique des liquides. Vol. I. p. 120.

$$y = \mp a \quad \text{und} \quad x = 2nV$$

Für $y = 0$, das ist für $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ ist $x = (2n+1)V$.

Aus der Formel (1') folgt

$$\sin\Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos\Theta = \infty$$

also keine anderen Culminationspunkte. Aus der Formel (2') haben wir:

$$-a(a^2+b^2)\cos^3\Theta + 2a(a^2+b^2)\cos\Theta = 0$$

folglich

$$\cos\Theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos\Theta = \pm\sqrt{2}$$

dieser Wert ist auch imaginär.

Für $\Theta = n\pi$ ist $P = \frac{a^3}{c^2}$.

Nach (3') finden wir für die eingeschlossene Oberfläche

$$O = ab + (a^2 - b^2)\,\text{arc tg}\,\frac{a}{b} \tag{δ}$$

Ist die Hyperbel gleichseitig, also $a = b$, so ist die Oberfläche $= a^2$, folglich dem Quadrate gleich, welches die halbe Achse als Seite hat.

f. Der beschreibende Punkt liegt auf der imaginären Achse.

Um den Weg eines Punktes zu bestimmen, der auf der imaginären Achse liegt, wechseln wir die $\xi'$- und die $\eta'$ Achse, so ist

$$\frac{\eta'^2}{a^2} - \frac{\xi'^2}{b^2} = 1$$

Setzen wir $\eta' = a\sec\Theta$ und $\xi' = -b\,\text{tg}\,\Theta$, so ist

$$\frac{d\eta'}{ds} = -\cos\sigma' = a\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d\xi'}{ds} = \sin\sigma = -b\frac{1}{\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{ds}$$

während

$$\frac{ds}{d\Theta} = \frac{1}{\cos^2\Theta}\sqrt{(a^2\sin^2\Theta + b^2)}$$

Wir finden

$$x = \text{Hyperbelbogen} - \frac{a^2\sec\Theta\sin\Theta + (p + b\,\text{tg}\,\Theta)b}{\sqrt{\{a^2\sin^2\Theta + b^2\}}}$$

und

$$y = -a\frac{p\sin\Theta - b\cos\Theta}{\sqrt{\{a^2\sin^2\Theta + b^2\}}}$$

Für $\Theta = 0$ ist $y = +a$

„ $\Theta = \frac{1}{2}\pi$ „ $y = -\frac{ap}{c}$

„ $\Theta = \pi$ „ $y = -a$

„ $\Theta = {}^3/_2\pi$ „ $y = +\frac{ap}{c}$

Um zu finden, ob die Curve auch Culminationspunkte in Bezug auf die $X$ Achse hat, differentiiren wir $y$ nach $\Theta$

$$\frac{dy}{d\Theta} = -a\frac{(p\cos\Theta + b\sin\Theta)(a^2\sin^2\Theta + b^2) - (p\sin\Theta - b\cos\Theta)a^2\sin\Theta\cos\Theta}{(a^2\sin^2\Theta + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

In einem Culminationspunkte muss also

$$bp\cos\Theta + a^2\sin\Theta + b^2\sin\Theta = 0$$

sein, oder

$$\operatorname{tg}\Theta = -\frac{bp}{a^2 + b^2}$$

Ist der Brennpunkt der conjugirten Hyperbel der beschreibende Punkt (Fig. 12. *d. d. d.*), so ist

$$p = c$$

folglich

$$\operatorname{tg}\Theta = -\frac{b}{c}$$

oder

$$\sin\Theta = \pm\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \text{und} \quad \cos\Theta = \mp\frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

dieses gibt

$$y = \mp a\frac{2bc}{\sqrt{\{a^2b^2 + b^2(b^2 + c^2)\}}} = \mp a\sqrt{2}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 + b^2)\sin\Theta - pb}{a\cos\Theta(p\sin\Theta - b\cos\Theta)}$$

Für $\Theta = n\pi$ ist $\operatorname{tg}\tau = -\frac{p}{a}$

„ $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ „ $\operatorname{tg}\tau = \infty$

also $\tau = 90^0$

$y = 0$ für $p\sin\Theta = b\cos\Theta$, so ist $\operatorname{tg}\tau = \infty$ oder $\tau$ gleichfalls $= 90^0$.

Die Curve schneidet also die gerade Linie immer senkrecht unabhängig von $p$.

Wir müssen jetzt untersuchen, ob die Curve Wendepunkte hat.

Aus der Formel (V) folgt in diesem Falle, da

$$\frac{d\sigma'}{d\Theta} = -\frac{ab}{\cos^3\Theta}\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^3 \text{ ist,}$$

$$-\frac{(p\sin\Theta - b\cos\Theta)}{b\cos^3\Theta}(a^2\sin^2\Theta + b^2) + \frac{a^2 + (p\cos\Theta + b\sin\Theta)^2}{\cos^2\Theta} = 0$$

oder

$$-(p\sin\Theta - b\cos\Theta)(a^2\sin^2\Theta + b^2) + ba^2\cos\Theta + b(p\cos\Theta + b\sin\Theta)^2\cos\Theta = 0$$

Betrachten wir nur den Fall $p = c$, so finden wir nach Substitution von $a^2 + b^2 = c^2$

$$-c^3\sin^3\Theta + b^2c\sin\Theta\cos^2\Theta + 2bc^2\cos\Theta = 0$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\Theta = y$ und $\frac{b}{c} = d$, so haben wir

$$y^3 - 2dy^2 - d^2y - 2d = 0$$

Sei $y = z + \frac{2}{3}d$, so finden wir

$$z^3 - \frac{7}{3}d^2z - 3\frac{7}{27}d^3 = 0$$

Eine Wurzel ist immer reell; sollen die beiden anderen auch reell sein; so muss

$$d^6\left\{\left(\frac{88}{27}\right)^2 - \frac{4}{27}\left(\frac{7}{3}\right)^3\right\} < 0$$

sein, oder

$$\left(\frac{2}{27}\right)^2 d^6\{44^2 - 7^3\} < 0$$

also muss sein

$$1593 < 0$$

Diese beiden Wurzeln sind also imaginär, folglich hat die Curve immer nur einen, aber auch nicht mehr als einen Wendepunkt. Uns bleibt noch übrig den Krümmungsradius zu bestimmen. Nach (IV) haben wir:

$$P = \frac{b\{a^2 + (p\cos\Theta + b\sin\Theta)^2\}^{\frac{3}{2}}}{-(p\sin\Theta - b\cos\Theta)(a^2\sin^2\Theta + b^2) + ba^2\cos\Theta + b(p\cos\Theta + b\sin\Theta)^2\cos\Theta}$$

Für $\Theta = n\pi$ ist $P = \frac{(a^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2 + p^2}$

„ $\Theta = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ „ $P = \frac{bc}{p}$

Ist jetzt $p = c$, so finden wir für $\operatorname{tg}\Theta = -\frac{b}{c}$

$$P = \frac{a^3\sqrt{2}}{b^2 + c^2}$$

und für $y = 0$ ist $\operatorname{tg}\Theta = \frac{b}{c}$, also ist

$$P = \sqrt{2(b^2 + c^2)}$$

II. Die Hyperbel wälzt sich eine congruente Hyperbel entlang, während entsprechende Elemente einander berühren.

Nach dem bei der Ellipse betrachteten Gesetze, werden die Curven, welche bei der Wälzung einer Hyperbel längs einer congruenten Hyperbel entstehen, Fusspunktlinien sein einer mit ihr gleichförmigen Hyperbel, welche zweimal grössere Parameter hat.

Der Weg, welchen bei dieser Wälzung ein Brennpunkt durchläuft, wird ein Teil eines Kreises sein, dessen Radius die grosse Achse der Hyperbel ist.

Der eine Brennpunkt durchläuft einen Kreis, welcher der Gleichung

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$$

genügt. Der andere einen Kreis mit der Gleichung

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$$

Beide Kreise werden bei der Wälzung von zwei Zweigen nur zum Teil durchlaufen; lässt man jedoch danach die beiden anderen Zweige einander entlang wälzen, so bekommt man ganze Kreise. Für die Punkte, welche bei endlicher Schnelligkeit nach unendlich grosser Zeit erreicht werden, ist

$$y = \pm\frac{2ab}{c}$$

Der Mittelpunkt durchläuft eine Curve, welche die Form einer Acht hat, jedoch wird nur die eine Hälfte durchlaufen, wenn man nicht auch die beiden anderen Zweige einander entlang wälzen lässt. Die Gleichung der Curve ist

$$r^2 = 4(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)$$

$r$ wird $= 0$ für $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$

Die Oberfläche, welche durch den durchlaufenen Teil eingeschlossen ist

$$O = \int r^2 d\varphi = 4\int_0^{\operatorname{arc\,tg} a/b} (a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)d\varphi = 4\int_0^{\operatorname{arc\,tg} a/b} (a^2 - c^2\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2(a^2 - b^2)\operatorname{arc\,tg} a/b + (a^2+b^2) \left| \sin^2\varphi \right|_0^{\operatorname{arc\,tg} a/b}$$

oder

$$O = 2ab + 2(a^2 - b^2)\operatorname{arc\,tg} a/b$$

Diese Formel stimmt mit ($\delta$) überein.

Für $a = b$ wird $O = 2a^2$.

Die Fusspunktlinie geht in diesen Fällen über in die Lemniskate von Bernoulli. Der Punkt hat nur die Hälfte durchlaufen, darum finden wir auch die halbe Oberfläche. Die halbe Achse der Lemniskate würde $2a$ sein und also die Oberfläche $4a^2$ [1]).

## C. Die Generatrix ist eine Parabel.

Der Winkel zwischen zwei conjugirten Achsen der Parabel sei $\omega$, und die Gleichung der Parabel wird:

$$\eta'^2 = -2a'\xi'$$

in welcher Formel $\xi'$ immer negativ sein muss.

Wir finden wieder

$$\cos(\omega - \sigma') = \frac{d\xi'}{ds}\sin\omega = -\frac{\eta'\sin\omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta' a'\cos\omega)}}$$

$$\cos\sigma' = -\frac{d\eta'}{ds}\sin\omega = -\frac{a'\sin\omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta' a'\cos\omega)}}$$

oder auch

$$\sin(\omega - \sigma') = -\frac{a' - \eta'\cos\omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta' a'\cos\omega)}}$$

und

$$\sin\sigma' = -\frac{\eta' - a'\cos\omega}{\sqrt{(\eta'^2 + a'^2 - 2\eta' a'\cos\omega)}}$$

Auch müssen wir bemerken, dass der Bogen der Parabel vom Scheitel abgemessen, gleich ist [2])

$$s = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\eta'\sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a} + a\log\frac{\eta' + \sqrt{a^2+\eta'^2}}{a}\right\}$$

---

1) Schlömilch, Höhere Analysis. Bd. I. p. 379.

2) Schlömilch, Höhere Analysis. Bd. I. p. 386.

I. Die Parabel wälzt sich eine gerade Linie entlang.

Die allgemeinen Formeln werden wieder sein

$$x = \text{Parabelbogen} + \eta' \sin(\omega - \sigma') + (p - \xi') \sin \sigma'$$
$$y = \qquad\qquad - \eta' \cos(\omega - \sigma') + (p - \xi') \cos \sigma'$$

Nur zwei Fälle werden wir betrachten.

a. Der Brennpunkt ist der beschreibende Punkt. [1])

Jetzt ist $\omega = 90^0$ und $p = -\frac{1}{2}a$, folglich sind die Coordinaten

$$x = \frac{1}{2} \frac{\eta' \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a} + \frac{1}{2} a \log \frac{\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a} - \frac{a\eta' - \frac{1}{2}a\eta' - \eta'\xi'}{\sqrt{a^2 + \eta'^2}}$$

oder

$$x = \frac{1}{2} a \log \frac{\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{a}$$

und

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + \eta'^2)}$$

also

$$ae^{\frac{2x}{a}} = \eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}$$

Wälzt sich die Parabel nach der anderen Richtung, so werden $\eta'$ und $x$ beide negativ, also

$$ae^{-\frac{2x}{a}} = -\eta' + \sqrt{a^2 + \eta'^2}$$

oder

$$ae^{\frac{2x}{a}} + ae^{-\frac{2x}{a}} = 2\sqrt{a^2 + \eta'^2} = 4y$$

Sei $\frac{1}{4}a = \alpha$, so ist

$$y = \alpha \left\{ e^{\frac{x}{2\alpha}} + e^{-\frac{x}{2\alpha}} \right\}$$

---

1) Die drei Curven, welche durch die Brennpunkte der Kegelschnitte bei der Wälzung längs einer geraden Linie beschrieben werden, haben eine gemeinschaftliche Gleichung; diese findet man bei Anwendung der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte, wenn der Scheitel der Coordinatenanfangspunkt ist,

$$\eta'^2 = \xi'^2(\varepsilon^2 - 1) - 2a\xi'$$

in welcher Formel $\varepsilon$ die numerische Excentricität und $a$ der Parameter ist.

Im gebrauchten Coordinatensysteme muss $\xi'$ immer negativ sein.

also ist der durchlaufene Weg eine Kettenlinie [2]). Für den Krümmungsradius finden wir nach (IV)

$$P = -\frac{(a^2+\eta'^2)^3}{2a(a^2+\eta'^2)^2} = -\frac{a^2+\eta'^2}{2a}$$

und für die Normale

$$k = \frac{a^2+\eta'^2}{2a}$$

also ist

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{k} = 0$$

Durch diese Eigenschaft kann die Oberfläche, welche entsteht durch die Rotation der Kettenlinie um die gerade Linie, eine Gleich-

---

$$\sin\sigma' = \frac{d\xi'}{ds} = \frac{\eta'}{\sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}}$$

und

$$\cos\sigma' = -\frac{d\eta'}{ds} = -\frac{(\varepsilon^2-1)\xi'-a}{\sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}}$$

denn

$$\sqrt{[\eta'^2+\{(\varepsilon^2+1)\xi'-a\}^2]} = \sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}$$

folglich wird

$$x = \text{Bogen des Kegelschnittes } -\eta'\frac{(\varepsilon^2-1)\xi'-a}{\sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}}+(p-\xi')\frac{\eta'}{\sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}}$$

und

$$y = -\frac{\eta'^2}{\sqrt{(\eta'^2\varepsilon^2+a^2)}}-(p-\xi')\frac{(\varepsilon^2-1)\xi'-a}{\sqrt{(\eta'^2\varepsilon^2+a^2)}}$$

Nun ist bei allen Kegelschnitten die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte gleich $\frac{a}{1+\varepsilon}$, also

$$p = -\frac{a}{1+\varepsilon}$$

folglich

$$x = \text{Bogen des Kegelschnittes } -\eta'\varepsilon\left\{\varepsilon\xi'-\frac{a}{1+\varepsilon}\right\}\frac{1}{\sqrt{\{\eta'^2\varepsilon^2+a^2\}}}$$

$$y = a\,\frac{\varepsilon\xi'-\frac{a}{1+\varepsilon}}{\sqrt{(\eta'^2\varepsilon^2+a^2)}}$$

Diese Gleichungen geben den Weg durch den Brennpunkt durchlaufen für

$\varepsilon > 1$ bei der Hyperbel
$\varepsilon = 1$ bei der Parabel
$\varepsilon < 1$ bei der Ellipse
$\varepsilon = 0$ bei dem Kreise

(eine gerade Linie || der Directrix).

2) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. I. Bd. p. 241.

gewichtsfläche einer Flüssigkeit,' auf welcher keine] auswendigen Kräfte wirken, sein. Den Körper durch diese Oberfläche eingeschlossen hat Plateau [1]) eine Catenoide genannt.

b. Der beschreibende Punkt liegt auf der Parabel.

In diesem Falle ist $p = 0$. Wir müssen untersuchen, ob die durchlaufene Curve auch Wendepunkte hat. Nach (V) ist

$$-\{\eta'\cos(\omega-\sigma')+\xi'\cos\sigma'\} = \{\eta'^2+\xi'^2+2\eta'\xi'\cos\omega\}\frac{d\sigma'}{ds}$$

oder

$$-\sin\omega\left\{\eta'\frac{d\xi'}{ds}-\xi'\frac{d\eta'}{ds}\right\}$$

$$= -\{\eta'^2+\xi'^2+2\eta'\xi'\cos\omega\}\frac{d^2\xi'}{d\eta'^2}\frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{d\eta'}{ds}\right)^3\sin^2\omega$$

Jetzt ist

$$\frac{d^2\xi'}{d\eta'^2} = -\frac{1}{a}$$

folglich

$$\{\eta'^2+a'\xi'\} = \{\eta'^2+\xi'^2+2\eta'\xi'\cos\omega\}\frac{1}{\frac{\eta'^2}{a'^2}+1-\frac{2\eta'}{a'}\cos\omega}$$

$$\tfrac{1}{2}\eta'^2\{\eta'^2+a'^2-2\eta'a'\cos\omega\} = a'^2\left\{\eta'^2+\frac{\eta'^4}{4a'^2}-\frac{\eta'^3}{a'}\cos\omega\right\}$$

Also $\eta' = 0$. Dieses gibt den Punkt in der geraden Linie, und auch

$$2(\eta'^2+a'^2-2\eta'a'\cos\omega) = 4a'^2+\eta'^2-4a'\eta'\cos\omega$$

oder

$$\eta'^2 = 2a'^2$$

also

$$\eta' = \pm a\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \xi' = a'$$

In den Wendepunkten ist, weil

$$y = \eta'^2\frac{\sin\omega}{\sqrt{(\eta'^2+a'^2-2\eta'a'\cos\omega)}}+\xi'a'\frac{\sin\omega}{\sqrt{(\eta'^2+a'^2-2\eta'a'\cos\omega)}}$$

ist:

$$y = \frac{a'\sin\omega}{\sqrt{\{3\mp 2\sqrt{2}\cos\omega\}}}$$

Aus der Formel (III) folgt

---

1) Plateau, Statique des liquides. Vol. I. p. 95.

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{-\eta' a' - \eta'^2 \cos\omega + \eta' \xi' - a' \xi' \cos\omega}{-(\eta'^2 + a'\xi') \sin\omega} = \frac{2a'^2 + \eta'^2 - 3a'\eta' \cos\omega}{a\eta' \sin\omega}$$

In einem Wendepunkte ist

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{3\cos\omega \pm 2\sqrt{2}}{\sin\omega}$$

Ist der Scheitel der beschreibende Punkt, so ist $\omega = 90^0$; (Fig. 13. *a. a. a.*), folglich wird in einem Wendepunkte

$$y = \tfrac{1}{3} a \sqrt{3}$$

und

$$\operatorname{tg}\tau = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad \cos\tau = \pm \tfrac{1}{3}$$

II. Die Parabel wälzt sich einen Kreis entlang.

Wir werden nur die Curven betrachten, welche entstehen, wenn der beschreibende Punkt auf der Hauptachse liegt. In diesem Falle ist $\omega = 90^0$. Wir haben

$$r^2 = R^2 + (p - \xi')^2 + \eta'^2 \pm 2R \frac{\eta'^2 - (p - \xi')a}{\sqrt{(\eta'^2 + a^2)}}$$

$$\psi = \frac{\text{Parabelbogen}}{R} - \operatorname{arctg} \frac{(p - \xi')\eta' + \eta' a}{R\sqrt{(\eta'^2 + a^2)} \mp (p - \xi')a \pm \eta'^2}$$

Bestimmen wir die Scheitel der Curven in Bezug auf den Mittelpunkt. In diesen Punkten ist $dr = 0$

$$\frac{r\,dr}{d\eta'} = -(p - \xi') \frac{d\xi'}{d\eta'} + \eta'$$

$$\pm R \frac{\sqrt{(\eta'^2 + a^2)} \left(2\eta' + a \frac{d\xi'}{d\eta'}\right) - \{\eta'^2 - (p - \xi')a\} \frac{\eta'}{\sqrt{(\eta'^2 + a^2)}}}{\eta'^2 + a^2}$$

also muss sein

$$0 = (p - \xi') \frac{\eta'}{a} + \eta' \pm R \frac{(\eta'^2 + a^2)\eta' - \eta'^3 + \eta'(p - \xi')a}{(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$0 = \frac{\eta}{Ra} \{a + p - \xi'\} \left\{\frac{1}{R} \pm \frac{a^2}{(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

Wir haben also Scheitel für

$$\eta' = 0$$
$$\xi' = a + p$$

diese können entstehen, wenn $p$ negativ und grösser als $a$ ist:

$$\frac{1}{R} = \mp \frac{a^2}{(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

diese entstehen nur, wenn die Parabel und der Kreis einander inwendig berühren.

Wir finden dann

$$(\eta'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = Ra^2$$

oder

$$\eta'^2 = a\sqrt[3]{Ra^2} - a^2 = a\{\sqrt[3]{Ra^2} - a\}$$

Soll dieser Wert von $\eta'$ reell sein, so muss $R > a$ sein.

Bestimmen wir den Ort der Doppelpunkte:

$$(p-\xi_1')^2 + \eta_1'^2 \pm 2R\frac{\eta_1'^2 - (p-\xi_1')a}{\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)}} = (p-\xi_2')^2 + \eta_2'^2$$

$$\pm 2R\frac{\eta_2'^2 - (p-\xi_2')a}{\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)}}$$

oder

$$\left(1-\frac{p}{a}\right)(\eta_1'^2 - \eta_2'^2) + \frac{1}{4a^2}\{\eta_1'^4 - \eta_2'^4\}$$

$$+ R\left\{\frac{\eta_1'^2 - 2pa}{\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)}} - \frac{\eta_2'^2 - 2pa}{\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)}}\right\} = 0$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $\eta_1' = \pm \eta_2'$

$$\psi = \frac{\text{Bogen}}{R} - \text{arc tg}\frac{p\eta_1' + \frac{\eta_1'^3}{2a} + \eta_1'a}{R\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_1'^2}$$

$$= \frac{\text{Bogen}'}{R} - \text{arc tg}\frac{p\eta_2' + \frac{\eta_2'^3}{2a} + \eta_2'a}{R\sqrt{(\eta_2'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_2'^2}$$

Setzen wir die beiden Glieder $\eta_2' = -\eta_1'$, so wird

$$\text{Bogen} = -\text{Bogen}'$$

folglich

$$2\left\{\frac{\text{Bogen}}{R} - \text{arc tg}\frac{p\eta_1' + \frac{\eta_1'^3}{2a} + \eta_1'a}{R\sqrt{(\eta_1'^2 + a^2)} \mp pa \mp \frac{1}{2}\eta_1'^2}\right\} = 0$$

Also

$$\psi = 0$$

Dieses lehrt uns, dass die Doppelpunkte liegen auf der Linie, welche durch den Mittelpunkt und den Punkt, in welchen der Scheitel den Kreis berührt, geht. Die Linie ist auch eine Linie von Symmetrie.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, gebrauchen wir die Formel (V), dies gibt

$$\pm\frac{\eta'^2-(p-\xi')a}{\eta'^2+a^2}\;\frac{1}{1/R\pm\dfrac{a^2}{(\eta'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}=\eta'^2+(p-\xi')^2$$

$$\pm\{\eta'^2-(p-\xi')a\}(\eta'^2+a^2)\mp\{\eta'^2+(p-\xi')^2\}a^2$$
$$=\{\eta'^2+(p-\xi')^2\}1/R(\eta'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$$

Ist der Brennpunkt der beschreibende Punkt, so ist $p=-\frac{1}{2}a$

$$\pm\{\eta'^2+\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{2}\eta'^2\}\{\eta'^2+a^2\}\mp\{\eta'^2+(\tfrac{1}{2}a+\xi')^2\}a^2$$
$$=\{\eta'^2+(\tfrac{1}{2}a+\xi')^2\}1/R(\eta'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\pm\tfrac{1}{2}\eta'^4\pm\eta'^2a^2\pm\tfrac{1}{2}a^4\mp\tfrac{1}{2}a^2\eta'^2\mp\tfrac{1}{4}a^4\mp\frac{\eta'^4}{4}$$
$$=\frac{1}{4Ra^2}(\eta'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\{a^4+2a^2\eta'^2+\eta'^4\}$$

also

$$\pm Ra^2(\eta'^2+a^2)^2=(a^2+\eta'^2)^{\frac{7}{2}}$$

folglich

$$a^2+\eta'^2=0$$

Der Wert der $\eta'$, welcher aus dieser Formel folgt, ist imaginär. Weiter ist

$$\pm Ra^2=(\eta'^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$\eta'^2=a\{\sqrt[3]{R^2a}-a\}$$

Dieser Wert ist nur reell für $R>a$. Diese Punkte stimmen überein mit den gefundenen Spitzen, wenn die Parabel und der Kreis einander inwendig berühren.

III. Die Parabel wälzt sich längs einer mit ihr congruenten Parabel, während entsprechende Elemente einander berühren.

Schon aus der Analogie mit den Fusspunktlinien wissen wir, dass der Brennpunkt eine gerade Linie durchlaufen wird, und zwar die Richtungslinie der Parabel, während der Scheitel eine Cissoide beschreibt, von welcher der Parameter $a$ ist.

Bestimmen wir den durchlaufenen Weg eines Punktes der Parabel. In schiefwinkligen Coordinaten finden wir (Fig. 14.) für diesen Weg, weil

$\alpha = 180^0 - (\sigma - \omega)$, $\beta = 2\sigma - \omega$ und $\gamma = 2\sigma - \omega$ ist:

$$x = \xi - \eta \frac{\sin 2(\sigma - \omega)}{\sin \omega} + (p - \xi) \frac{\sin (2\sigma - \omega)}{\sin \omega}$$

$$y = \eta \pm \eta \frac{\sin (2\sigma - \omega)}{\sin \omega} - (p - \xi) \frac{\sin 2\sigma}{\sin \omega}$$

Der beschreibende Punkt sei der sich bewegende Coordinatenanfangspunkt, also $p = 0$

$$x = \xi + 2\eta^2 \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega} + \xi \frac{(a' - \eta \cos \omega) a' - \eta(\eta - a' \cos \omega)}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$x = \eta^2 \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$y = \eta - \eta \frac{a'^2 - \eta^2}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega} + 2\xi \frac{a'(\eta - a' \cos \omega)}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$y = \eta^2 \frac{\eta - a' \cos \omega}{\eta^2 + a'^2 - 2\eta a' \cos \omega}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a' - \eta \cos \omega}{\eta - a' \cos \omega}$$

also

$$\eta = a \frac{x \cos \omega + y}{x + y \cos \omega}$$

folglich nach Substitution dieses Wertes in der Formel für $x$

$$x + y \cos \omega = a' \frac{(x \cos \omega + y)^2}{x^2 + 2xy \cos \omega + y^2}$$

Gebrauchen wir Polarcoordinaten, so ist

$$x = r \frac{\sin (\omega - \Theta)}{\sin \omega} \quad \text{und} \quad y = r \frac{\sin \Theta}{\sin \omega}$$

also

$$r^3 \frac{\sin(\omega - \Theta) + \sin \Theta \cos \omega}{\sin \omega} = a' r^2 \frac{\{\sin (\omega - \Theta) \cos \omega + \sin \Theta\}^2}{\sin^2 \omega}$$

oder

$$r \cos \Theta = a' \cos^2(\omega - \Theta)$$

Sei $\Theta = \varepsilon + \omega - 90^0$; so ist

$$r = a' \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \omega)}$$

Diese Gleichung geht, wie es gehört, für $\omega = 90^0$ über in jene der Cissoide. Wir können den gefundenen Weg auf eine einfache

Weise construiren, welche mit der Construction der Cissoide übereinstimmt. In dem Kreise (Fig. 15) ziehen wir eine Sehne $AB$ und im Punkte $B$ eine Tangente am Kreise. Wenn wir dann durch $A$ Linien ziehen, welche die Tangente und den Kreis schneiden, so müssen wir die Teile zwischen dem Kreise und der Tangente setzen auf die Linien vom Punkte $A$ ab. Wenn wir die Enden dieser Teile mit einander verbinden, bekommen wir die gewünschte Curve. Denn

$$CD = r = CB \frac{\sin \varepsilon}{\sin (\omega - \varepsilon)} \quad \text{oder} \quad CB = AB \frac{\sin \varepsilon}{\sin \omega}$$

folglich

$$r = AB \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin \omega \sin (\varepsilon + \omega)}$$

Sei der Diameter des Kreises $a'$, so ist

$$AB = a' \sin \omega$$

folglich

$$r = a' \frac{\sin^2 \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \omega)}$$

Die Curve schneidet die Tangente $PQ$ einmal, wenn $\varepsilon = \omega$ ist, hier ist

$$r = \tfrac{1}{2} a' \operatorname{tg} \omega$$

Die Linie $PQ$ ist eine Asymptote.

---

## Appendix.

Wenn wir an eine gegebene Curve $f(\xi, \eta)$ eine Tangente und aus einem bestimmten Punkte eine gerade Linie, welche mit der Tangente einen Winkel $\omega$ macht, ziehen, so können wir den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser Linien bestimmen. Diese Aufgabe kommt überein mit der Bestimmung des geometrischen Ortes des Schnittpunktes eines Winkels, wenn die eine Linie immer durch einen gegebenen Punkt geht, während die andere eine gegebene Curve berührt. Für diese Frage hat schon Weinmeister [1]) eine Lösung gegeben.

In einem geradwinkligen Coordinatensysteme, von welchem der gegebene Punkt der Anfang ist, finden wir:

$$x_1 = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg}(\tau - \omega) - \operatorname{tg} \tau} = -\frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} (1 + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \omega)$$

und

1) Schlömilch, Zeitschrift. Bd. XXVIII. p. 256.

$$y_1 = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg}(\tau - \omega) - \operatorname{tg} \tau} \operatorname{tg}(\tau - \omega) = - \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} (\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \omega)$$

Uebertragen wir die Curve auf ein anderes System, dessen Achsen mit jenen des gebrauchten Systemes einen Winkel $90^0 - \omega$ machen; so ist:

$$x = \quad x_1 \sin \omega + y_1 \cos \omega$$
$$y = - x_1 \cos \omega + y_1 \sin \omega$$

Folglich wird

$$x = - \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} \operatorname{tg} \tau = \frac{\xi + \eta \operatorname{tg} \sigma}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma)}$$

und

$$y = \frac{\eta - \xi \operatorname{tg} \tau}{\sin \omega (1 + \operatorname{tg}^2 \tau)} = \frac{\xi + \eta \operatorname{tg} \sigma}{\sin \omega \, (1 + \operatorname{tg}^2 \sigma)} \operatorname{tg} \sigma$$

Diese Formeln stimmen mit den Formeln I*** überein. Hieraus folgt, dass die gesuchte Curve mit der Fusspunktlinie in Bezug auf den gegebenen Punkt gleichförmig ist; dass aber ihre Parameter $\operatorname{cosec} \omega$ grösser sind; oder dass die gesuchte Curve die Fusspunktlinie einer Curve, welche der gegebenen gleichförmig ist, aber $\operatorname{cosec} \omega$ mal grössere Parameter hat. So wird z. B. die Ecke eines Winkels, welcher sich auf solche Weise bewegt, dass die eine Linie immer einen Kegelschnitt berührt, während die andere durch den Brennpunkt geht, einen Kreis beschreiben. Bei einer Parabel geht dieser in eine gerade Linie über.

Amersfoort, Januar 1889.

# XIX.

# Ueber die Rectification der Krümmungslinien auf Röhrenflächen.

Von

**A. Ahrendt**

in Rostock.

---

In der vorigen Arbeit*) ist gezeigt, dass die Krümmungslinien der Röhrenflächen sich in gewissem Sinne als Verallgemeinerungen der ebenen Parallelcurven auffassen lassen. Für die ebenen Parallelcurven findet nun eine einfache Differentialbeziehung statt zwischen dem Bogenelement $ds$ und dem entsprechenden Bogenelement $d\sigma$ der Originalcurve, nämlich

$$ds = d\sigma(1 + K\varrho)$$

wo $K$ das Gauss'sche Krümmungsmass der Originalcurve im betrachteten Punkte bedeutet. Die folgenden Zeilen bezwecken, ein Analogon dieser Differentialbeziehung herzuleiten, sowie die gefundene Beziehung geometrisch zu deuten.

Es seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die laufenden Coordinaten der Originalcurve, $x$, $y$, $z$ die der Parallelcurve, so ist die Gleichung der Parallelcurve

$$x = \xi + \varrho\alpha \quad y = \eta + \varrho\beta \quad z = \zeta + \varrho\gamma$$

und aus der Bedingung, dass Original- und Parallelcurve auf derselben abwickelbaren Fläche liegen müssen, deren Erzeugende senkrecht zur Originalcurve stehen, entspringen die Gleichungen:

*) Diese Arbeit folgt im nächsten Hefte. (Red.)

$$(1) \qquad \alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta = 0$$

$$(2) \qquad d\alpha(\beta\, d\xi - \gamma\, d\eta) + d\beta(\gamma\, d\xi - \alpha\, d\zeta) + d\gamma(\alpha\, d\eta - \beta\, d\xi) = 0$$

überdies gilt

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Weil nun

$$dx = d\xi + \varrho\, d\alpha, \quad dy = d\eta + \varrho\, d\beta, \quad dz = d\zeta + \varrho\, d\gamma$$

ist, so folgt, falls man mit $d\sigma$ und $ds$ entsprechende Bogenelemente der Original- und Parallelcurve bezeichnet:

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2\varrho(d\xi\, d\alpha + d\eta\, d\beta + d\xi\, d\gamma) + \varrho^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$$

Es wird behauptet, dass diese Gleichung von der Form

$$ds^2 = d\sigma^2 . (1 + g\varrho)^2$$

ist. Die hinreichende und notwendige Bedingung für diese Darstellbarkeit ist:

$$(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)\, d\sigma^2 = (d\xi\, d\alpha + d\eta\, d\beta + d\zeta\, d\gamma)^2$$
$$= (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)\, d\sigma^2 - \Sigma(d\xi\, d\beta - d\eta\, d\alpha)^2$$

d. h.

$$\Sigma(d\xi\, d\beta - d\eta\, d\alpha) = 0$$

Für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ galten nun die Bedingungen, von denen man (3) und (1) auch in der Form schreiben kann:

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0$$
$$d\xi . d\alpha + d\eta . d\beta + d\zeta . d\gamma = -(\alpha . d^2\xi + \beta . d^2\eta + \gamma\, d^2\zeta)$$

aus diesen Gleichungen und aus (2) folgt:

$$d\alpha . d\sigma^2 = -d\xi . (\alpha . d^2\xi + \beta . d^2\eta + \gamma . d^2\zeta)$$
$$d\beta . d\sigma^2 = -d\eta . (\alpha . d^2\xi + \beta . d^2\eta + \gamma . d^2\zeta)$$
$$d\gamma . d\sigma^2 = -d\xi . (\alpha . d^2\xi + \beta . d^2\eta + \gamma . d^2\zeta)$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\Sigma(d\alpha\, d\eta - d\beta\, d\xi)^2 = 0$$

und daher ist

$$(4) \qquad ds = d\sigma(1 + g . \varrho)$$

$$(5) \qquad g = -\frac{d\alpha\, d\xi + d\beta\, d\eta + d\gamma\, d\zeta}{d\sigma^2}$$

Die so definirte Grösse $g$ bedeutet die geodätische Krümmung der Originalcurve, falls man sie als auf der zu Grunde gelegten abwickelbaren Fläche $A$ gelegen ansieht. Denn das System

$$x = \xi + \varrho.\alpha, \quad y = \eta + \varrho.\beta, \quad z = \zeta + \varrho.\gamma$$

kann man als Gleichung der Torse $A$ ansehen, falls man $\varrho$ als zweiten Parameter nimmt. Die Coordinatencurven sind dann einerseits die Erzeugenden der Torse, andererseits die Schaar der Parallelcurven. Die Coordinatencurven schneiden sich orthogonal. Demnach ist[1])

$$g_\varrho = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial \varrho}$$

die geodätische Krümmung einer Curve $\varrho =$ Const. $E$ und $G$ bedeuten die Gauss'schen Grössen.

$$E = \Sigma \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = [d\sigma^2 + 2\varrho \Sigma\, d\xi\, d\alpha + \varrho^2 \Sigma\, d\alpha^2] : d\sigma^2$$

$$G = \Sigma \left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2 = 1$$

Führt man diese Werte in den Ausdruck für $g_\varrho$ ein, und setzt $\varrho = 0$, so folgt $g_\varrho = g$, und dies war zu beweisen.

Man ersieht hieraus, in welcher Weise die Formel für ebene Parallelcurven sich specialisirt. Da dann nämlich die Torse zur Ebene wird, so geht die geodätische Krümmung in die gewöhnliche über.

Man kann aus der soeben gefundenen Grundformel noch eine geometrische Beziehung herleiten. Durch Integration folgt:

$$s = \sigma \pm \varrho \int_{\sigma_0}^{\sigma} g\, d\sigma = \sigma \pm \sigma_1$$

und das doppelte Zeichen entspricht den beiden Zweigen der Parallelcurve. Die Grösse $\sigma_1$ giebt also an, um wieviel grösser oder kleiner der Bogen des Parallelcurvenzweiges ist als der entsprechende Bogen der Originalcurve. Den Bogen $\sigma_1$ kann man darstellen als Schnitt einer Kugel vom Radius $\varrho$ mit einem Kegel, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt, und dessen Erzeugende

1) Knoblauch, Flächentheorie, § 90.

parallel sind den Erzeugenden der Torse $A$. Denn die Gleichung des so definirten Kegels ist

$$x = \varrho\alpha, \quad y = \varrho\beta, \quad z = \varrho\gamma$$

wo $\varrho$ vorläufig zweiter Parameter ist. Das Bogenelement der Curve $\varrho =$ Const. ist also:

$$d\sigma_2 = \varrho \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

nach früheren Beweisen ist

$$\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = g \, . \, d\sigma$$

also

$$d\sigma_2 = \varrho \, . \, g \, . \, d\sigma$$

$$\sigma_2 = \varrho \int_{\sigma_0}^{\sigma} g \, . \, d\sigma = \sigma_1$$

dies war zu beweisen.

Man ersieht leicht, wie diese Darstellung sich für Parallelcurven ebener Curven und für ebene Parallelcurven gestaltet; im ersten Falle wird der genannte Kegel zum Kreiskegel, im zweiten zur Ebene. In beiden Fällen sind die Bögen $\sigma_1$ Teile von Kreisbögen, oder auch ganze Kreise.

Schliesslich ergiebt sich noch das Resultat, dass die Krümmungslinien einer und derselben Röhrenfläche constanten Umfang haben, nämlich den doppelten Umfang der Originalcurve. Denn die Längen der Zweige sind:

$$s' = \sigma + \sigma_1$$

$$s'' = \sigma - \sigma_1$$

mithin

$$s = s' + s'' = 2\sigma$$

Ebenso lässt sich nachweisen, dass das Areal der abwickelbaren Fläche $A$ zwischen den beiden Zweigen der Parallelcurve constant ist, welche von den unendlich vielen abwickelbaren Flächen auch genommen wird. Denn das Element des Areals, begrenzt von zwei benachbarten Curven $\varrho =$ Const. und zwei benachbarten Normalen, ist:

$$dF' = d\sigma \, d\varrho + \varrho g \, d\sigma \, d\varrho$$

$$dF'' = d\sigma \, d\varrho - \varrho g \, d\sigma \, d\varrho$$

also

$$F' = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\varrho} d\sigma \, d\varrho + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \int_0^{\varrho} \varrho g \, d\sigma \, d\varrho$$

$$F'' = \int_{\sigma_0}^{\sigma}\int_0^{\varrho} d\sigma\, d\varrho - \int_{\sigma_0}^{\sigma}\int_0^{\varrho} \varrho\, g\, d\sigma\, d\varrho$$

$$F = F' + F'' = 2\varrho\,(\sigma - \sigma_0)$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Wahl der abwickelbaren Fläche ab.

Für das Volumen der Röhrenfläche findet man in ähnlicher Weise die bekannte Formel

$$\mathrm{Vol} = \varrho^2\pi\,(\sigma - \sigma_0)$$

XX.

# Vielecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte schneiden.

Von

**R. Hoppe.**

---

Versteht man unter der Höhe eines $(2n+1)$ecks über einer Seite als Basis das Lot von der Gegenecke auf diese Seite, so bilden diejenigen $(2n+1)$ecke, deren Höhenlote sich in einem Punkte treffen, eine specielle Classe von bemerkenswerten Eigenschaften, die wir hier untersuchen wollen.

Der Höhenschnittpunkt $C$ sei Anfang der rechtwinkligen $xy$ und und der Polarcoordinaten $\varrho\varphi$. Die $k$te Ecke $A_k$ habe die Coordinaten $\varrho_k\varphi_k$ und auf der Gegenseite $(l_k = A_{k+n}A_{k+n+1})$ den Höhenfusspunkt $B_k$. Die Projection des Dreiecks $CA_kA_{k+1}$ auf beide Axen ergibt die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\varrho_{k+1}\cos\varphi_{k+1} &= \varrho_k\cos\varphi_k + l_{k+n+1}\sin\varphi_{k+n+1}\\ \varrho_{k+1}\sin\varphi_{k+1} &= \varrho_k\sin\varphi_k - l_{k+n+1}\cos\varphi_{k+n+1}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

woraus durch Elimination von $l_{k+n+1}$:

$$\varrho_{k+1}\cos(\varphi_{k+1}-\varphi_{k+n+1}) = \varrho_k\cos(\varphi_k-\varphi_{k+n+1}) \qquad (2)$$

Setzt man $k = 1, 2, \ldots 2n+1$, so ergibt das Product aller Gleichungen eine Identität.

Daraus folgt, dass man, um ein solches Vieleck zu construiren, sämtliche $\varphi_k$ und ein $\varrho_k$ willkürlich annehmen kann. Zeichnet man dann, von einem beliebigen $A_k$ anfangend, alle Seiten der Reihe nach, jede normal zum nächsten Höhenlot, so gelangt man stets auf $A_k$ zurück.

Nun ist jedes der Vierecke $B_{k+n} C B_{k+n+1} A_k$ ein Kreissehnenviereck, da die Winkel bei den $B$ rechte sind; daher ist der Winkel bei $C$ gleich dem Aussenwinkel des Vielecks bei $A_k$. Nennt man letztern $\alpha_k$, so hat man:

$$\varphi_{k+n+1} - \varphi_{k+n} = \alpha_k \tag{3}$$

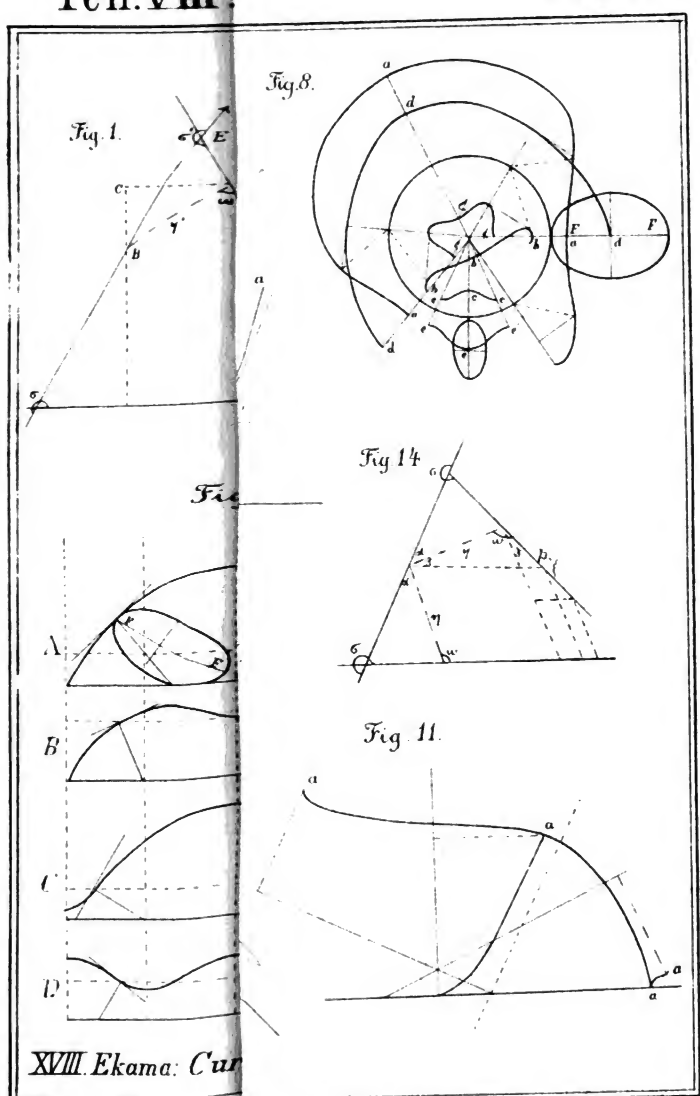
Setzt man in den 2 Gl. (1) $k-1$ für $k$ und eliminirt $\varrho_{k+1}$, $\varrho_k$, $\varrho_{k-1}$ zwischen allen 4 Gleichungen, so kommt:

$$l_{k+n+1} \cos(\varphi_{k+n+1} - \varphi_{k+1}) \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) = \\ l_{k+n} \cos(\varphi_{k+n} - \varphi_{k-1}) \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$$

Drückt man nach der Formel (3) die Differenzen der $\varphi$ in $\alpha$ aus und setzt $k-n$ für $k$, so findet man:

$$l_{k+1} \sin \alpha_k \cos(\alpha_{k+2} + \alpha_{k+3} + \dots \alpha_{k+n+1}) = \\ l_k \sin \alpha_{k+1} \cos(\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots \alpha_{k+n}) \tag{4}$$

Die hierin für $k = 1, 2, \dots 2n+1$ enthaltenen Gleichungen geben vermöge der Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_{2n+1} = 4R$ ein identisches Product. Demnach gibt es $2n$ Relationen zwischen den Seiten und Winkeln des Vielecks als Bedingungen des gemeinsamen Höhenschnitts, und zwar keine Bedingungen für die Winkel, ausser der bekannten Summe aller, Sind letztere gegeben, so sind die Seitenverhältnisse eindeutig bestimmt. Sind die Seiten gegeben, so sind die Gleichungen zur Bestimmung der Winkel der Zahl nach gerade ausreichend; die Bedingungen, unter denen sie reell werden, würden weitere Untersuchung erfordern.


Fig. 1.
Fig. 8.
Fig. 14
Fig. 11.
A
B
C
D
XVIII. Ekama: Cur

# Litterarischer Bericht

## XXIX.

---

### Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Par Ch. Sturm, Membre de l'Institut. Revu et corrigé par E. Prouhet, Repétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent. Neuvième édition, revue et mise au courant du nouveau programme de la Licence par A. de Saint-Germain, Professeur à le Falculté des Sciences de Caen. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils. 1220 S.

Die erste Ausgabe ist von Prouhet nach dem Manuscript von Sturm in dessen Auftrage bearbeitet. Bald nach Beginn dieser Arbeit starb Sturm. Die Theorie der elliptischen Functionen kam später hinzu. Der gegenwärtigen Ausgabe geht eine Lebensbeschreibung Sturm's voraus. Karl Sturm, geboren 1803 in Genf, ausgebildet an der Akademie daselbst von Schaub, Dufour und Lhuilier, war anfangs Privatlehrer, von 1825 an in Paris, wo besonders Arago, Ampère und Fourier an seinen Arbeiten Interesse nahmen, ward 1830 Professor der Mathematik am Collége Rollin, 1836 Mitglied der Akademie der Wissenschaften, 1838 Repetitor, 1840 Professor an der Polytechnischen Schule und Lehrer der Mechanik an der Sorbonne an Poisson's Stelle, erhielt von vielen Seiten Auszeichnungen und starb 1855 in Paris. Schriften von ihm werden 46 aufgeführt.

Sturm's Ruf gründet sich nicht allein auf seine wissenschaftlichen Leistungen, auch die Klarheit seines Vortrags wird laut der Biographie sehr gerühmt. Da letztere in einem Lehrbuche wie dem

vorliegenden von besonderer Wichtigkeit ist, so können wir nicht mit Nachsicht darüber hinweggehen, wenn der ausdrücklich als Fundamentalsatz der Analysis bezeichnete Satz, nach 8 Revisionen die er erfahren hat, völlig unklar ausgesprochen ist und ein gänzliches Misverstehen von Seiten des Verfassers kund gibt. Er lautet:

„Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et si l'on sait que l'une d'elles tend vers une limite, il est évident que l'autre tend aussi vers la même limite ou vers une limite égale à celle-là.“

Offenbar sind 2 Variable, die bei ihrer Variation einander stets gleichbleiben, nichts weiter als eine Variable zweimal gedacht. Der Satz sagt also, dass diese Variable beim zweiten Denken noch denselben Grenzwert hat, den sie beim ersten Denken hatte. Das ist ein Satz, desssen Inhalt null ist, und daraus folgt, dass jeder Beweis, der sich auf denselben als notwendiges Glied stützt, falsch sein muss. So ist denn die gesamte Analysis nach Darstellung des Verfassers, sofern sie sich angeblich darauf stützt, auf lauter Trugschlüsse gebaut.

Der obige Satz geht aus demjenigen Fundamentalsatze, an dessen Stelle er steht, durch eine wunderliche Verwechselung hervor. Der richtige Satz lautet: Zwei Constante, welche Grenzwerte einer, gleich variirenden Grösse sind, sind einander gleich. Statt aber zwei Constante und eine Variable zu betrachten, nimmt Sturm zwei Variable und eine Constante; statt zwei Dinge durch ein Band zu verknüpfen, wird hier ein Ding durch zwei Bänder mit sich selbst verknüpft.

Dass Sturm seinen Satz evident nennt und nicht beweist, ist ganz natürlich. Er gibt dafür eine Anwendung von demselben, die wir als bestätigendes Beispiel unserer Aussage, dass jede solche einen Trugschluss enthalten muss, anführen wollen. Seien $f$, $s$, $r$ Fläche, Umfang, Radius eines Kreises, $f_n$, $s_n$, $r$ die eines umschriebenen regelmässigen $n$ecks; dann ist $f_n = \frac{1}{2}rs_n$. Weil nun der Kreis Grenze des Vielecks sei, folgert Sturm, sei vermöge seines Satzes $f = \frac{1}{2}rs$. Dies stimmt aber wie man sieht gar nicht mit jenem Satze; denn dieser sagt nur, dass, wenn $\lim f_n = f$, auch $\lim \frac{1}{2}rs_n = f$ ist und umgekehrt, während $\frac{1}{2}rs$ ganz unberührt und unbekannt bleibt. Verhüllt wird der handgreifliche Fehler bloss durch die vage vulgäre Vorstellung von der Grenze, ein Begriff der anfänglich richtig definirt, hier aber nicht dementsprechend angewandt wird. In Wirklichkeit genügt eine Grenzrelation nicht zur Folgerung $f = \frac{1}{2}rs$; es

muss ausser $f$ auch $\frac{1}{2}rs$ als Grenze von $f_n$, oder, was dasselbe ist, $s$ als Grenze von $s_n$ bekannt sein.

Auf die Erörterung des Grenzwerts folgt noch besonders einiges über den Begriff der unendlich kleinen Grössen, beginnend mit den Worten:

„Lorsqu' une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites, de manière qu'elle puisse devenir moindre que toute quantité donnée, on dit qu'elle devient infiniment petite."

Dem wird hinzugefügt, dass die Unendlichkleine wesentlich eine Variable ist, die den Grenzwert 0 hat. Letztere Angabe würde zur Definition genügen, vorausgesetzt, dass der Grenzwert vorher definirt ist. Die angeführte Stelle aber ist durchaus unklar, geht um den Sinn und Gebrauch des Wortes herum ohne ihn zu treffen. Wenn in der Analysis von unendlich kleinen Grössen die Rede ist, sagt man nicht, dass irgend welche Grössen unendlich klein werden, sondern man nennt jene Variabele einfach „unendlich klein"; dem factischen Gebrauche nach (welcher keine Licenz, sondern völlig exact ist) sind sie also unendlich klein. Was unendlich klein ist, darüber fehlt jede Angabe in jener Stelle, die doch gewiss eine Erklärung sein soll; der Begriff bleibt rätselhaft und dunkel.

Das Angeführte zeigt wol zur Genüge, dass das Buch Anfängern der Analysis nicht zu empfehlen ist. Es besteht aus 2 Bänden; im ersten ist die Differentialgleichung mit Anwendung auf Reihen und Curven, im zweiten die Integralrechnung mit Anwendung auf krumme Flächen behandelt. Hoppe.

Abhandlungen aus der reinen Mathematik von N. Vandermonde. In deutscher Sprache herausgegeben von Carl Jtzigsohn. Berlin 1888. Julius Springer. 104 S. Text und 4 Zahlentafeln.

Es werden uns im Vorliegenden 4 Abhandlungen aus dem vorigen Jahrhundert durch deutsche Ausgabe näher gerückt, in einer Zeit, die geneigter ist die Genialität der darin ausgeführten Gedanken zu würdigen als die vergangene, die mehr Vollendung oder sicherere Gewährleistung verlangte. Die erste Abhandlung „über die Auflösung der Gleichungen" betrifft die verschiedenen Auffassungen der algebraischen Gleichungen. Die zweite „über die irrationalen Grössen verschiedener Ordnung nebst einer Anwendung auf den Kreis" geht von einer Erweiterung des Potenzbegriffs aus. Statt eines Products gleicher Factoren wird das Product einer endlichen arithmetischen Reihe gesetzt, deren $m$te Differenz null ist. Die Bedeutung negativer

und Null-Exponenten liegt auf der Hand; die Einführung gebrochener Exponenten beschränkt sich hier auf den Exponenten $\frac{1}{2}$; hierzu dient der Kreis. Als dritte Schrift folgt nun ein Bericht über vorstehende Abhandlung aus den historischen Notizen der Königl. Akad. der Wiss. zu Paris 1772. Dieser legt Gewicht darauf, dass die Irrationalzahl $\pi$ einen analogen Ursprung mit der irrationalen Potenzwurzel erhalten hat, und sagt, durch diese Arbeit sei ein neuer Weg eröffnet, und Vandermonde werde jederzeit gerechten Anspruch auf die ruhmvollen Erfolge haben, die man in späterer Zeit dadurch erzielen werde. So hoch man nun aber den originellen Gedanken des Verfassers auch schätzen mag, so ist doch letztere Aeusserung etwas zu phantastisch. Zunächst ist der Weg der Untersuchung kein offener, solange die Probleme, von denen er abhängt, nicht sichtlich lösbar sind. Wären sie aber auch gelöst, so kann der eine Fall der Zahl $\pi$ kaum irgend eine Wahrscheinlichkeit bieten, dass die analogen Irrationalen mit den Zielen der Analysis in Beziehung stehen. Die vierte Abhandlung „über die Elimination" zeigt den Weg der Entdeckung der Determinantentheorie in der Forschungsweise des Verfassers. H.

Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Von Dr. Hermann Cuno Schwarz. Halle a. S. 1888. H. W. Schmidt 43 S.

Das Vorliegende schliesst sich an eine Arbeit von Georg Cantor an, welcher auch den Namen Ordnungstypen eingeführt hat. Der Gegenstand ist eine Menge nach begrenzt vielen Dimensionen geordneter Elemente, die zwar nicht durch Beschaffenheit, aber durch ihren Rang (Ordinalzahl) unterschieden sind. Hierin liegt in der Tat eine specielle Beschränkung des Themas; denn eine Menge kann auch nach einem Gesetze geordnet sein derart, dass sich die Dimensionen beständig mehren. Das Gegenwärtige stellt sich die Aufgabe, über die Menge aller derjenigen Ordnungstypen Aufschlus zu geben, welche auf dieselbe Cardinalzahl führen, so wie über daran sich anknüpfende Fragen. Es ergiebt sich, dass die Untersuchung betreffend beliebig viele Dimensionen sich auf die für 2 Dimensionen reducirt. Schliesslich wird auf eigentümlich definirte Reihensummen Anwendung gemacht. H.

Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik. (Disquisitiones arithmeticae. Theorematis arithmetici demonstratio nova. Summatio quarumdam serierum singularium. Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Theoria residuorum biquadraticorum,

commentatio prima et secunda. Etc.) Deutsch herausgegeben von H. Maser. Berlin 1889. Julius Springer. 695 S.

Das Buch enthält in der Originalausgabe der gesamten Werke wie in der Uebersetzung die Zahlentheorie von den Elementen beginnend auf dem Standpunkte, auf den sie Gauss erhoben hat. Es ist darin kein Unterschied gemacht, ob Teile schon vor ihm bekannt waren. Er hat die Werke seiner Vorgänger wie er sagt nicht vorher gelesen, sondern alles selbst entdeckt, daher manches nach anderer Methode hergeleitet. Die Abschnitte sind: Von der Congruenz der Zahlen im allgemeinen; von der Congruenz ersten Grades; von den Potenzresten; von den Congruenzen 2. Grades; von den Formen und unbestimmten Gleichungen 2. Grades; verschiedene Anwendungen; über diejenigen Gleichungen, von denen die Teilung des Kreises abhängt; neuer Beweis eines arithmetischen Satzes; Summirung gewisser Reihen von besonderer Art; neue Beweise und Erweiterungen des Fundamentalsatzes in der Lehre von den quadratischen Resten; Theorie der quadratischen Reste, 2 Abhandlungen; einige Untersuchungen aus dem handschriftlichen Nachlasse von Gauss H.

Lehrbuch der Differential-Gleichungen. Von Dr. Andrew Russell Forsyth, Professor am Trinity College zu Cambridge. Mit einem Anhange: Die Resultate der im Lehrbuche angeführten Uebungsaufgaben enthaltend, herausgegeben von H. Maser. Autorisirte Uebersetzung. Braunschweig 1889. Friedrich Vieweg und Sohn. 742 S.

Das Buch enthält der Reihe nach: als Einleitung die allgemeinen Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen und ihren Lösungen, dann Differentialgleichungen der 1. Ordnung; allgemeine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten; vermischte Methoden; Integration durch Reihen; die hypergeometrische Reihe; Lösung durch bestimmte Integrale; gewöhnliche Differentiale mit mehr als 2 Veränderlichen; partielle Differentialgleichungen erster, dann zweiter und höherer Ordnung. Mit der Theorie sind viele Uebungsaufgaben, über das ganze Buch zerstreut, mehr als 800, verbunden und im Anhang jedes Abschnitts die Resultate oder Andeutungen zur Lösung gegeben. Bei der Wahl der Methoden wird dem praktischen Interesse vor dem theoretischen der Vorzug zugeschrieben. Die Uebersetzung entspricht der 2. Ausgabe von Forsyth's Werke „A treatise on differential equations“, welche sich indes nur unbedeutend von der ersten unterscheidet. H.

Zum Gesetz der grossen Zahlen. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brünner Lotterie vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Emanuel Czuber. Prag 1889. Dominicus. 41 S.

Der Mittelwert von vielen gleichmöglichen Werten, resp. wo begünstigende Ursachen einspielen, von den mit ihren Chancen multiplicirten Werten heisst gewöhnlich der mathematisch wahrscheinliche Wert. Ebenso lässt sich die wahrscheinliche Abweichung von diesem Mittelwerte berechnen. Das Gesetz der grossen Zahlen sagt nun aus, dass der Umfang der Abweichungen für unendliche Anzahl von Fällen unendlich klein wird. Er hat offenbar keinen theoretischen Grund, sondern beruht rein auf Erfahrung. Der Verfasser hat nun die aufgezeichneten Ergebnisse der Prager und Brünner Lotterie benutzt um es zu prüfen und gefunden, dass der wirkliche Umfang der Abweichungen weit kleiner ist als die wahrscheinliche Abweichung. Es werden eine Anzahl Wahrscheinlichkeitsfragen berechnet, z. B.: Nach wievielen Ziehungen, deren jede nur einen bestimmten Teil der vorhandenen Numern umfasst, werden alle Numern erschöpft sein? — dann das Rechnungsresultat mit den Beobachtungen verglichen. H.

Grundriss der Theorie der Zinsrechnung. Von Dr. Heinrich Bleicher. Mit Tabellen. Berlin 1888. Julius Springer. 75 S.

In der Einleitung werden die Begriffe normirt und die 3 hier behandelten Fälle: 1) einfacher Zins bei dauernder gleichen Rente 2) Zinseszins bei wachsendem Capital ohne Rente 3) Aufzehrung des Capitals bei gleichmässigem Zuschlag zur Rente — erörtert, dann einzeln deren Theorie entwickelt, und am Schlusse Tabellen gegeben über Zinsfactoren für ein Jahr nach Monaten und auch Tagen innerhalb eines Monats, Zins- und Discont-Factoren für den Schluss des Jahres, Tafeln zur Ueberführung discontinuirlicher Verzinsung in continuirliche und umgekehrt. H.

Lehrbuch der politischen Arithmetik für höhere Handelsschulen (Handelsakademien) und zum Selbstunterricht bearbeitet von F. S. Holzinger, Professor an der öffentlichen Handelsakademie in Linz. Braunschweig 1888. Vieweg und Sohn. 156 S.

Das den Lehrplänen entsprechend für die 3. Classe der Handelsakademien von Wien, Prag, Linz, Innsbruck u. a. bearbeitete Lehrbuch behandelt nach einander: als Einleitung die einfache Zinsrechnung, dann die Zinseszins- und Zeitrentenrechnung, Anlehenscours

und Construction von Amortisations-Plänen, Construction von Lotterie-Anlebens-Plänen, Wahrscheinlichkeits- und Leibrentenrechnung, Capitalsversicherung, Verbindungsrenten (von der Verbindung zweier Personen abhangend) und gibt Tabellen für $\log\left(1 \pm \frac{p}{100}\right), \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n$, $1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$, Sterblichkeit und die davon abhängigen Renten. Es ist ganz zweckmässig, dass bei specieller Rechnung nicht die allgemeine Formel, sondern die Methode eingeübt wird. Eine Unklarheit macht sich im Anfange des Buches bemerklich, wo gesagt wird: wenn ein Capital $c$ zu $p$ proc. $n$ Jahre einfach verzinst würde, so wäre es nach diesen $n$ Jahren auf $c + \frac{cpn}{100}$ angewachsen. Dies ist ein Widerspruch; denn wenn das Capital wüchse, so würden zufolge des Vordersatzes auch seine jährlichen Zinsen wachsen. Wäre diese unlogische Redeweise im geschäftlichen Verkehr in Gebrauch, so hätte umsomehr das Lehrbuch die Pflicht darüber Aufklärung zu geben und sich selbst wenigstens exact auszudrücken. H.

Aufstellung von $n$ Königinnen auf einem Schachbrett von $n^2$ Feldern, derart dass keine von einer andern geschlagen werden kann. (Von $n = 4$ bis $n = 10$.) Von Dr. August Pein, Oberlehrer an der Realschule zu Bochum. Mit 7 Figurentafeln. Leipzig 1889. Gustav Fock. 4⁰. 62 S.

Die bezeichnete Aufgabe ist für specielle Zahlen $n$ bis $n = 8$ von mehrern Mathematikern behandelt und gelöst. Es werden deren genannt: Gauss (und Schumacher), Nauck, Natani, Günther, Glaisher, De la Noë. Zu deren Arbeiten fügt die gegenwärtige als neu hinzu 352 Lösungen für $n = 9$ und 724 Lösungen für $n = 10$. An der Vollständigkeit der erstern hat der Verfasser keinen Zweifel, letztere Zahl hält er noch für unsicher. Analytische Lösungen hat noch keiner der Vorgänger gegeben, und die gegenwärtige Bearbeitung geht auf keine solche aus. In dieser Hinsicht war, wie es scheint, Günther der erste, welcher die analytische Gestaltung des Problems als eigentliches Ziel ins Auge fasste und soviel erreichte, dass das Verfahren der Ausschliessung eine bedeutende Vereinfachung und Uebersichtlichkeit, daher auch grössere Sicherheit gewann. Hierzu fügte Glaisher noch eine Verbesserung. Der Verfasser hat diese Methoden zur Lösung in Anwendung gebracht, der Standpunkt des Problems ist dabei derselbe geblieben. Der Inhalt der Schrift besteht in der Vorführung aller Betrachtungen, welche zur Auffindung und Vervielfältigung der Lösungen als bekannt zur Verfügung stehen, und der tabellarischen Aufstellung der Resultate. H.

Praktische Anleitung zur algebraischen Entwickelung und Lösung der Gleichungen der höheren Grade nebst Uebungsbeispielen. Von A. Redlich. Breslau 1888. G. P. Aderholz. 4°. 88 S.

Die Schrift handelt ausschliesslich von solchen Gleichungen, deren Wurzeln reelle rationale Zahlen, und zwar zunächst ganze Zahlen, dann auch mit einer oder 2 Decimalbruchstellen, sind, so dass das von $x$ freie Glied, hier $n$ genannt, als Product der Wurzeln sämtliche mögliche Wurzeln anzeigt. Alle Gleichungen mit derselben Zahl $n$ heissen zusammen das System von $n$. Da in ihnen dieselben Wurzeln wiederholt vorkommen, so ergeben sich Beziehungen zwischen höhern und niedern Gleichungen, mit denen hier viel operirt wird, ohne dass allgemeine Gesichtspunkte ans Licht gezogen werden. Ob jemand solcherlei Uebungen instructiv findet, möchte zweifelhaft sein. Dabei ist die Sprache weder exact noch leichtfasslich die Meinung des Verfassers muss man oft erst aus der nachfolgen den Anwendung erraten, während doch Dinge, die kaum oder nur einmal gesagt zu werden brauchten, beständig wiederholt werden. Die auf dem Titel genannten Uebungsbeispiele sind nirgends als solche bezeichnet; Beispiel ist zwar alles, aber das Aufgestellte deutet keine weitere Frage an. H.

---

## Erd- und Himmelskunde.

Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen dargestellt von Dr. Otto Dziobek, Privatdocent an der Königl. technischen Hochschule zu Berlin-Charlottenburg. Leipzig 1888. Johann Ambrosius Barth. 305 S.

Das vorliegende Werk ist als bestimmt für Unterweisung ein grundlegendes wie wir noch kein andres besitzen. Es behandelt einen abgegrenzten Teil der Astronomie vollkommen geschieden von der Praxis ausschliesslich als mathematisches Problem. Was die Grenzen betrifft, beschränkt es sich auf die Berechnung der Bewegung von Sonne und Planeten, diese als Punkte betrachtet, schliesst also deren Rotationen, Satellitenbewegungen u. a. aus. Mathematische Vorbildung mit Inbegriff der Principien der Integralrechnung wird vorausgesetzt, dagegen keine Kenntniss von Einführungen, die besonders der Astronomie angehören. Alles nun, was bis jetzt zur Untersuchung und Lösung des $n$ Körperbroblems wesentlich dienend gefunden worden ist, wird in wolgeordnetem Zusammenhange verarbeitet auf kürzest möglichem Wege vorgetragen. Die Abfassung

lässt an Gründlichkeit und Vollständigkeit nichts vermissen: keine Vernachlässigung findet statt ohne Nachweis der Berechtigung; was in den Originalarbeiten die Grenzen des Beabsichtigten überschreitet oder für dasselbe entbehrlich war, ist wenigstens durch Citate zugänglich gemacht. Das Ganze liefert demnach eine vollständige Entwickelung des heutigen Standpunktes des Problems. Nach dem vorbereitenden ersten Abschnitte, in welchem namentlich das Problem zweier und dreier Körper behandelt werden, teilt sich die Aufgabe des Buches in zwei Fragen: 1) Was ist in dem Problem der $n$ Körper im voraus bekannt? 2) welche approximative Methoden stehen bei dessen Ergänzung zur Verfügung und sind in Anwendung gekommen. Dieser natürlichen Teilung gemäss werden im 2. Abschnitt die vorhandenen Integrale angegeben und die allgemeinen Eigenschaften der Integrale entwickelt, im 3ten die Störungsrechnungen gelehrt. Am Schlusse jedes Abschnitts wird die Geschichte der betreffenden Entdeckungen zusammengestellt. Tabellen der neuesten Wertangaben der Constanten stehen am Ende. H.

Die Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde. Von Theodor Schmid. Linz 1887. Verlag der k. k. Staats-Ober-Realschule. 65 S.

Ein Teil der Schrift ist im Jahresbericht der genannten Schule für das 36. Studienjahr enthalten, die Fortsetzung besonders herausgegeben. Es wird zunächst die Geschichte des Problems, in welcher 4 Entwickelungsphasen durch die Namen Newton, Clairaut, Laplace, Stokes kenntlich gemacht sind, vorgetragen, dann über sämtliche Untersuchungen und Theorien, welche aus dem Problem hervorgegangen sind, mit Eingehen auf die Herleitungen Bericht gegeben. Die nach einander behandelten Gegenstände sind: das Potential, insbes. des Ellipsoids; Form und Anziehung einer homogenen, flüssigen Masse, welche um eine Axe rotirt; Potential eines Ellipsoids mit kleinen Excentricitäten; Form und Anziehung einer flüssigen Masse, welche ein festes Ellipsoid bedeckt, das aus unendlich vielen Schichten veränderlicher Dichte und Abplattung zusammengesetzt ist; Beschaffenheit des Erdinnern auf Grund einer Hypothese; das Potential mit Rücksicht auf die Theorie der Kugelfunctionen; das Geoid und die Störungen; Schweremessungen und Bestimmung der mittleren Dichte der Erde. H.

Cours d'astronomie pratique. Application à la géographie et à la navigation. Par E. Caspari, Ingénieur hydrographe de la marine. Paris 1889. Gauthier-Villars et fils.

Dies Buch ist bestimmt für Reisende zur See und zu Lande, welche eigene Beobachtungen zu machen beabsichtigen. Es erteilt ihnen reichlich alle dazu erforderliche Belehrung und Angaben aus der Astronomie und mathematischen Geographie. Das 1. Buch behandelt die Probleme der sphärischen Astronomie, das 2te die Theorie der Instrumente, das 3te die Bestimmung der geographischen Elemente, complementäre Breite, Zeit, Azimut und Länge nebst Gebrauch des Chronometers, das 4te die Kartenprojectionen, zum Schlusss die Theorie der Beobachtungsfehler. H.

Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, in Einzel-Abhandlungen verfasst und herausgegeben von Dr. G. Neumayer, Director der deutschen Seewarte. Zweite völlig umgearbeitete, und vermehrte Auflage. Mit zahlzeichen Holzschnitten und zwei lithogr. Tafeln. Berlin 1888. Robert Oppenheim. 82 Bogen.

Die Abhandlungen sind folgende. Fr. Tietjen: Geograph. Ortsbestimmungen. W. Jordan: Topogr. und geogr. Aufnahmen. v. Richthofen: Geologie. H. Wild: Bestimmung der Elemente des Erdmagn. J. Hann: Meteorol. E. Weiss: Anweis. zur Beob. allg. Phän. am Himmel. P. Hoffmann: Naut. Vermess. C. Börgen: Beob. über Ebbe und Flut. v. Lorenz-Liburnau: Beurteil. des Fahrwassers in ungeregelten Flüssen. O. Krümmel: Einige oceanograph. Aufgaben. M. Lindemann: Erheb. über den Weltverkehr. G. Neumayer: Hydrogr. und magn. Beob. an Bord. A. Meitzen: Allg. Landeskunde, polit. Geogr. und Statistik. A. Gärtner: Heilkunde. A. Orth: Landwirtsch. L. Wittmack: Landwirtschaftl. Culturpflanzen. O. Drude: Pflanzengeogr. P. Ascherson: Die geogr. Verbreitung der Seegräser. G. Schweinfurth: Pflanzen höh. Ordn. A. Bastian: Allg. Begriffe der Ethnol. H. Steinthal: Linguistik. H. Schubert: Das Zählen. R. Virchow: Anthropol. und prähist. Forsch. R. Hartmann: Säugetiere. H. Bolau: Waltiere. G. Hartlaub: Vögel. A Günther, Reptilien, Batrachier und Fische. v. Martens: Mollusken. K. Möbius: Wirbellose Seetiere. A. Gerstäcker: Gliedertiere. G. Fritsch: Das Mikroskop und der photogr. Apparat. Diese Abhandlungen sind auch einzeln käuflich. H.

Les étoiles filantes et les bolides. Par M. Félix Hément, Laureat de l'Institut, Inspecteur général honoraire de l'instruction publique. Paris 1888. Gauthier-Villars et fils. 108 S.

Dies Buch ist für Nicht-Astronomen bestimmt, welche für Himmelserscheinungen Interesse haben. Es beschreibt die Erscheinungen

von Sternschnuppen, charakterisirt ihre Unterschiede, macht Angaben über die Zeit ihrer Beobachtung, ihre Periodicität und Häufigkeit, nennt die Beobachter der bemerkenswertesten Erscheinungen nebst den Orten der Beobachtung und teilt die Ansichten über ihre Erklärung mit. H.

Kalender-Karten für die Jahre 1800—1999. Entworfen von Prof. Dr. Felix Müller. Berlin 1888. Rudolf Hertzberg. Format 10 × 7 ctm. 34 S.

Die Karten geben auf kleinst möglichem Raume mit geringst möglichem Aufwande von Mühe für jeden Monatstag jedes Jahres den Wochentag und für jedes Jahr den Ostertag. Je 2 Nebenseiten enthalten den Kalender aller Jahre von gleichem Cyklus: links findet man die Beziehung zwischen Monats- und Wochentag, rechts die Jahre, denen sie gemeinsam zukommt, nebst Ostertag. Am Schlusse weist ein Register jedem Jahre die betreffende Karte zu.
H.

Astronomischer Kalender für 1889. Nach dem Muster des Karl von Littrow'schen Kalenders herausgegeben von der k. k. Sternwarte. Neue Folge. Achter Jahrgang. Wien, Carl Gerold's Sohn. 145 S.

Die Beilagen zu diesem Jahrgange haben folgende Gegenstände: I. Neue Planeten und Kometen. II. Das Chronodeik. III. Mars. IV. Uebersicht des Planetensystems, A) Bahnelemente der grossen Planeten, B) der Satelliten, C) Verzeichniss der Asteroiden, alphabetisch und nach ihrer Entdeckungszeit, und ihre Bahnelemente.
H.

Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen meteorologischen Gesellschaft. Redigirt von Dr. J. Hann, Wien, Hohe Warte, und Dr. W. Köppen, Hamburg, Seewarte. Fünfter Jahrgang 1888. (zugleich XXIII. Bd. der „Zeitschrift der Oesterreichischen Gesellschaft für Meteorologie"). Berlin, A. Asher u. Co.

Der 5. Jahrg. enthält folgende Abhandlungen.

Ferrari: Beitr. z. Gewitterk. Hann: Bezieh. zw. Luftdruck u. Temp.-Var. auf Berggipfeln. Woeikof; Einfl. von Land und Meer auf d. Lufttemp. Weber: Photometr. Beob. während d. Sonnenfinst. 1887. Wild: Regenverh. d. russ. Reichs. Ekholm: Abl. einer period. Funct. aus einer Reihe beob. Grössen. Meyer: Ge-

witterperioden. Jesse: Leuchtende Wolken. Elster u. Geitel: Meth. d. elekt. Nat. d. atmosph. Niederschl. zu best. Hann: Beob. an d. Polarstation Point Barrow. Ekholm: Meth. für Wolkenmess. Thirring: Klima von China. Hann: Beob. auf d. Sonnenblick. — Die False Point-Cyklone 1885. Sprung: Häufigk. beob. Lufttemp. Perlewitz: Unperiod. Temp.-Aend. Höffinger: Nord- u. Ostföhn. Köppen: Hann, Verteil. d. Luftdrucks über Mittel- und Südeuropa. Woeikof: Klimatol. Fragen. Raulin: Regenverhältn. von Ungarn. Liznar: Jährl. Gang d. magn. Decl. Brückner: Result. d. met. Beob. d. deutschen Polarstationen 1882/3. Schreiber: Herleit. wahrer Temp. Mittel aus 3 resp. 4 maligen Beob. Exner: Scintillation. Waldo: Mittl. Windgeschwind. in d. Ver. Staaten. Arrhenius: Einfluss d. Sonnenstrahl. auf d. elektr. Ersch. in d. Erdatm. Oberbeck: Beweg.-Ersch. d. Atmosph. Helmholtz: Atmosph. Beweg. Hill: Jährl. Schwank. d. Barom. in Indien. Loomis: Barom. Max. und Min. Woeikof: Klima d Ben. Nevis in NW. Schottland. Frölich: Gesetz d. Absorpt. d. Sonnenwärme in d. Atm. — Beweg. d. Cyklonen u. Anticykl. im Nov. 1884 in d. Umgeb. d. nordatlant. Oceans. Sohncke: Gewitterelektr. u. gewöhnl. Luftelektr. Hann u. Liznar: Beob. Erg. d. norw. Polarst. Bossekopp-Alten. Kleiber: Abrundungsfehler meteor. Zahlen. Müller-Erzbach: Best. d. Durchschn. Temp. durch d. Gewicht von verdampfter Flüss. Sprung: Vertic.-Abnahme d. Luftdrucks u. d. Temp. Köppen: Gestalt d. Isobaren in ihrer Abhäng. von Seehöhe u. Temp. Verteil. H.

---

## Vermischte Schriften.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Publié par les Secrétaires. (Red. G. Humbert.) Tome XVI. Paris 1888. Au siége de la Société.

Der 16. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. Koenigs: Der Ort der Pole einer an Kegelschnitten, die auf eine Steiner'sche Fläche gezeichnet sind, festen Ebene ist eine andre Steiner'sche Fläche.

Jssoly: Neue Principien der Theorie der Congruenzen von Geraden.

R. Perrin: Ueber die Identität der Peninvarianten der binären Formen mit gewissen Functionen der unilateralen Derivirten dieser Formen.

T. J. Stieltjes: Ueber eine Verallgemeinerung der Formel der endlichen Incremente.

A. Pellet: Approximative Teilung eines Kreisbogens in gegebenem Verhältniss mit Hülfe der Regel des Zirkels.

Bioche: Ueber die Krümmungslinien gewisser Regelflächen.

Delannoy: Ueber die Dauer des Spieles.

E. Catalan: Verschiedene Sätze und Aufgaben.

J. Réveille: Ueber einen Satz der kinematischen Geometrie.

V. Jamet: Ueber das Genus der triangulären ebenen Curven.

Fabry: Zurückführbarkeit der linearen Differentialgleichungen.

de Presle: Ueber die Entwickelung von $\cot\varepsilon$ in eine Reihe von Brüchen. — Successive Derivirte einer ganzen Potenz einer Function 1 Variabeln; dito einer Function nebst Anwendung auf die Bestimmung der bernoullischen Zahlen.

Williot: Einfachstes Verfahren der Berechnung der bernoullischen Zahlen.

Rouché: Bemerkungen in Antwort auf eine Note von Delannoy.

C. A. Laisant: Arithmetische Bemerkungen über die zusammengesetzten Zahlen. — Ueber ein System zweier ebenen Curven. — Ueber die factorielle Zählung, Anwendung auf Permutationen.

Weil: Ueber eine Eigenschaft der Systeme ebener Curven.

E. Lemoine: Coordinatensysteme, welche am einfachsten einen Punkt durch Construction bestimmen.

M. d'Ocagne: Ueber die Hauptsysteme von Peninvarianten einer linearen Form. H.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté. Sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse avec le concours des Conseils Généraux de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées. Tome II. Année 1888. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Der 2. Band enthält folgende Abhandlungen.

Ch. Bioche: Ueber die asymptotischen Linien gewisser windschiefer Flächen.

P. Painlevé: Ueber die singularen Linien der analytischen Functionen.

Hermite: Bemerkungen über die Zerlegung der doppelt periodischen Functionen in einfache Elemente. – Ueber die Transformation des Integrals 2. Gattung.

F. Tisserand: Ueber eine Differentialgleichung 2. Ordnung, welche in der Himmelsmechanik eine wichtige Rolle spielt.

B. Baillaud: Ergänzende Untersuchungen über die Entwickelung der Störungsfunction.

G. Koenigs: Beiträge zur Theorie des Kreises im Raume.

F. J. Stieltjes: Ueber die lineare Transformation des elliptischen Differentials $dx : \sqrt{X}$.

A. Destrem: Verdrängung des Kupfers durch Zink und Cadmium in einigen Lösungen von Kupfersalzen.

P. Duhem: Historische Studie über die Theorie der Magnetisirung durch Influenz. H.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Weetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde reeks. Derde, vierde deel. Amsterdam 1887. 1888. Johannes Müller.

Der 3. Teil enthält 2 mathematische Aufsätze von

P. H. Schoute: Ueber eine enge Beziehung zwischen dem Brocard'schen Winkel und Brocard'schen Kreise. — Allgemeine Regel für die Bahnform und Dauer der centralen Bewegung.

Der 4. Teil enthält die folgenden.

F. J. van den Berg: Ueber die graphische Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

J. de Vries: Quadrupelinvolutionen auf biquadratischen Curven.

Ausserdem verschiedenes Geschichtliches von D. Bierens de Haan und D. J. Korteweg. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

## XXIV.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1883. Dargest. v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 39. Jahrg. 1. Abth., enth. Physik der Materie. Red. v. L. Rosochatius. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Graf, J. H., Geschichte der Mathematik u. der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. 2. Hft. Das XVII. Jahrhundert. Bern, Wyss. 1 Mk. 20 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Unter bes. Mitwirkg. v. F. Müller u. A. Wangerin, hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 18. Bd. Jahrg. 1886. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

### Methode und Principien.

Bolzano's, B., Paradoxien d. Unendlichen, hrsg. aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers v. F. Přihonsky. 2. Afl. Berlin, Mayer & M. 3 Mk.

Miller-Hauenfels, A. Ritter v., Richtigstellung der in bisheriger Fassung unrichtigen mechanischen Wärmetheorie und Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen. Wien, Manz'scher Hof-Verl. 4 Mk. 80 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. Bearb. u. hrsg. v. B. Dürigen. 23.—25. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. 50 Pf.

### Lehrbücher.

Otto, C., u. H. Diesener, Lehrbuch der gesammten niederen Mathematik. 5 Hfte. Halle, Hofstetter. 11 Mk. 80 Pf.; in 2 Bde. geb. 13 Mk. 50 Pf.

## Sammlungen.

Baur, L., Resultate nebst Auflösungen u. Erläuterungen zu den arithmetischen Aufgaben f. Lehrer etc. Stuttgart, J. F. Steinkopf. Kart. 2 Mk.

Borth, E. F., die geometrischen Konstruktionsaufgaben f. den Schulgebrauch, methodisch geordnet u. m. einer Anleitg. zum Auflösen derselben versehen. 5. Afl. Leipzig, Fues' Verl. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 1 Mk 80 Pf.

Brenner, A., Resultate nebst Auflösungen u. Erläuterungen zu den methodisch geordneten Aufgaben f. das theoretische u. praktische Rechnen. 1. Tl. 3. Afl. Regensburg, Coppenrath. 1 Mk. 20 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 500.—527. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Kniess, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmten Zahlen, bearb. unter besond. Berücksicht. d. f. Lateinschulen vorgeschriebenen Lehrpensums. München, Kellerer. 1 Mk. 60 Pf.

Reeb, W., algebraisches Uebungsbuch mit einleitenden Fragen, eingereihten Sätzen u. Regeln, sowie ausgeführten Musterbeispielen. 3. Afl. Giessen, Roth. 1 Mk. 50 Pf.; Auflösungen dazu. 80 Pf.

## Tabellen.

August, E. F., vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 16. Afl., besorgt v. F. August. Veit & Co. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

## Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Büttner, A., Kopfrechenschule. 1. Tl. Leipzig, Hirt & S. 1 Mk. 25 Pf.

Escherich, G. v., zur Theorie der zweiten Variation. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Gauss', C. F., Untersuchungen üb. höhere Arithmetik. Deutsch hrsg. v. H. Maser. Berlin, Springer. 14 Mk.

Gegenbauer, L., üb. diejenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche e. vorgeschriebene Grenze überschreiten. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Gegenbauer, L., über windschiefe Determinanten höheren Ranges. Ebd. 60 Pf.

Lie, S., e. Fundamentalsatz in der Theorie der unendlichen Gruppen. Christiania, Dybwad. 35 Pf.

Mertens, F., e. Beweis d. Fundamentalsatzes der Algebra. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Michaelsen, A., d. logarithmische Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung $n$-Ordnung. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk. 20 Pf.

Steinhauser, A., die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln m. Hilfe der kleinsten Quadrate. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Wirtinger, W., Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen m. algebraischen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Zaiser, G., das Speziesrechnen u. der Bruchsatz. Lehrbuch zur rationellen Behandlg. d. Rechenunterrichts in den Oberklassen der Volks- u. Mittelschulen. Lehrer-Asg. Stuttgart, Bonz & Co. Kart. 2 Mk. 40 Pf.; Schüler-Asg. Kart. 45 Pf.

### Geometrie.

Bieler, A., Leitfaden f. den Unterricht in der Raumlehre in gehobenen Volks-, Bürger- u. Mittelschulen. Jena, Mauke's Verl. 80 Pf.

Glänzer, K., die Gegenkurven der Kegelschnitte. Hamburg, Herold, Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Hofmiller, O., Grundzüge der orthogonalen Projektion. In Mappe. Bamberg, Buchner. 3 Mk. 80 Pf.

Koeltzsch, A., Grundzüge der Raumlehre. 2. Hft. Leipzig, Merseburger. 60 Pf.; Einbd. 10 Pf.

Koestler, H., Leitfaden der ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. 1. Hft. Kongruenz. 3. Afl. Halle, Nebert. Kart. 1 Mk. 25 Pf.

Kuglmayr, L., üb. Spiralen u. deren Tangirungs-Problem. Wien, Spielhagen & Sch. 7 Mk.

Mertens, F., Beweis der Darstellbarkeit irgend e. ganzen invarianten Gebildes e. binären Form als ganze Function e. geschlossenen Anzahl solcher Gebilde. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Pelz, C., Note zur Abhandlung: „Ueber die Focalcurven d. Quetelet." Ebd. 40 Pf.

Puchta, A., analytische Darstellung der kürzesten Linien auf allen abwickelbaren Flächen. Ebd. 40 Pf.

Vries, J. de, üb. d. e. Vierseite harmonisch eingeschriebene Configuration $18_3$. Ebd. 40 Pf.

Weyll, der erste Unterricht in der Raumlehre. Leipzig, Fock. 50 Pf.

### Trigonometrie.

Conradt, F., stufenmässige Anordnung d. trigonometrischen Lehrstoffs der Gymnasien. Leipzig, Fock. 1 Mk.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Simon, P., Gewichtsbestimmungen f. Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen. Veröffentlichung d. königl. preuss. geodät. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 2 Mk. 50 Pf.

Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Instituts. Polhöhenbestimmungen aus dem J. 1886 f. 20 Stationen nahe dem Meridian d. Brockens vom Harz bis zur dänischen Grenze. Gelegentlich ausgeführte Polhöhen- u. Azimutbestimmungen aus den J. 1878 – 1884. Ebd. 10 Mk.

### Mechanik.

Brill, A., über die reducirte Resultante. München, Franz'scher Verl. 40 Pf.

Velde, W., üb. e. Spezialfall der Bewegung e. Punktes, welcher v. festen Centren angezogen wird. Kiel, Lipsius & T. 1 Mk. 60 Pf.

Wolf, M., die Differentialgleichung der mittleren Anomalie u. die Wahrscheinlichkeit der Convergenz in der Darstellung ihres Integrals. Heidelberg, Winter's Univ.-Buchh. 1 Mk. 60 Pf.

### Technik.

Fortschritte der Elektrotechnik. Vierteljährliche Berichte. Hrsg. v. K. Strecker. 2. Jahrg. 1888. 2. Hft. Berlin, Springer. 5 Mk.

Fritsche, W., die Gleichstrom-Dynamomaschine, ihre Wirkungsweise u. Vorausbestimmung. Ebd. 4 Mk.

### Optik, Akustik und Elasticität.

Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik. Red.: O. Schneider. 10. Jahrg. 1889. Nr. 7. Leipzig, Gressner & Schr. Viertelj. 2 Mk.

Exner, K., üb. e. Consequenz d. Fresnel-Huyghens'schen Princips. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Koppe, C., die Photogrammetrie od. Bildungskunst. Weimar, Verlag der dtschn. Photographen-Zeitung. 6 Mk.

Straubel, R., üb. die Berechnung der Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen durch Randintegrale m. besond. Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Jena, Pohle. 1 Mk. 50 Pf.

Tumlirz, O., Berechnung d. mechanischen Lichtäquivalents aus den Versuchen d. Herrn Julius Thomsen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

## Erd- und Himmelskunde.

Beobachtungen, magnetische, d. Tifliser physikalischen Observatoriums im J. 1886—1887. Hrsg. v. J. Mielberg. Russisch u. deutsch. St. Petersburg, Eggers & Co. 4 Mk.

Brosch, Ph., Bahnbestimmung d. Kometen 1867. III. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Hann, J., Untersuchungen üb. die tägliche Oscillation d. Barometers. Ebd. 4 Mk.

Holetschek, J., Bahnbestimmung d. Planeten (118) Peitho. 3. Tl. Ebd. 80 Pf.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. Jahrg. VII. 1888. Magdeburg, Faber. Kart. 6 Mk.

Jerofeieff, M., u. P. Latschinoff, der Meteorit v. Nowo-Urei. St. Petersburg, Eggers & Co. 6 Mk.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). 10. Bd., enth. Beobachtungen vom Jahre 1887. Halle, Schmidt's Verl. 5 Mk.

Krebs, A., Beiträge zur Kenntniss u. Erklärung der Gewitter-Erscheinungen auf Grund der Aufzeichnungen über die Gewitter Hamburgs in den J. 1878—1887. Stuttgart, Maier. 1 Mk. 50 Pf.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 121. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. prcplt. 15 Mk.

Niessl, G. v., üb. das Meteor vom 22. April 1888. Wien, Hölder. 1 Mk. 60 Pf.

Palisa, A., Bestimmung der Bahn d. Planeten (211) Isolda. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Perntor, J. M., Messungen der Ausstrahlung auf dem Hohen Sonnenblick. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Publicationen d. astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 23. 6. Bd. 3. Stück. Leipzig, W. Engelmann. 5 Mk.

Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Hrsg. v. N. Hertz. 1. Bd. Wien, Frick. 15 Mk.

Singer, K., Temperaturmittel f. Süddeutschland. München, Th. Ackermann. 3 Mk.

Spörer, G., üb. die Periodicität der Sonnenflecken seit dem J. 1618, vornehmlich in Bezug auf die heliographische Breite der-

selben, u. Nachweis e. erhebl. Störung dieser Periodicität während e. langen Zeitraumes. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 23. Jahrg. 4 Hft. Ebd. 2 Mk.

Dass. 24. Jahrg. 1889. 1. Hft. Ebd. 2 Mk.

## Physik.

Faraday, M., Experimental-Untersuchungen üb. Elektricität. Uebers. v. S. Kalischer. 1. Bd. Berlin, Springer. 12 Mk.; geb. 13 Mk. 20 Pf.

James, E., l'électricité. Cours public donné à Bienne. Genf, Stapelmohr. 1 Mk.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 97.—100. Heft. Stuttgart. J. Maier. à 25 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 9. Afl. v. L. Pfaundler. 3. Bd. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk. 50 Pf.

Troje, O., Beiträge zur Analyse d. Uebergangswiderstandes. Königsberg, Koch. 1 Mk.

Tumlirz, O., u. A. Krug, die Energie der Wärmestrahlung bei der Weissgluth. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

## Vermischte Schriften.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. J. Fröhlich. 6. Bd. (Juni 1887 — Juni 1888.) Berlin, Friedländer & S. 8 Mk.

Kleyer, A., Encyklopädie der gesammten mathematischen, technischen und exacten Naturwissenschaften. 35. Lfg. Stuttgart, Maier. 1 Mk.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin de l'Académie imperiale des sciences de St. Pétersburg. Tome VI. Livr. V. Leipzig, Voss' Sort. 3 Mk. 75 Pf.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr. 29. Jahrg. 1888. Königsberg, Koch. 6 Mk.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Jahrg. 1888. 3. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

# Litterarischer Bericht
## XXX.

---

### Geometrie.

Einführung in die neuere analytische und synthetische Geometrie. Für das Selbststudium leichtverständlich ausgearbeitet von Dr. H. Kaiser in Dieburg. Mit 83 Holzschnitten im Text und 3 lithographirten Tafeln. Wiesbaden 1887. J. F. Bergmann. 190 S.

Der gesamte Inhalt des Buches zeigt, dass dasselbe eine Einführung in die neuere synthetische Geometrie ist, weit entfernt von der analytischen Geometrie eine Idee zu geben oder dieselbe irgendwie zu berühren. Die weiter gehende Behauptung auf den Titel ist umso ausdrücklicher zurückzuweisen, weil die unbegrenzte Ausdehnung der synthetischen Geometrie leicht die ganze Universitätszeit in Beschlag nimmt, während die Studirenden von der Existenz der wirklichen analytischen Geometrie keine Ahnung haben und durch jene anmassende Aussage beständig im Irrtum erhalten werden. Die gegenwärtige Bearbeitung macht freien Gebrauch von Coordinaten in jeder zweckdienlichen Form, verbindet also Rechnung und räumliche Betrachtung. Die Berechtigung der synthetischen Geometrie dies zu tun kann niemand bestreiten, ihre Name selbst weist auf die Tätigkeit hin. Auch der Ausfall der vorliegenden Lehre zeigt, dass durch Zuziehung des Rechnens keine abweichende Theorie entstanden ist. Was dagegen der Verfasser in den dem Buche vorangestellten „generellen Bemerkungen" über das Verhältniss der synthetischen und analytischen Methode sagt — sie verhielten sich wie Handarbeit (resp. Kopfarbeit) und Maschinenarbeit — ist lächerlich entstellend. Die Erfindung einer Maschine setzt voraus, dass, was sie leistet,

bereits bekannt ist. Durch sie wird also nie ein mathematisches Problem gelöst, und die Lösung von Problemen ist doch stets das Ziel des analytischen Verfahrens. Jene Aeusserung documentirt demnach, dass der Verfasser von den gesamten erfolgreichen analytischen Wegen nichts weiss. Es ist wahr, dass die analytische Forschung von dem aus ihr hervorgegangenen Apparate in weit grösserm Umfange Nutzen zieht als die synthetische und ihn nicht entbehren kann wie letztere; doch hat derjenige kein Recht über das Wesen der analytischen Methode zu urteilen, der nicht beachtet, wozu ihr der Apparat dient: das sie nämlich mittelst seiner die Probleme so umgestaltet, dass Bekanntes und gesuchtes gesondert und in sichtliche Beziehung gesetzt wird. Die generelle Bemerkung schliesst mit dem Resultate: Keine der beiden Methoden macht die andere entbehrlich. In dem Sinne, in dem es hier gesagt wird, ist das Urteil hinfällig und bedeutungslos: doch kann man auch bei richtiger Auffassung das gleiche aufstellen: was auf analytischem Wege vergeblich gesucht worden ist, kann manchmal auf synthetischem Wege ungesucht entdeckt werden. Am Schlusse der Bemerkungen stellt der Verfasser als wichtigste Factoren der neueren Geometrie auf: 1) die abkürzende Symbolik, 2) das Princip des Dualismus, 3) die Projectivitätslehre — und erklärt sie. Die Hauptabschnitte des Buches sind: gerade Linie und Punkt; Strahlenbüschel und Punktreihen; die Kegelschnitte im allgemeinen. H.

Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Von Dr. Arthur Schoenflies, Privatdocent der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit Figuren im Text. Leipzig 1886. B. G. Teubner. 194 S.

Nach Aussage des Verfassers, deren Richtigkeit wol keinem Zweifel unterliegt, ist dies die erste rein geometrische Bearbeitung der Kinematik und hat, sofern sie einen deutlich begrenzten, fundamentalen Teil derselben vollständig als gesclossenes Ganze behandelt, Anspruch darauf eine wesentliche wissenschaftliche Leistung genannt zu werden. Dass es überhaupt möglich ist, ohne alle Zuziehung der Quantität, die Reihe von Sätzen zu entwickeln, welche die Theorie der Abhängigkeit der Bewegungen in sich enthalten, gibt hinreichende Aufforderung den directen Weg zu verfolgen, und die Wahl dieser Methode bedarf keiner weitern Rechtfertigung. Allein das Urteil des Verfassers greift sogleich darüber hinaus, indem es das Ausgehen von den Geschwindigkeiten (also überhaupt den Bestimmungsgrössen) verwirft mit der Behauptung, dass die Gestalt und die Eigenschaften der durch Bewegung erzeugten Raum-

gebilde nicht von ihnen abhienge. Zur Klarstellung ist dreierlei zu betonen. Erstens ist die Behauptung unrichtig, denn die Geschwindigkeiten (natürlich die relativen der Teile) und die Erzeugnisse nach Gestalt und Eigenschaften bestimmen sich gegenseitig, es bleibt nur die Frage, wie man sie aus einander findet. Zweitens sind die Bestimmungsgrössen kein blosses Hülfsmittel der Deduction, sondern ein recht wesentlich zur Theorie gehöriges Element. Da der Verfasser im Anfange des Vorworts schlechthin von der Kinematik im ganzen redet, gleich nehher aber es erscheinen lässt, als ob die rein geometrischen Resultate dieses Ganze wären, so ist es wol nicht überflüssig zu erinnern, dass die so erhaltenen Gesetze doch nur die eine, nämlich die qualitative Seite der Kinematik darstellen. Konnten diese Gesetze ohne Zuziehung der Quantitäten auch recht leicht und elegant gewonnen werden, so würde man doch die vollständige fundamentale Kinematik weit einfacher bei stets begleitender Formel herleiten, als wenn man die Quantitäten erst nachträglich aus den Lagenverhältnissen berechnen wollte. Drittens, wenn es sich um Vorzüge der einen und andern Methode handelt, so hat sich die rein geometrische bloss einen Mangel aus Maxime selbst auferlegt: sie kann das Erkannte nicht deponiren; sowol der Forschende als auch der Lernende ist genötigt die ganze Geistesarbeit des Vorstellens dauernd und immer von neuem zu vollziehen; die Schöpfungen bleiben stets Privateigentum des Erzeugers, und wer sie fortsetzen will, muss grössere Gaben besitzen als seine Vorgänger. Die ordnenden Gesichtspunkte, welche über das Lagenverhältniss der Configurationen Licht verbreiten, kommen der rein geometrischen Betrachtung nicht ausschliesslich zu: wer sie findet, hängt von der Begabung des Autors, nicht von der Methode ab, ihr Gebrauch aber kommt der Untersuchung in jeder Form zugute.

Der Fortschritt in der Entwickelung der Theorie der Bewegung, unter welcher durchgängig die Lagenänderung in sich unveränderlicher Systeme verstanden wird, ist der, dass zuerst die Bewegung ebener Systeme in ihrer Ebene, dann die Bewegung eines räumlichen Systems um einen festen Punkt, endlich mit Ausschluss beider Specialitäten die Bewegung eines Raumes im andern zur Behandlung gelangt. H.

Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, o. Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. Erste Abtheilung. Mit 82 Holzschnitten im Text. Dritte, vermehrte Auflage. Leipzig 1886. Baumgärtner. 248 S.

Die bedeutende Vermehrung besteht zunächst in der schon in

der 2. Auflage geschehenen Hinzufügung einer Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen, deren Zahl in der 3ten auf 223 gestiegen ist. Ausserdem sind aber auch neue Untersuchungen und rein geometrische Beweise für bekannte Sätze hinzugekommen Anzuerkennen ist die Achtsamkeit auf den im Vorwort hervorgehobenen Umstand, dass das Erlernen dieses Wissenschaftszweiges bedingt ist durch ein, das gewöhnliche Mass übersteigendes, daher von jedem Einzelnen besonders zu pflegendes Vorstellungsvermögen, welches nicht mit dem Lehrstoffe überliefert wird — eine irrige Voraussetzung, die meistens stillschweigend gemacht zu werden scheint. Der Verfasser ist darauf bedacht das Vermögen durch Uebung zu vergrössern. Das Buch enthält in 15 Vorträgen: die Methode des Projicirens und Schneidens, die 6 Grundgebilde der neuern Geometrie; unendlich ferne Elemente, das Beziehen der Grundgebilde auf einander; das Princip der Dualität, einfache und vollständige $n$ecke, $n$seite, $n$kante u. s. w.; das Beziehen der letzteren auf einander, harmonische Gebilde; projective Verwandtschaft einförmiger Grundgebilde; Curven, Büschel und Kegel 2. Ordnung; Folgerungen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon; Pol und Polare in Bezug auf Curven 2. Ordnung; Durchmesser und Axen der Curven 2. Ordnung, Gleichungen derselben; Regelscharen und Regelflächen 2. Ordnung; projective Verwandtschaft von Elementargebilden; Involutionen; metrische Relationen von Involutionen, Brennpunkte der Curven 2. Ordnung; Aufgaben 2. Grades, imaginäre Elemente; Hauptaxen und Symmetrie-Ebenen, Focalaxen und cyklische Ebenen eines Kegels 2. Ordnung. Es folgen Constructionsaufgaben und Lehrsätze. H.

Freie Perspektive (centrale Projektion) in ihrer Begründung und Anwendung mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Von Dr. Gustav Ad. V. Peschka, k. k. Regierungsrat, ordentl. Professor der darstellenden Geometrie und des konstruktiven Zeichnens an der k. k. technischen Hochschule in Brünn; Inhaber der k. k. grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst und des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Ritter mehrerer hoher Orden. Zweite, vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Band I. Mit XIII lithographischen Tafeln. Leipzig 1888. Baumgärtner. 336 S.

Das Buch zeichnet sich durch ungemeine Gründlichkeit und Ausführlichkeit aus. Exacter Ausdruck ist mit Fleiss beobachtet. In der ersten Auflage war die Anwendung der neuern synthetischen Geometrie grundsätzlich ausgeschlossen worden, in der zweiten hat eine völlige Umarbeitung derart statt gefunden, dass sie die neuern

Methoden aufnimmt und in dieselben einführt. Der I. Abschnitt behandelt die Grundzüge der Centralprojection. Nach einleitender Erläuterung der Sache und der allgemeinen Anordnungen sind die Gegenstände: die fundamentalen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen und hierauf bezügliche Constructionen; Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, welche von Längen- und Winkelgrössen abhängig sind. Der II. Abschnitt behandelt die Elemente der projectivischen Geometrie, und zwar: Allgemeines; Curven 2. Grades als projectivische Erzeugnisse; collineare Verwandtschaft zweier ebenen Systeme und deren specielle Formen; Aufgaben in centralprojectivischer Darstellung mit Benutzung projectivischer und collinearer Constructionen. Der III. Abschnitt Transformationen centralprojectivischer Bilder. Der IVte aus Ebenen zusammengesetzte Gebilde, und zwar das Dreikant; die Darstellung durch Polygone, Polyeder, ihre ebenen und gegenseitigen Schnitte. Der 2. Band soll den krummen Flächen gewidmet sein. H.

Behandlung der Kegelschnitte mittels Linienkoordinaten. Von Dr. H. Willig, Realgymnasiallehrer zu Mainz. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Grossherzolichen Realgymnasiums und der Realschule zu Mainz. Herbst 1888. Mainz. 48 S.

Das Vorliegende teilt in elementarer Herleitung die Theorie der Liniencoordinaten und ihrer Anwendung auf die Elemente der Kegelschnittslehre zur Einführung in das Studium derselben mit. Der Verfasser empfiehlt, einige Teile davon schon auf der Schule zur Verwendung zu bringen. Dem werden wol Wenige beistimmen; die Betrachtungsweisen zu vervielfältigen, wo kaum Gelegenheit ist, die Bedeutung der Coordinaten in einer Form kennen zu lernen, möchte doch gewiss in pädagogischer Hinsicht das Allerunvernünftigste sein und alle Orientirung vereiteln. Nach einer Einleitung, welche die nötigen Anordnungen darlegt, sind die Gegenstände der Schrift: Transformation der Liniencoordinaten, der Kreis, die Parabel, die Ellipse, die Hyperbel, Durchmesser der Kegelschnitte, andere Formen für die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel, Discussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades. H.

Bing's Kreiswinkel. Ein Beitrag zur Quadratur des Kreises. Redigirt von Regierungsbauführer Dorst. Düren (Rheinland), Carl Schleicher u. Schüll.

Das so benannte Instrument ist ein Lineal in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit einem Winkel, dessen Cosinus $= \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ ist.

In der vorliegenden kleinen Schrift sind 24 Constructionsaufgaben aufgeführt, die Auflösungen mittelst des Instruments nebst den Figuren dabei. H.

Netze zum Anfertigen zerlegbarer Krystallmodelle. Von Dr. W. Waege. Berlin, R. Gaertner.

Die Modelle sollen die Zurückführung der Krystallformen auf die einfachen Grundformen durch Zusammensetzung aus Stücken darstellen. Sie sind für den Gebrauch in der Schule bestimmt, und es wird gezeigt, wie die Schüler sie aus Cartonpapier selbst anfertigen können. Ueber das Zusammenhalten der Teile beim Gebrauche ist nur sehr wenig gesagt, woraus sich ein allgemeines Verfahren nicht wol entnehmen lässt; es scheint dies für jede Krystallform eine besondere, nicht leichte Frage zu sein. Nach einigen Bemerkungen über die Anfertigung der Modelle werden 14 zusammengesetzte Krystallformen beschrieben. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bearbeitet nach System Kleyer von J. Vonderlinn, Privatdocent an der technischen Hochschule in München. Erstes Buch: Das Projectionszeichnen. Stuttgart 1888. Julius Maier.

Die Lehre vom Projectionszeichnen wird, zumteil in Frage und Antwort auf 2 Spalten, zumteil auch ohne Fragestellung, mit nebenstehenden Figuren vorgetragen. H.

Verlag von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht von L. Brill in Darmstadt.

Aus der 16. Serie sind bemerkenswert die Modelle zur Lehre von den confocalen Flächen 2. Grades, welche sich an die von E. R. Neovius, Professor an der Universität Helsingfors, gestellte und in einer Abhandlung, Acta Societatis Scientiarum Fennicae XV., gelöste Aufgabe anschliessen: Wie muss ein Ellipsoid beschaffen sein, damit dessen Oberfläche durch seine Hauptschnitte und eine endliche Anzahl seiner Krümmungslinien in krummlinige Vierecke geteilt werden können, welche sämtliche in Rücksicht auf eine conforme Abbildung, bei der den Krümmungslinien Gerade entsprechen, Quadraten so nahe als möglich kommen? Hierzu hat der Verfasser selbst Modelle angefertigt. Das erste stellt ein Ellipsoid mit 3 Hauptschnitten und 18 Krümmungslinien dar. Jeder Octant wird durch 4 Krümungslinien der einen und 5 Krümmungslinien der andern Schar, bzhw. den ein- und zweischaligen Hyperboloiden entsprechend, in 30 solche Bogenvierecke zerlegt. H.

Elemente der mathematischen Krystallographie in neuer leichtfasslicher Darstellung. Nach den Vorträgen von Johann Krejči, Professor an der k. k. böhm. Karl-Ferdinand'schen Universität in Prag herausgegeben von Friedrich Katzer. Leipzig 1887. Wilhelm Opetz. 214 S.

Die Darstellung ist eine analytisch geometrische, welche vom vollständigen System der Krystallformen ausgeht, dieses übersichtlich ordnet, dann die einzelnen Formen nach dieser Ordnung entwickelt. Sämtliche werden aus dem Hexaid, sechsseitigem Parallelepiped, abgeleitet, welches in Winkeln und Kanten 7 Variationen zulässt. Die Geometrie und die Rechnungen der Krystallographie sind an sich einfach und leicht genug, das Verständniss wird aber in den meisten Lehrbüchern, wo dieselbe einen Teil bildet, erschwert durch den Gebrauch von Symbolen, welche die Vorstellung abschneiden, während der Gewinn an Kürze ganz unerheblich ist. Die gegenwärtige Bearbeitung bleibt bei der allgemein mathematischen Ausdrucksweise, mit welcher der Anfänger vertraut ist. Die sich ergebenden 362 Krystallformen sind auf 8 Tafeln gezeichnet. H.

---

## Mechanik.

Leitfaden und Repetitorium der analytischen Mechanik. Für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Von Rector Dr. Albert Bioler. In zwei Teilen. Analytische Dynamik der festen Körper. Mit erläuternden Beispielen und in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1888. Wilhelm Violet. 91 S.

Das Vorliegende enthält die analytischen Principien der Dynamik der Punkte, Punktsysteme und starren Körper in kurzer zusammenhangender Entwickelung. Diese zerfällt der Natur der Sache gemäss in 2 verschiedene Elemente: allgemeine Sätze als Basis aller Untersuchung und ausgeführte Lösung derjenigen speciellen Probleme, für welche eine solche möglich ist. Das gegenwärtige folgt grösstenteils letzterm theoretischen Gesichtspunkte und erstrebt Vollständigkeit, lässt sich aber auch manchmal vom vorwaltenden Interesse leiten, z. B. bei der Bewegung eines Punkts auf einer Linie, wo die allgemeine Lösung unmittelbar bekannt ist. Am wenigsten motivirt ist aber die Zuziehung des Falles, wo die Bewegung durch Stoss, d. h. also durch unberechnete Zwischenvorgänge, unterbrochen wird. Auch in Betreff der Ausführungen gilt es, dass nur grössten-

teils die Fragen der Theorie beantwortet werden: bei der Bewegung eines Punkts auf einer Kugel z. B ist nur die Zeitgleichung berechnet, die Bahngleichung geradezu vergessen. So sind auch die Methoden grösstenteils, aber nicht immer, die einfachsten: das Alembert'sche Princip z. B., das doch bei richtiger Betrachtung aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten als unmittelbare Folge hervorgeht, wird hier durch eine gar nicht einfache Rechnung daraus hergeleitet, die überdies zum Verständniss noch weiterer Erläuterung bedarf. Endlich sind auch die Begriffsbestimmungen grösstenteils correct, aber nicht alle: die Schwere z. B. wird in constantes Verhältniss zur Masse gesetzt und ein Coefficient angegeben, welcher nahezu der Breite $48^0$ $27'$ entspricht, ohne ein Wort von seiner Abhängigkeit zu sagen. Im ganzen also ist die Arbeit eine erfreuliche Erscheinung, aber noch in vielen Punkten besserungsbedürftig. H.

Ueber die Berechnung und die bildliche Darstellung von Trägheits- und Centrifugalmomenten ebener Massenfiguren. Von Robert Land in Dresden. Leipzig 1888. Arthur Felix. 66 S. (Civilingenieur XXXIV.)

Im Vorliegenden reproducirt der Verfasser die im Civilingenieur XXXIII vom Herrn Professor Mohr entwickelte Lehre und fügt eigene Bemerkungen hinzu. Es werden darin die „Centrifugalmomente“, die Bestimmungsgrössen für die Lage des „Trägheitsschwerpunkts“ — zwei Namen deren Bedeutung der Verfasser zu erklären nicht für nötig befunden hat — und die Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstücks in einer für die Construction geeigneten Form durch Rechnung dargestellt, dann die Construction ausgeführt. Nach dem Urteile des Verfassers über Mohr's Theorie gibt dieselbe „eine äusserst übersichtliche und einfache Darstellung von Flächenmomenten 2. Ordnung in Bezug auf beliebige Axen, welche Darstellung bei ihrer grossen Allgemeinheit für alle in der Flächenebene befindlichen Axen an Einfachheit wol schwerlich übertroffen werden kann und gegenüber der bisher meist üblichen Darstellung durch Trägheits- und Centralellipsen für die praktischen Anwendungen einen überwiegenden Vorteil besitzt.“ H.

## Technik.

Das wahre Gesetz der Dampf-Expansion und die Berechnung der dreistufigen Expansions-Dampfmaschine. Von Arnold Samuelson, Chef-Ingenieur der Stadtwasserkunst zu Hamburg. Mit 4 lithographischen Tafeln und 14 Skizzen im Text. Hamburg und Leipzig 1888. Leopold Voss. 127 S.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass der Wasserdampf im Cylinder einer Dampfmaschine in der Expansionszeit, d. h. wo weder Dampf noch Wärme zu oder abfliesst, am genauesten der Poisson-schen Formel

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n$$

gemäss Druck und Volum ändert, wenn man darin auch $n$, d. i. das Verhältniss der Capicitäten bei constantem Druck und Volum vorläufig als unbekannt betrachten müsse. Die Theorie von Clausius sei völlig ohne Anwendung, weil sie allein von gesättigtem Dampf handle, der im vorliegenden Falle nicht dauernd bestehen könne. Die Techniker hingegen seien sämtlich abgeneigt auf Revision der Berechnungsweise einzugehen. Er hat zur Verteidigung seiner Ansicht 4 Vorträge gehalten und publicirt dieselben unverändert in der vorliegenden Schrift. H.

---

## Optik.

Das Licht. Zwölf Vorlesungen gehalten in Aberdeen 1883—1885 nebst zwei Vorlesungen über Absorption und Fluorescenz des Lichtes von George Gabriel Stokes M. A. F. R. S. F. P. C. etc., Professor der Mathematik in Cambridge. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. Otto Dziobek, Privatdocent an der technischen Hochschule zu Charlottenburg. Leipzig 1888. Johann Ambrosius Barth. 308 S.

Diese Vorlesungen sind in Ausführung der veränderten Bestimmungen des Burnett'schen Legats, zu der dessen Curatorium das Thema gegeben und den Verfasser erwählt hat, gehalten worden. Die Behandlungsweise und namentlich die Art, wie er den Anschluss an die ursprüngliche Forderung, welche die Wissenschaft in Beziehung zur Religion zur Aufgabe macht, bewahrt hat, unterlag dem freien Ermessen des Verfassers. Der Vortrag wendet fast gar keine Mathematik an, beschränkt sich also ganz auf rein qualitative Dar-

legung der Lehre; desto grösseres Gewicht legt er auf den geschichtlichen Entwickelungsgang der Theorie. Hierdurch wird es möglich dem Unkundigen einen Begriff von den Erfordernissen der Einsicht zu geben, den dieser nur stufenweis, nicht an fertiger Doctrin gewinnen kann. In der Lehre vom Lichte werden 3 Teile unterschieden, deren jeder es von einem eigenen Gesichtspunkte aus betrachtet: das Licht ist erst Gegenstand, dann Mittel der Erkenntniss, dann tritt es in Beziehung zu andern Elementen der Natur und des Menschenlebens. Jedem dieser 3 Teile sind 4 Vorlesungen gewidmet. Deren Mittelpunkte sind im 1. Teile: Emissionstheorie, Interferenz und Beugung, Doppelbrechung und Polarisation, Wellentheorie. Im 2. Teile sind es die Anwendungen der Absorption zur Unterscheidung, die chemischen und astronomischen Anwendungen der Spectralanalyse; von letztern handeln 2 Vorlesungen. Der 3. Teil handelt: von den meteorologischen, von den animalischen Wirkungen; vom Auge, von der Entstehung der Welt, der Organismen und des Lebens. Der Anhang gibt noch 2 Vorträge: über die Farben der Körper und über die Fluorescenz. Figuren und Abbildungen enthält das Buch nicht. H.

Leitfaden der theoretischen Optik zum Gebrauche auf höheren Unterrichtsanstalten und beim Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. Carl Pabst. Halle a. S. 1888. H. W. Schmidt. 100 S.

Das Buch ist so abgefasst, dass von der Schulmathematik der volle Gebrauch gemacht werden soll. Es behandelt daher die Lehren von der Reflexion, der Brechung und der Dispersion als Anwendungen der Geometrie und Trigonometrie und schliesst die Zweige und Fragen der Optik, welche sich dazu nicht eignen, von der Betrachtung aus. Dem Ganzen ist demgemäss die Gestalt einer mathematischen Doctrin in Lehrsätzen und Beweisen gegeben worden. Diese Wahl lässt sich vollkommen gut heissen: es wird damit dem Schüler der reichhaltigste und fruchtbarste Teil der Optik als derjenige dargeboten, den er exact aufzufassen vermag; sowol der theoretische Unterbau als auch die weiter gehenden Untersuchungen können dem Studium vorbehalten bleiben. Allein die Ausführung entspricht nicht der Idee: in den Anfängen der 4 Teile fehlt alle klare Stellung. Werden schon in der reinen Geometrie Axiome als notwendig erkannt, so liegt es am Tage, dass umsomehr hier die Axiome oder Hypothesen ausgesprochen sein müssen, auf welche sich die Deduction stützen kann. Statt dessen wird hier gleich der erste Satz jedes Abschnitts, insbesondere das Brechnngsgesetz, als Lehrsatz aufgestellt und dann unter „Beweis“ mit Gebrauch undefinirter Be-

griffe dem Schüler eine zwei Seiten lange Betrachtung ohne alle exacte Schlussweise vorgeredet um ihm den Satz glaubhaft zu machen. Begründung des Brechungsgesetzes war nicht notwendig, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht weiter in Anwendung kommt; man konnte das Gesetz als empirisch erkanntes zugrunde legen. Es liess sich auch leicht elementar begründen; nur musste der Strahl als Gerade, der momentan erreichte Punkt auf ihr und dadurch die Geschwindigkeit, endlich der Ort der gleichzeitig erreichten Punkte als Ebene construirt und die Hypothese gemacht werden, dass der Strahl auf ihr senkrecht steht, was sich wiederum elementar beweisen liess, wenn man in der Hypothese noch weiter zurückgriff. Im Vorwort wird behauptet, es sei die Hypothese über das Wesen des Lichts vorangestellt, um deutlich darzutun, wie sich die ganze Lehre aus einem einheitlichen Principe ableiten lässt. Was im voraus über das Wesen des Lichts gesagt ist, möchte schwerlich Basis einer daraus folgenden Theorie sein können; denn die einzige mathematische Angabe, dass die Schwingungen transversale sein sollen, hat keinen Sinn, wenn keine Richtung genannt wird, zu der sie es sind. Jedenfalls steht alles Folgende damit in keiner logischen Verbindung. Angeblich wird daraus bewiesen, dass die Lichtstrahlen im isotropen Medium gerade Linien sind. Was aber ein Lichtstrahl bedeutet, ist hier gar nicht erklärt; die Strahlen treten in der Rede auf als beliebig gedachte Gerade; von solchen weiss man auch ohne Optik, dass sie Gerade sind. H.

---

## Vermischte Schriften.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXV. 1888. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume IV. Roma 1888. V. Salviucci.

Der 4. Band enthält folgende mathematische Abhandlungen.

Bianchi: Ueber die kleinsten Flächen in Räumen constanter Krümmungen. — Ueber die Fuchs'schen Flächen. — Ueber die unbestimmten quadratischen Differentialformen.

Cesàro: Ueber die Begriffe der Grenze und der Stetigkeit. — Formeln zur Bewegung eines Punktes. — Ueber eine Verteilung der Zeichen. — Starre Bewegung und theoretische Deformationen in krummen Räumen.

D'Ovidio: Ueber einige simultane Invarianten zweier binären Formen 5. und 4. Ordnung und über deren Resultanten.

Pincherle: Ueber gewisse bestimmte Integrale. — Ueber die verallgemeinerten hypergeometrischen Functionen.

Volterra: Eine Erweiterung der Riemann'schen Theorie der Functionen complexer Variabeln. — Ueber die polydromen analytischen Functionen.

Pascal: Ueber ein Fundamentaltheorem in der Theorie des symbolischen Calculs der *n*ären Formen.

Gerosa: Ueber die Schallgeschwindigkeit in den Legirungen.

Maschke: Auflösung der Gleichung 6. Grades.

Brioschi: Beobachtungen an vorstehender Mitteilung. — Die Normalform der Gleichungen 6. Grades (2 Noten). — Die Differentialgleichungen für die Perioden der hyperelliptischen Functionen zweier Variabeln.

Paladini: Ueber die rotirende Bewegung, welche im Vacuum oder in incompressibler Flüssigkeit ein Körper unter dem Einfluss von Kräften mit dem Potential $H_1 \cos^2\vartheta + H_2 \cos\vartheta$ annimmt.

Ricci: Ueber die Classification der quadratischen Differentialformen.

Montesano: Ueber die involutorischen Transformationen des Raumes, welche einen linearen Complex von Geraden bestimmen.

Marangoni: Kriterien zur Aufstellung einer natürlichen Classification der Krystalle. — Das Problem der capillaren Anziehung und Abstossung.

Favero: Eine neue Untersuchung über die Schwere.

Padova: Eine neue Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf Mechanik. — Ueber die krummlinigen Coordinaten.

Pittarelli: Ueber die zum Oktaeder gehörenden Formen. — Ueber die Transformation des elliptischen Differentials ausgeführt mittelst typischer Darstellung der binären Formen 3. und 4. Grades.

Cardani: Ueber den Einfluss der elastischen Kräfte auf die transversalen Schwingungen der Saiten (2 Noten).

Govi: Neue Methode den Ort, die Lage und Grösse der von Linsen oder complexen optischen Systemen gegebenen Bilder zu construiren und zu berechnen.

Pierpaoli: Einfluss der Temperatur auf die Schwingungszahl einer Stimmgabel.

Betti: Ueber die Entropie eines Newton'schen Systems in Bewegung.

Battaglini: Ueber die sestatischen Punkte einer beliebigen Curve.

Ricco: Deformirtes Bild der Sonne im Spiegel des Meeres und dessen Abhängigkeit von der Rundung der Erde.

Tonelli: Ueber eine gewisse partielle Differentialgleichung.

H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegen von G. Mittag-Leffler 8. Stockholm 1886. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 8. Band enthält folgende Abhandlungen.

G. W. Hill: Ueber den Teil der Bewegung des Perigäums des Mondes, welcher eine Function der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond ist.

Hj. Mellin: Zur Theorie der $\Gamma$ Function.

O. Staude: Ueber hyperelliptische Integrale 2. und 3. Gattung

M. A. Stern: Ueber einen Satz von Hermite bezüglich auf die Function $E(x)$.

H. Schubert: Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimensionen.

E. A. Stenberg: Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen.

E. Holst: Beweis des Satzes, dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat.

M. Noether: Ueber die reductibeln algebraischen Curven.

H. Weber: Theorie der Abel'schen Zahlkörper.

P. Appell: Ueber einige Anwendungen der Function $Z(x, y, z)$ auf die mathematische Physik.

H. Poincaré: Ueber die unregelmässigen Integrale der linearen Gleichungen.

F. Casorati: Die Functionen einer einzigen Variabeln mit beliebig vielen Perioden. — Die fundamentalen Oerter der inversen Functionen der Abelschen Integrale und insbesondere der inversen Functionen der elliptischen Integrale 2. und 3. Gattung.

J. Bertrand: Ueber die elektrischen Einheiten. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXV.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

**Epping, C.**, Astronomisches aus Babylon od. das Wissen der Chaldäer üb. den gestirnten Himmel. Unter Mitwirkung v. J. N. Strassmaier. Freiburg, Herder. 4 Mk.

Fortschritte, die, der Physik. Nr. 12. 1888. Leipzig, E. H. Mayer. 3 Mk.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtmann. Unter Mitwirkung von F. Müller u. A. Wangerin hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 18. Bd. Jahrg. 1886. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

**Lommel, E.**, Georg Simon Ohm's wissenschaftliche Leistungen. Festrede. München, Franz'scher Verl. 60 Pf.

**Némethy, G.**, Quaestiones de Firmico Materno astrologo. Budapest, Lampel. 60 Pf.

**Ostwald's** Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 1 — 3. Leipzig, W. Engelmann. Kart. 2 Mk. 10 Pf.

**Reiff, R.**, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen, Laupp. 5 Mk.

Revue der Fortschritte der Naturwissenschaften. Hrsg. v. H. J. Klein. (17. Bd.) Neue Folge. 9. Bd. Nr. 1. Physik. Leipzig, E. H. Mayer. pro Nr. 1 — 6. 9 Mk.

### Methode und Principien.

**Beetz, K. O.**, das Typenrechnen auf psychophysischer Grundlage. 1. Tl. Theoretische Darstellung. Halle, Schrödel. 2 Mk. 50 Pf.

**Bredichin, Th.**, sur l'origine des comètes périodiques. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk.

Dorn, J. u. P. Nakel, Anleitung zum Unterrichte im Rechnen. 5. Tl. 7. Afl. v. P. Nakel. Breslau, Handel's Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Harms, Ch., zwei Abhandlungen üb. den Rechenunterricht. Oldenburg, Stalling's Verl. 80 Pf.

Schulze, C., richtig Rechnen durch Selbstunterricht. Berlin, A. Schultze's Verl. 3 Mk.

Steuer, W., die Decimalfläche, ihr Wesen und ihre Stellung im Selbstunterrichte. 2. Afl. Breslau, Woywod. 50 Pf.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. Bearb. u. hrsg. v. K. Dürigen. 26.—29. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 60 Pf.

**Sammlungen.**

Adam, W., Resultate zu dem arithmetischen u. algebraischen Uebungsbuch. 2. Afl. Neuruppin, Petrenz. 90 Pf.

Bardey, E., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enth. üb. alle Teile der Elementar-Arithmetik. 15. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Bothe, A., Sammlung v. Rechenaufgaben f. höhere Schulen. 2. Hft. 7. Afl. Annaberg, Graser. Kart. 1 Mk.

Dittmers, H., Rechenbuch f. Stadt- u. Bauschulen. 2. Hft. 8. Afl. Harburg, Elkan. 65 Pf.

Fölsing, Rechenbuch f. Gymnasien, Realschulen, Ober-Realschulen etc. 2 Tle. 19. u. 20. Afl. bearb. v. O. Hoffmann. Berlin, E. Goldschmidt. Geb. à 1 Mk. 20 Pf.

Frick, F., Uebungsstoff f. das stereometrische Rechnen. Nürtingen, Zimmermann. 80 Pf.

Harms, Ch. u. A. Kallius, Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien, Ober-Realschulen etc. 14. Afl. Oldenburg, Stalling's Verl. 2 Mk. 25 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 528.—567. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Lösungen der Absolutorial-Aufgaben aus der Mathematik an den humanistischen Gymnasien Bayerns seit dem J. 1861. Nebst e. Anhang: Die wichtigsten Formeln der Mathematik. München, Pohl's Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Löwe, M. u. F. Unger, Aufgaben f. das Zahlenrechnen. Hft. A. u. B. 3. Afl. Leipzig, Klinkhardt. à 60 Pf.

Särchinger, E. u. V. Estel, Aufgabensammlung f. den Rechenunterricht in den Unterklassen der Gymnasien. 1. Hft. Sexta. Leipzig, Teubner. Kart. 80 Pf.

Scharlach's Aufgaben zu Uebungen im schriftlichen Rechnen

f. Bürger- u. Volksschulen. Hrsg. v. A. Steger u. Wohlrabe. 5. Hft. 7. Afl. Halle, Schrödel. 40 Pf.

Schellen, H., Aufgaben f. den Unterricht im Rechnen. 2. Tl. Für die mittleren u. oberen Klassen. 6. Afl. Bearb. v. H. Lemkes. Münster, Coppenrath. 2 Mk.

Schmehl, Ch., Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 2. Tl. Die bürgerl. Rechnungsarten. Giessen, Roth, Verl. 1 Mk. 60 Pf.

Steck, F. H. u. J. Vielmayr, Resultate zu der Sammlung arithmetischer Aufgaben. Kempten, Kösel. 45 Pf.

Steuer, W., neue Sammlung angewandter Aufgaben f. das Kopfrechnen. 2 Hfte. 3. Afl. Breslau, Woywod. 2 Mk. 50 Pf.

Wrobel, E., Uebungsbuch zur Arithmetik u. Algebra. 1. Tl. Rostock, Werther. 2 Mk. 60 Pf.

Zepf, C., Rechenaufgaben f. die Oberklassen höherer Mädchenschulen u. Töchterinstitute. Freiburg, Herder. 50 Pf.; kart. 60 Pf.

## Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 30. Afl. Halle, Strien, Verl. 2 Mk.

Gezeitentafeln f. das Jahr 1890. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amtes. Berlin, Mittler & S. 1 Mk. 50 Pf.

## Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, B., üb. die Theilbarkeit der Zahlen. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Biermann, O., zur Theorie der Doppelintegrale expliciter irrationaler Functionen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Borchardt, B., Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre. Berlin, J. Springer. 2 Mk. 40 Pf.

Büttner, A., die Elemente der Buchstabenrechnung u. Algebra. 9. Afl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 2 Mk. 80 Pf.

Fürle, H., üb. die eindeutigen Lösungen e. Gruppe v. Functionalgleichungen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Goldscheider, F., das Reziprozitätsgesetz der achten Potenzreste. Ebd. 1 Mk.

Haentzschel, E., Beitrag zur Theorie der Funktionen d. elliptischen u. d. Kreiscylinders. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Heilermann, H., u. J. Dieckmann, Lehr- u Uebungsbuch f. den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 3. Tl. 2. Afl. Essen, Bädeker. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

Igel, B., üb. die associirten Formen u. deren Anwendung in der Theorie der Gleichungen. Wien, Gerold's S. 3 Mk.

Lackemann, C., die Elemente der Arithmetik. 2. Afl. Breslau, F. Hirt. Kart. 75 Pf.

Lurtz, F. E., Rechenschule. 2. Tl. 7. Afl. Kronstadt, Zeidner. Kart. 1 Mk.

Richter, P. B., der praktische Ansatz der Regeldetri- und Prozentrechnungen als Lösung der Aufgabe. Aehnliches f. Gesellschaftsrechnung, Mischungsrechnung etc. Leipzig, Fock. 50 Pf.

Weber, K., arithmetische Regeln. Hilfsbuch f. arithmet. Aufgaben-Sammlungen. Braunschweig, Achtelstetter. 50 Pf.

## Geometrie.

Berger, G., Lehre der Perspektive in kurzer, leicht fasslicher Darstellung. 9. Afl. Leipzig, Scholtze. 2 Mk. 40 Pf.

Bobek, K., über Dreischaarcurven. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

- über die Steiner'schen Mittelpunktscurven. Ebd. 50 Pf.

Bohle, G., Vorschule der Geometrie. Crefeld, Greven. 50 Pf.

Braune, A., Raumlehre f. Volks-, Bürger- u. Fortbildungsschulen, sowie f. Präparanden-Anstalten. 2. Afl. Halle, Schrödel. 65 Pf.

— dass. Methodische Erläuterungen, ausgeführte Lectionen u. Auflösungen zu den Aufgaben. Ebd. 30 Pf.

Focke, M. u. M. Krass, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen u. anderen höheren Lehranstalten. 1. Thl. Planimetrie. 9. Afl. Münster, Coppenrath 1 Mk. 80 Pf.

Hahn, H., Euler's Methode der Parameterdarstellung algebraischer Curven. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Kalbe, O., der goldene Schnitt in Zeichnung u. Schrift, insbesondere als goldenes Grundgesetz schöner Schriftformen. Hannover, Cruse. 1 Mk.

Kohl, E., üb. die Lemniscatentheilung. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Mahler, Einleitung in die abzählende Geometrie. Tübingen, Fues. 60 Pf.

Müller, H., die Elemente der Stereometrie. Ein Beitrag zur Methode d. geometr. Unterrichts. 2. Afl. Metz, Scriba. 1 Mk. 20 Pf.

Peschka, G. A. V, freie Perspektive (centrale Projektion) in ihrer Begründung u. Anwendung. 2. Afl. 2. Bd. Leipzig, Baumgärtner. 14 Mk.; geb. 16 Mk.

Rulf, W., Elemente der projectivischen Geometrie. Auf Grund neuer vom Prof. C. Küpper herrühr. Definitionen u. Beweise leicht fasslich zusammengestellt. Halle, Nebert's Verl. 2 Mk. 50 Pf.

**Schuberth**, H., illustrirtes Hand- u. Hülfsbuch der Flächen- u. Körperberechnung. 2. Asg. Berlin, Cronbach. 3 Mk.

**Stahl**, H., üb. die konforme Abbildung durch die lineare Substitution. Tübingen, Fues. 50 Pf.

**Weber**, K., Lehrbuch der Planimetrie f. höhere Schulen u. zum Selbst-Unterricht. Braunschweig, Achtelstetter. 2 Mk. 75 Pf.

## Trigonometrie.

**Theel**, E., Einleitung in die Trigonometrie, als halbjährliches Pensum f. Untersekunda. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

## Geodäsie.

Arbeiten, astronomisch-geodätische, f. d. europäische Gradmessung im Königr. Sachsen. 2. Abth. Das trigonometrische Netz. I. Ordnung. Bearb. v. A. Nagel. 1. Hft. Berlin, Stankiewicz. 30 Mk.

**Boersch**, O., geodätische Literatur, auf Wunsch der permanenten Commission f. internationale Erdmessung. zusammengestellt. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. 7. Bd. Berlin, Mittler & S. 10 Mk.

**Reinhertz**, C., die Verbindungs-Triangulation zwischen dem rheinischen Dreiecksnetze der europäischen Gradmessung u. der Triangulation d. Dortmunder Kohlenreviers der Landesaufnahme, ausgeführt v. der preussischen Katasterverwaltung in den Jahren 1881—1883. Stuttgart, Wittwer's Verl. 5 Mk.

**Wernecke**, H., Mittheilungen aus dem Markscheiderwesen. Vereinschrift d. rheinisch-westfälischen Markscheider-Vereins. 4. Hft. Freiberg, Craz & G. 3 Mk.

## Mechanik.

**Bigler**, U., Potential einer elliptischen Walze. Bern, Huber & Co. 2 Mk.

**Geigenmüller**, R., die Anfangsgründe der theoretischen Mechanik m. Anwendungen auf Maschinen. Mittweida, Polytechn. Buchhandl. 3 Mk. 60 Pf.

**Haussner**, R., die Bewegung eines v. 2 festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen materiellen Punktes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 80 Pf.

**Ohnesorge**, A., hyperelliptische Integrale u. Anwendungen auf Probleme der Mechanik. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

**Velde**, W., üb. e. Spezialfall der Bewegung eines Punktes, welcher von festen Centren angezogen wird. Ebd. 1 Mk.

Wagner, K., üb. die Bewegung e. inkompressiblen Flüssigkeit, welche begrenzt ist v. 2 in gegebener Rotation befindl. Flächen. Tübingen, Fues. 1 Mk. 60 Pf.

Züge, H., das Potential e. homogenen Ringkörpers m. elliptischem Querschnitt. Lingen, van Acken. 1 Mk. 25 Pf.

Zwerger, M., der Schwingungsmittelpunkt zusammengesetzter Pendel. München, Lindauer. 4 Mk.

## Technik.

Abdank-Abakanowicz, B., die Integraphen. Die Integralkurve u. ihre Anwendgn. Deutsch bearb. v. E. Bitterli. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Calgary, A. u. J. N. Teufelhart, der elektromagnetische Telegraph. Umgearb. u. ergänzt v. H. Leel. 2. Afl. Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. 5 Mk.

Elektro-Techniker, der. Hrsg.: G. A. Ungár-Szentmiklósy. 8. Jahrg 1889/98. (24 Nrn.) Nr. 1. Wien, Perles' Verl. preplt. 12 Mk.

Edler's Messblatt, e. Apparat zum Bestimmen v. Neigungswinkeln, Höhen u. Tiefen. Halle, Reichardt. 50 Pf.

Fortschritte d. Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 2. Jahrg. Das Jahr 1888. 3. Hft. Berlin, J. Springer. 5 Mk.

Grünwald, F., der Bau, Betrieb und die Reparatur der elektrischen Beleuchtungsanlagen. 2. Afl. Halle, Knapp. 3 Mk.

Lindner, M., Leitfaden der praktischen Haustelegraphie. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

Thompson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 3. Afl. Uebers. v. C. Grawinkel. 1. Thl. Ebd. 12 Mk.

— dass. 4. Hft. Ebd. 3 Mk.

## Optik, Akustik und Elasticität.

Bach, C., Elasticität u. Festigkeit. Die f. die Technik wichtigsten Sätze u. deren erfahrungsmässige Grundlage. 1. Lfg. Berlin, J. Springer. 8 Mk.

Lübeck, G., die Umformung e. elastischen Kugel durch Zusammendrücken zwischen zwei horizontalen u. starren, glatten od. rauhen Ebenen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Wiechert, E, üb. elastische Nachwirkung. Königsberg, Koch. 1 Mk.

## Erd- und Himmelskunde.

Anton, F., Bestimmung der Polhöhe d. astronomisch-meteorologischen Observatoriums in Triest durch Beobachtung v. Sternpassagen im ersten Vertical. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn d. Planeten (175) Andromache. Ebd. 40 Pf.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. W. Meyer u. B. Schwalbe. 11. Afl. 1 u. 2. Lfg. Berlin, E. Goldschmidt. 60 Pf.

Dreisbach, H., praktische Anleitung zur Vorausbestimmung d. Wetters. Paderborn, Schöningh. 40 Pf.

Gartbe, E., üb. die tägliche u. jährliche Periode der Variationen der erdmagnetischen Kraft im Moltkehafen auf Süd-Georgien während der Polar-Expeditionen v. 1882 u. 1883. Göttingen, Vandenhoeck & R 2 Mk. 80 Pf.

Grossmann, J., Wetterperioden? Berlin, Moeser. 1 Mk.

Himmel und Erde. Populäre illustrirte Monatsschrift. Red. M. W. Meyer. 1 Jahrg. 1888/89. 7. Hft. Berlin, H. Paetel. Vierteljährlich 3 Mk. 60 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1891 m. Ephemeriden der Planeten (1) (274) f. 1889. Hrsg. unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler's Verl. 12 Mk.

Kirsch, Th., die Vorbestimmung des Wetters. Breslau, Maruschke & B. 75 Pf.

Klein, H. J., Stern-Atlas. Neue Asg. 1. Lfg. Leipzig, E. H. Mayer. 3 Mk.

Kreidel, W., Untersuchungen über den Verlauf der Flutwellen in den Ozeanen. Frankfurt, Reitz & K. 2 Mk.

Lotabweichungen in der Umgebung von Berlin. Veröffentlichung d. königl. preuss. geodät. Instituts. Berlin, Stankiewicz. 12 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krueger. 122. Bd. (24 Nrn.) Nr. 1. Hamburg, Mauke S. preplt. 15 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 19. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

Riggenbach, A., Resultate aus 112jährigen Gewitteraufzeichnungen in Basel. Basel, Georg, Verl. 1 Mk.

Ritzhaupt, F., der Sternhimmel m. seinen Veränderungen, nebst e. Darstellung üb. die Vertheilung d. Sonnenlichtes auf der Erdoberfläche. Karlsruhe, Macklot, Verl. 40 Pf.

Stern-Ephemeriden f. d. J. 1891. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v E. Schönfeld u. H. Seeliger. 24. Jahrg. 1889. 2 Hft. Leipzig, W. Engelmann. 2 Mk.

## Nautik.

Jahrbuch, nautisches, od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1892 zur Bestimmung der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Hrsg. v. Reichsamt d. Innern. Unter Red. v. Tietjen. Berlin, C. Heymann's Verl. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

## Physik.

Conrad, P., Präparationen f. den Physik-Unterricht in Volks- u. Mittelschulen. Mit Zugrundelegg. v. Individuen. Nach Herbart'schen Grundsätzen bearb. 1. Tl.: Mechanik u. Akustik. Dresden, Bleyl & K. 3 Mk.

Crüger, J., Grundzüge der Physik, mit Rücksicht auf Chemie, als Leitfaden f. die mittlere physikal. Lehrstufe methodisch bearbeitet 23. Afl. Leipzig, Amelang's Verl. 2 Mk. 10 Pf.

Csógler, A., Dimensionen u. absolute Maasse der physikalischen Grössen. Leipzig, Quandt & H. 3 Mk. 60 Pf.

Dvořák, V., üb. die Wirkung der Selbstinduction bei elektromagnetischen Stromunterbrechern. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 2. Lfg. Breslau, Trewendt, Subscript.-Pr. 3 Mk. 60 Pf.

Heussi, S., Leitfaden der Physik. 12. Afl., bearb. v. K. Weinert. Braunschweig, Salle. 1 Mk. 50 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 101.—106. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Krebs, G., Lehrbuch der Physik f. Real- u. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen u. Seminare. 6. Afl. Wiesbaden, Bergmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Lippich, E., üb. die Bestimmung v. magnetischen Momenten, Horizontalintensitäten u. Stromstärken nach absolutem Masse. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Mitthaler, J., üb. die Veränderlichkeit der specifischen Wärme d. Quecksilbers m. d. Temperatur. Königsberg, Koch. 1 Mk.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. 9. Afl. Freiburg, Herder. 4 Mk.; Einbd. 50 Pf.

Schwartze, Th., E. Japing u. A. Wilke, die Elektricität. Eine kurze u. verständl. Darstellg. der Grundgesetze sowie der Anwendgn. der Elektricität zur Kraftübertragg., Beleuchtg., Galvanoplastik, Telegraphie u. Telephonie 3. Afl. Bearb. v. A. Ritter v. Urbanitzky. Wien, Hartleben. Geb. 1 Mk. 50 Pf.

Stefan, J., üb. einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

## Vermischte Schriften.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. A. Klein, W. Dyck, A. Meyer. 34. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. preplt. 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe 1889. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Enth. die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 97. Bd. 8.—10. Hft. Leipzig, Freytag. 13 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1889. 1. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin i. J. 1888. 7. Jahrg. Red. v. E. Rosochatius u. A. König. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

# Litterarischer Bericht

## XXXI.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der unendlichen Reihen. Von Dr. R. Reiff, Professor am Gymnasium zu Heilbronn. Tübingen 1889. H. Laupp. 212 S.

Mehr und mehr bereitet sich der Aufbau einer die neue Wissenschaft umfassenden Geschichte der Mathematik durch successive Behandlung ihrer Objecte vor. Auch die vorliegende Schrift ist ein Beitrag zur materiellen Grundlage des künftigen Universalwerkes und bedarf als notwendiger Bestandteil derselben keiner weitern Rechtfertigung. Wenn, wie der Verfasser sagt, es schwierig ist, die Theorie der Reihen von den Disciplinen, mit denen sie in Zusammenhange steht, gesondert zu betrachten, so würde es noch viel schwieriger sein, ihre Geschichte in ihrer Verflechtung mit denselben darzustellen. Ihre vielseitigen Beziehungen sind es gerade, die ihren Entwickelungsgang in ein deutlicheres Licht stellen, und ehe diese Klärung stattgefunden hat, lässt sich überhaupt keine befriedigende Darstellung geben. Die Geschichte der unendlichen Reihen teilt sich in 3 Perioden. Die erste wird genannt die von Newton und Leibnitz. Zu ihr gehören auch Wallis, Jakob und Johann Bernoulli. Von diesen werden specielle Reihen gebraucht zur Quadratur des Kreises, der Hyperbel und andrer Curven. Die Convergenz tritt schon von Anfang an in Frage und wird bewiesen; auch das Wort ist schon in Gebrauch. Die zweite Periode, hier genannt die der formalen Behandlungsweise, zu der Moivre, Stirling, Taylor, MacLaurin, Euler und zum Teil Lagrange gerechnet werden, charakterisirt sich durch

Erweiterung. Die Aufhebung der Beschränkung durch die Bedingung der Convergenz wird mehr antipicirt als zur Aufgabe, das Entwickelungsgesetz zur Hauptsache gemacht. Die dritte Periode, genannt die der exacten Behandlungsweise, welche mit Gauss beginnt, ist auf Herstellung der beiseite gesetzten Strenge gerichtet und begründet erst eine allgemeine Reihentheorie. Es handelt sich im Buche, nachdem einiges über die Gauss'sche Reihe gesagt ist, aussschliesslich um die Kriterien der Convergenz und deren Ausbildung. H.

Jordani Nemorarii geometria vel de triangulis libri IV. Zum ersten male nach der Lesart der Handschrift Db. 86. der Königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden herausgegeben von Maximilian Curtze, Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Thorn. Mit 5 Figurentafeln. Thorn 1887. Ernst Lambeck. 50 S.

Das herausgegebene Werk bildet zusammen mit einer zweiten Schrift desselben Autors „Liber de similibus arcubus" das 6. Heft der „Mitteilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn." Als Einleitung gehen voraus genauere Nachrichten über die einzelnen bekannt gewordenen Schriften, Nachrichten namentlich welche wir den Nachforschungen des Fürsten Boncompagni verdanken. Durch diese ist zuerst erwiesen, dass der Ordensgeneral der Dominicaner Jordanus mit dem Mathematiker Jordanus Nemorarius dieselbe Person ist. Infolge dessen ist anzunehmen, dass dessen mathematische Schriften vor 1220 verfasst sind. Vor dem gegenwärtigen waren bereits 5 seiner Werke gedruckt. Zuerst erschien „Arithmetica libris X demonstrata" 1496 in Paris; dann „Algorismus demonstratus" 1534 in Nürnberg; dann „De numeris datis" herausgegeben von Treutlein in Karlsruhe (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, II. Heft, S. 125); dann „Tractatus de ponderibus", unvollständig schon 1533 von Apian in Nürnberg, vollständig 1565 von Curtius Trojanus herausgegeben; zuletzt „Descriptio sphaerae in plano" in den Ausgaben des Planisphaerium von Ptolemäus. In Handschriften sind ausserdem vorhanden: „Tractatus de isoperimetris propositiones septem"; „Jordanus de speculis et ponderibus". Die Schrift „De numeris" ist dadurch bemerkenswert, dass hier zum erstenmal Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen als solchen, nicht erst in Linien dargestellten Zahlen auftreten, während die Operationszeichen noch ziemlich unpraktisch sind. Ein Beispiel von algebraischer Rechnung — es betrifft die Auflösung einer quadratischen Gleichung — zeigt, dass das Verfahren dem heutigen ganz gleich, nur des Ausdrucks wegen nicht leicht verständlich ist.

H.

Ueber die Berücksichtigung des Historischen beim Unterricht in der Geometrie. Von Dr. H. Böklen, Reallehrer in Ludwigsburg. Tübingen 1889. Franz Fues. 23 S.

Der Titel lässt einen pädagogisch didaktischen Inhalt erwarten; letzterer ist jedoch durchweg historisch. Die Schrift gibt, nachdem sie die 3 Bearbeitungen der Geschichte der Mathematik, die wir aus neuerer Zeit besitzen, von C. A. Bretschneider, Hermann Hankel und M. Cantor genannt, zuerst eine vortreffliche Uebersicht über die mathematische Litteratur des Altertums, in 4 Abschnitte geteilt: Aegyptische Mathematik, Uebergang zur griechischen Geometrie, griechische Geometrie, höhere griechische Geometrie und Stereometrie, und lässt dann alle nähern Angaben über die Schriften, die Lehre und den Standpunkt in Noten folgen. Das hier entfaltete Bild der Mathematik der Alten ist weit reichhaltiger, als es wol ein Schüler durch die Notizen gewinnen wird, die gewöhnlich beim Unterricht eingeschaltet werden, gleichwol der Umfang klein genug um es sich leicht zu eigen zu machen. Die Schrift möchte daher für Schulen sehr zu empfehlen sein, mit der Bestimmung, dass die Schüler sie einmal durchlesen, später das Bezügliche darin nachschlagen.

H.

---

## Methode und Principien.

Die Lehre von der Energie historisch-kritisch entwickelt. Nebst Beiträgen zu einer allgemeinen Energetik. Von Dr. Georg Helm, Oberlehrer an der Annenschule zu Dresden. Leipzig 1887. Arthur Felix. 104 S.

Das Buch lässt sich weder zu den eigentlich historischen noch zu den eigentlich philosophischen Schriften zählen, obgleich es sich mit Geschichte und Philosophie beschäftigt; zutreffender würde es sein, es ein poetisches Erzeugniss zu nennen. Zur historischen Darstellung würde gehören, dass der Ursprung und die Stadien der Ausbildung des Begriffs der Energie mit litterarischem Nachweis ans Licht gestellt wären. Hierauf geht die Schrift nicht ein: sie bleibt von Anfang an bei dem Worte Energie stehen, ohne irgend einmal dessen Inhalt zu entfalten, ohne das Problem darzulegen, um dessen Lösung es sich handelt, so dass ein Fortschritt in der Auffassung überhaupt nicht ersichtlich werden kann. Eher poetisch als philosophisch aber stellt sich die Schrift dar, sofern sie ihr Interesse nur der Aussenseite der litterarischen Erscheinungen zuwendet, und ihre

Urteile, um deren exacte Begründung sie sich nirgends bemüht, nur den Geschmack des Verfassers repräsentiren. Nach dessen Ansicht muss die Geschichte die geäusserten Ideen aller Schriftsteller, die das Wort Energie im Munde führen, des Phantasten wie des Forschers, gleicherweise würdigen; denn auch das vergessene Wort wirke fort und sei als Grund späterer wichtiger Entdeckungen anzuerkennen. Wie sehr seine Beobachtungen am Aeussern haften, verrät die anfängliche Bemerkung, auch die Wissenschaft habe ihren Styl. Der Wissenschaft wird hiernach die persönliche Vorliebe ihrer Vertreter zugeschrieben. Dass letztere zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Weise sich vorwaltend geltend gemacht hat, ist es, was nach des Verfassers Meinung den Entwickelungsgang der Wissenschaft charakterisirt. Ob sich während dessen die Wissenschaft einem Ziele angenähert hat, scheint ihm gleichgültig. Das Ziel wird allerdings in dem Satze ausgesprochen: Bei jeder Verwandlung kinetischer Energie in potentielle oder potentieller in kinetische bleibt doch die gesamte Energie unverändert. Wenn er aber gleich nachher die analytische Gestaltung als das grösste Hinderniss auf dem Wege zu diesem Ziele verdammt, so kann man darin doch kaum etwas anderes als ein Urteil seines Geschmackes sehen. Die Schrift teilt sich nach den verschiedenen Gebieten, denen die Bemerkungen zugehören. Der 1. Teil, Quellen der Energie-Ideen, hat die Abschnitte: theoretische Mechanik, Physik, Philosophie, Technik; der 2. Teil, Begründung des Energie-Gesetzes: Aufstellung des Energie-Princips, experimentelle Belege der Aequivalenz, Erhaltung der Energie, Eigenenergie der Körper, Terminologie, Ergebniss; der 3. Teil: Energiegesetz als Integralgesetz, Einfluss des Entropiegesetzes, Energiegesetz als Grundgesetz, Formen der Energie. Verweisungen auf die Litteratur sind am Ende zusammengestellt. Hoppe.

Zwei Abhandlungen über den Rechenunterricht. Das Rechnen mit den Zahlen von 1 bis 100, eine didaktische Skizze. Ueber Rechenunterricht und Rechenbücher, eine Rück- und Umschau. Von Christian Harms, Professor. Oldenburg 1889. Gerhard Stalling. 72 S.

Die erste Abhandlung beginnt mit einem Streite, der über zwei Methoden des Rechenunterrichts für Kinder schon längere Zeit geführt wird, obwol man hätte erwarten dürfen, dass seine Entscheidung heutzutage keine Frage mehr sein würde. Als vor 45 Jahren der Schulrat Schulz in einem Artikel seiner Zeitschrift die Methode zuerst ausführlich erörterte und empfahl, nach welcher die Eigenschaften, Zusammensetzung und Zerlegung jeder Zahl einzeln von 1 an aufsteigend gelehrt, mithin die Operationen auch immer speciell,

als zu jeder Zahl einzeln gehörig, betrieben werden, wurden sehr bald die damit verknüpften Unzuträglichkeiten empfunden, und Einführung fand nicht statt. Indes verwarf man ihren Grundgedanken nicht, sondern verbesserte die Form der Ausführung dahin, dass statt der einzelnen Zahlen Gruppen auf einander folgender Zahlen in dieser Weise behandelt wurden. Ebenso verfährt auch der Verfasser und zwar erklärt er die Gruppen bis 5, bis 10, bis 20, bis 100 für die geeigneten, weil sie dem Abzählen an den Fingern entsprechen. Er wendet sich hier gegen einen Autor Grube, welcher bei der gesonderten Behandlung aller Zahlen bis 100 verharrt, und demgemäss 100 Stufen des Unterrichts annimmt. Dass jemand sich von einem solchen Zuwerkegehen Erfolg versprechen kann, scheint nur glaublich unter der irrigen, wiewol öfters angetroffenen, Voraussetzung, dass alles, was die Kinder in der Schule hören, ihr Eigentum bleibt. Es ist bekannt genug, dass eine unterschiedliche Menge des Gehörten oder Gesehenen nur durch Ordnung zur Gesamtauffassung gelangt. Das Herauskehren der Individualität so vieler Zahlen aber macht jedes Ordnungsprincip unmöglich. Diese Ueberbürdung des Gedächtnisses wird durch die Einteilung in 4 Stufen gänzlich vermieden. Die erste Stufe gibt Raum genug für Entwickelung der elementaren Begriffe. Je mehr der Umfang sich in höhern Stufen vergrössert, desto mehr überwiegt das Gemeinsame, d. i. die Operation, die Individualität, und hierzu muss es doch einmal kommen. Es wird nun das Verfahren eingehend erörtert. Hierzu ist eine Bemerkung zu machen. Der Verfasser findet es schwierig den Kindern begreiflich zu machen, dass aus $|||-|$ sich 2 ergeben könne, da sie doch 4 Striche zählen. Die Schwierigkeit zeigt nur an, dass die Erklärung vom unrechten Ende anfängt. Die Subtraction muss zuerst durch Inversion erklärt werden; diese Regel entspricht nicht bloss der wissenschaftlichen, sondern auch der kindlichen Logik. Ist $||+|=|||$ erklärt, so frage man $?+|=|||$. Die Frage beantworten am leichtesten die Finger. Soll durch Erhebung eines Fingers 3 entstehen, so muss dieser 1 Finger von den dreien vorher gesenkt werden. Das Senken der Finger aber bedeutet bei den Strichen die Tilgung eines Striches. Warum der Verfasser die Inversion nie anwendet, ist nicht ersichtlich; hatte er einen Einwand dagegen, so war dieser auszusprechen.

Die zweite Abhandlung, Abdruck eines früheren Programms, bespricht den Gegenstand im ganzen und gibt keinen Anlass etwas daraus hervorzuheben. Hoppe.

Ueber die Identität geometrischer Gebilde. Ein Beitrag zur Didaktik der Geometrie. Von Jos. Schram, Professor am Commu-

nal-Real- und Obergymnasium in Mariahilf. Abdruck aus der „Zeitschr. f. d. Realschulwesen" III. Jahrg. VI. Heft.

Ver Verfasser erklärt zuerst, dass er bei Herausgabe seines Lehrbuchs der ebenen Geometrie keine passende Stelle gefunden hat, seine vielfachen Abweichungen vom Gewöhnlichen zu rechtfertigen. Eine Besprechung des Lehrbuchs durch Herrn Dr. Obermann im III. Heft dieser Zeitschr. bietet ihm jetzt den Anlass dazu, indem sie einen Vorwurf enthält. Die betreffende Stelle ist wörtlich abgedruckt; sie sagt aus, dass die Definition der Congruenz (Identität) durch die ausreichenden Bestimmungsstücke bei Schram einen augenfälligen, bei frühern Autoren einen versteckten Cirkel gebe. Der Verfasser will den schuldigen Nachweis dieses Urteils nicht abwarten, sondern teilt sogleich seine Aufstellungen mit und sucht durch Musterung aller einzelnen Punkte das Nichtvorhandensein eines Cirkels darzulegen. Halten wir uns nun, da Obermann sich nicht näher ausspricht, einfach an die mitgeteilten Aufstellungen, so liegt es uns jedenfalls näher gegen die mannichfachen Unbestimmtheiten Kritik zu üben als ein Urteil über sie zu fällen. Der erste Satz ist: „Zwei Gebilde heissen identisch, wenn sie sich nur durch den Ort, an welchem sie sich befinden, von einander unterscheiden". Dies soll doch gewiss keine Definition sein; denn es sagt nur: identisch h e i s s t, was identisch i s t bis auf die Lage. Aber diese Bestimmung als definitive, fortgeltende ist überhaupt unzulässig; denn sie widerspricht dem natürlichen wie dem wissenschaftlich unentbehrlichen Sinne der Identität, demgemäss 2 identische Dinge nicht gleichzeitig existiren können. Wir können 2 geometrische Gebilde, congruent oder nicht, als Darstellungen zweier Zustände desselben variabeln Gebildes betrachten, willkürlich weil die Geometrie von der Materie, welche in der Natur die Identität bestimmt, abstrahirt. Schram's Einführung nimmt erstlich der Kinematik diese viel geübte Freiheit und verwechselt andrerseits die Betrachtung ad hoc mit der endgültigen Festsetzung. Er beruft sich auf andre Autoren; einen Diebstahl aus Not mag man entschuldigen, aber nicht nachahmen. Der zweite Satz ist: „Identische Gebilde sind vertauschbar, nämlich das eine kann so an die Stelle des andern treten, dass jeder Punkt des einen G. durch einen Punkt des andern ersetzt wird". Das Wort „nämlich" an sich ist zunächst mehrdeutig. Vertauschbar schlechthin sind je zwei Dinge; soll etwas damit gesagt sein, so muss eine Bedingung hinzukommen, der Satz mit „nämlich" kann nur diese Bedingung ausdrücken. Allein dieser hebt die Unbestimmtheit nicht auf; denn „ersetzen" ist ebenso relativ zu einer Forderung wie „vertauschen": ein Ersatz für eine Forderung ist kein Ersatz für eine andere. Folglich ist die Vertauschbarkeit als eine Eigenschaft

überhaupt nicht definirt. Es würde leicht sein die Vertauschbarkeit eines Dreiecks mit einem Viereck bei materieller Identität und sogar bei unveränderter Gesamtfigur entsprechend obigem Satze zu zeigen. Vielleicht im Gefühl der Unzulänglichkeit seiner Erklärung fügt der Verfasser hinzu: „Man sagt auch, sie decken einander". Wenn aber einmal zur Deutlichkeit der gewöhnliche Ausdruck nötig wird, warum geht er dann davon ab und führt erst Undeutliches statt des Deutlichen ein? Ein dritter Satz lautet: „Die (gegebenen) Bestimmungsstücke einer Figur heissen eindeutig, wenn die Construction nur eine Figur oder mehrere vertauschbare Figuren liefert, mehrdeutig etc." Der Sinn ist hier nicht miszuverstehen, aber das Attribut „ein- und mehrdeutig" wird dem verkehrten Subject beigelegt: statt der Abhängigkeit der mitbestimmten Strecken und Winkel, welche allein ein- oder mehrdeutig sein kann, werden die gegebenen Strecken und und Winkel so genannt, was offenbar der eclatanteste Unsinn ist, wenn auch der Kundige leicht versteht, was gemeint ist. Vergleichen wir die hier dargebotene Didaktik mit der gewöhnlichen, dem Euklid folgenden Behandlung des Congruenzbegriffs, so setzt sie an die Stelle einer verständlichen und sehr einfachen Lehre, die allerdings auf die geläufige Vorstellung unveränderlicher Körper (Zirkel und Massstab) fusst, aber von aller Unklarheit frei ist, eine durchweg mit logischen Mängeln behaftete Reihe von Sätzen, die dem Schüler teils überhaupt, teils in dem hier usurpirten Sinne fremd sind. Fragt man nun nach dem Zwecke der ganzen Umgestaltung, so können wir nur eine Ausführung, in welcher die praktische Wichtigkeit der Bestimmungsstücke hervorgehoben wird, als einzige leitende Angabe betrachten. Diese aber motivirt nicht im mindestens die Gründung des Begriffs auf die Bestimmungsstücke. In letzterer liegt in mehr als einer Beziehung eine didaktische Verkehrtheit. Zunächst ist sie eine verwerfliche Verweisung auf Späteres. Die hinreichenden Bestimmungssücke kann der Schüler erst successive während des Cursus kennen lernen, muss sich also bei der Definition mit dem Worte ohne Verständniss begnügen. Infolge davon geht den Schülern der leitende und orientirende Gesichtspunkt verloren, welchen die gleich anfängliche deutliche Vorstellung des Deckens der ganzen Figur bei Behandlung von dessen einzelnen Erfordernissen darbietet. Eine augenfällige Probe dieses Mangels ist der Umstand, dass durch alle Bestimmungsstücke der Unterschied zwischen congruenten und symmetrischen Figuren nicht erkannt werden kann. Der Verfasser wehrt dessen Beachtung ab, indem er den Unterschied sogleich mit dem umfassenden (ohne Erklärung gelassenen) Namen „Vertauschbarkeit" zudeckt. Abgesehen von dem pädagogischen Fehler, ist die Motivirung auch logisch verkehrt. Wenn der Techniker von der Ellipse nur 2 Dimensionen misst, weil sie zur Bestimmung aus-

reichen, so ist die Messung doch nur das Mittel und bedeutungslos, wenn nicht der Zweck die ganze Ellipse zu bestimmen vorher im Bewusstsein liegt. So läuft denn Schram's ganze Auseinandersetzung darauf hinaus, die gebrauchten Mittel zum wesentlichen Merkmal der Sache zu machen, deren Zweck im Dunkeln bleibt.

Hoppe.

Zur Lehre vom Unendlichen. Antrittsrede zur Uebernahme der ausserordentlichen Professur der Mathematik an der Universität Tübingen gehalten am 28. Juni 1888 von Dr. W. Franz Meyer an der Bergakademie Clausthal. Tübingen 1883. H. Laupp. 24 S.

Da die Lehre vom Unendlichen so ganz und gar keine Schwierigkeit darbietet, dass selbst Anfänger der Arithmetik, wenn sie nur überhaupt auf den Gedanken einer Veränderung eingehen, sie ohne Mühe und ohne subtile Anforderungen begreifen können, so sind gewisse Schriftsteller, die den Reiz des Wunderbaren und Unbegreiflichen zur Erregung der Aufmerksamkeit nicht entbehren zu können meinen, gezwungen, wenn sie davon reden, diese Lehre so zu verdrehen und zu entstellen, dass niemand mehr das Gewirre zu durchschauen vermag, und sie nun zeigen können, dass allerhand Lösungsversuche der selbstgemachten Schwierigkeiten zu keinem Ende führen. Als ein Erzeugniss dieser Art stellt sich auch das Vorliegende dar. Einleitend sagt die Schrift, die sogenannte reine Mathematik und Analysis könne erst dann rein genannt werden, wenn sie, soweit es die Eigenart unserer Geistesanlagen zulasse, als ein Bestandteil der reinen Logik auftrete. Hiergegen ist zunächst zu erinnern, dass factisch von reiner Mathematik nur im Gegensatz zur angewandten gesprochen wird, und dass weder der Name noch das Motiv einer Unterscheidung mit der Quelle mathematischer Erkenntniss zu tun hat. Für den Verfasser ist die Basirung auf die reine Logik das Ideal der Strenge; er möge sich doch fragen, wie er diese Lagik, dieses angeborene Gesetz des Geistes, von der vorgefassten bornirten Meinung unterscheiden will. Doch wollen wir hierbei nicht verweilen und uns zum eigentlichen Thema der Schrift wenden. Als Beleg dafür, dass die Arithmetik und Analysis nicht aus reiner Logik hervorgehen, führt der Verfasser die Begriffe der Grösse, der Anzahl, des Irrationalen, des Stetigen und (diesen vorausgehend) des Unendlichen an; das Unendliche ist von da an sein einziger Gegenstand. Sehen wir nun zu, was er von diesem aussagt. Zuerst bemerkt er, dass fast alle unsere Autoren in der Definition und Einführung des Begriffs des Unendlichen von jeher von einander abgewichen seien. Freilich wenn man alle Faseleien, die in der Neuzeit über diesen

Begriff zutage getreten sind, als verschiedene wissenschaftliche Ansichten gelten lässt, so mag es denen, die nie selbst analytische Untersuchungen gemacht haben, vorkommen, als gäbe es eine Menge verschiedene Begriffe und Auffassungen. Dennoch ist das Unendliche in allen wissenschaftlich analytischen Abhandlungen nur in einer Bedeutung in Gebrauch, und seine Definition längst bekannt: unendlich gross heisst eine Variable, die beliebig gross werden kann, unendlich klein eine Variable, deren absoluter Wert beliebig klein werden kann. Der Verfasser erklärt es für unbedingt geboten, dass man, um mit dem Unendlichen so familiär umzugehen, wie es geschieht, sich zuvor einer festen und untrüglichen Definition desselben versichere, behauptet aber, das Gegenteil finde statt. Hier ist diese Definition; auf Grund ihrer ist die Untrüglichkeit der Schlussweise der Infinitesimalrechnung streng bewiesen — s. d. Arch. Bd. LV. S. 50 — und in den seitdem vergangenen 16 Jahren kein Einwand gegen die Richtigkeit oder Anwendbarkeit erhoben worden. Schien dem Verfasser vielleicht diese Lehre zu einfach und elementar, um sie neben den hochgeschraubten Erklärungsversuchen, die er oft vernommen, und die wol für rhetorische Auslassungen ein reicheres Feld eröffneten, auch nur der Erwähnung für wert zu halten? Weiter sagt der Verfasser, um eine der mannichfaltigen Auffassungen des Unendlichen zu nennen, man spräche in erster Linie vom Unendlich-klein- und vom Unendlich-gross-werdenden, u. s. w. Von solchen spricht sicher keine analytische Abhandlung; manche Grübler mögen in diese Unklarheit verfallen sein. Ferner sagt er, man bediene sich jetzt des Unendlichen nur als eines Sprachgebrauches für ein Veränderliches, entweder ab- oder zunehmendes, selbst aber durchaus endlich und bestimmbar bleibendes. Dieses Convolut von lauter Unsinn nennt er eine „hochbedeutende Erkenntniss“. Er hat somit erkannt, dass die Entdeckung Newton's und Leibniz's nebst der ganzen daraus erwachsenen Wissenschaft sich auf einen Sprachgebrauch reducirt! Von den genannten Merkmalen gehört das erste, das Ab- oder Zunehmen, nicht zum Begriffe, dafür fehlt das notwendige Merkmal, dass der Veränderung keine obere, resp. untere Grenze gesetzt ist; dass das Unendliche endlich sei, ist ein Widerspruch; bestimmbar kann es wol sein, nämlich als Function eines andern Unendlichen, doch dies hat sicher der Verfasser nicht gemeint. Schliesslich behauptet er, man verzichte im allgemeinen von vornherein auf durchaus exacte oder reine Resultate, man gestehe freimütig ein, dass jeder Schritt vorwärts im Gebiete der veränderlichen Grössen mit Fehlern behaftet sein müsse, u. s. w. Im Anfang staunt man über die Dreistigkeit, mit welcher plötzlich solche ganz unwahre Aussagen hingeworfen werden; bald aber kommen die Schwächen seiner Stützpunkte zutage. Dass mit höherer analytischer Rechnung

viele Probleme in Angriff genommen werden, die nur approximativ zu lösen sind, ist die Tatsache, auf welche das Folgende hinzudeuten scheint. Er verwechselt aber die Ursachen und statt in der Schwierigkeit der Probleme sieht er den Grund der anfänglichen Ungenauigkeit im Mangel des Begriffs des Unendlichen, ignorirt auch gänzlich alle Lösungen in geschlossener Form. So ist denn der gesamte Vortrag für eine unwissende Zuhörerschaft berechnet, der er durch Vorspiegelung falscher Tatsachen die Meinung einzuflössen sucht, die Infinitesimalrechnung sei keine exacte Wissenschaft. Hier beginnt nun der zweite Teil der Schrift, welcher zeigen soll, welche Aussicht wir haben auf Grund eines definirten absoluten (constanten) Unendlich eine exacte Infinitesimalwissenschaft herzustellen. Diese Hoffnung schöpft der Verfasser aus der Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen"? von R. Dedekind — und reproducirt dieselbe ausführlich. In ihr ist u. a. ein Versuch enthalten das absolute Unendliche definiren. Dieser ist jedoch gänzlich misglückt, wie in ausführlicher Besprechung der Schrift, im 27. litt. Bericht, S. 29—33, bewiesen worden ist. Hoppe.

Der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer und zum Selbstunterricht. Von Dr. Wilhelm Krumme, Direktor der Ober-Realschule zu Braunschweig. Mit 53 Figuren im Text. Braunschweig 1889. Otto Salle. 311 S.

Das Vorliegende, weit entfernt dem Titel zu entsprechen, hat vielmehr zum Gegenstande die rechnende Geometrie der Ebene und umfasst insbesondere die Theorie der rechtwinkligen Coordinaten in Anwendung auf die Kegelschnitte in rein synthetischer Entwickelung. Motivirt wird die Benennung in sehr eigentümlicher Weise: die vorgetragene Lehre sei weder euklidische noch neuere Geometrie, heisse daher analytische Geometrie. Der Verfasser sollte doch wissen, dass man über ein Wort von so grosser und in so weitem Umfange bereits geltender Bedeutung nicht nach Gutdünken verfügen kann. Er ignorirt nicht nur den eigentlichen Wortsinn, sondern auch einen ganzen Wissenschaftszweig, welchem der Name „analytische Geometrie" mit vollem Rechte angehört. Analytisch heisst die Erkenntniss, die von ihrem Ziele in allgemeinst möglicher Auffassung ausgeht und mit diesem im Auge ihre Erfordernisse zu beschaffen sucht. Käme diese analytische Erkenntniss auch erst in der höhern Mathematik zur Verwirklichung, so wäre es doch durchaus verwerflich auf der Schule eine Terminologie einzuführen, die gegen die wissenschaftliche Ausdrucksweise streitet. Aber selbst bei der Behandlung ganz elementarer Constructionsaufgaben lernen die Anfänger das

Wort „Analysis" im echten Sinne kennen, und zwar handelt es sich hier gewöhnlich um gar keine Rechnung, sondern um direct geometrische Beziehungen. Letzteres zeigt zum Ueberfluss, dass, während das synthetische Verfahren die Anwendung von Rechnung und Rechnungselementen, Coordinaten, nicht ausschliesst, auch das analytische ohne Rechnung möglich ist. An einer treffenden Bezeichnung fehlt es nicht: „rechnende Geometrie" und „Coordinatenlehre" sagt ohne Erklärung deutlich, was es sagen soll; ein Grund, dafür das erklärungsbedürftige und gar nicht zutreffende Wort „analytische Geometrie" zu gebrauchen ist also nicht ersichtlich, wenn man nicht geflissentlich die Schüler irre leiten will.

Scheint vielleicht ein blosser unpassender Name nicht soviel wert zu sein, dass wir seinetwegen ausführlich längst bekannte Dinge wiederholen, wie es im Vorstehenden geschehen ist, so rechtfertigt uns wol die Schwerhörigkeit, von der das neue Auftreten eines so oft gerügten Fehlers, ohne zur Entkräftung der Rüge etwas beizubringen, Zeugniss gibt.

Das Buch beginnt mit einem „allgemeinen Teil", welcher das Verfahren des Unterrichts bespricht, der also nur für Kundige bestimmt ist; dann erst folgt im „besondern Teil" die für die Lernenden bestimmte Lehre. Letzterer wird in 3 Stufen geteilt, deren erste für den Unterricht in Prima berechnet ist. Durch diesen soll der Schüler in 2 Jahren soweit gefördert werden, dass er den übrigen Inhalt des Buches ohne Hülfe des Lehrers für sich lernen kann. Die erste Stufe behandelt die Coordinatentheorie und einen gewissen Kreis ihrer Anwendung und teilt sich in 6 Abschnitte nach den Gegenständen: Punkt, Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel. Die zweite Stufe erweitert den Lehrstoff der ersten und hat dieselben Gegenstände. Der dritte behandelt die allgemeine Gleichung 2. Grades. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungen. Durch diese lernt der Schüler, was der wichtigste Punkt ist, ein algebraisches Resultat geometrisch deuten. Ob er daraus die Nützlichkeit des Umwegs der Uebersetzung des Geometrischen in's Algebraische und wieder zurück ersieht, ist wol zweifelhaft. Der Lehrgegenstand selbst ist ohne Zweifel für sehr Viele nützlich, die nicht Mathematik studiren, und denen doch mathematische Kenntnisse zu statten kommen. Wer dagegen die Mathematik zum Studium wählt, dem ist die hier gegebene Unterweisung eine schlechte Vorbereitung dazu und eher hinderlich als irgend förderlich. Er tut besser, das Betreiben der Coordinatenlehre auf die Universität zu versparen und unmittelbar vom allgemeinern Standpunkte aus anzufangen. Hoppe.

---

## Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. Simon Newcomb, Editor. Thomas Craig, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. *Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων.* Volume XI. Baltimore 1889. Publication Agency of the Johns Hopkins University.

Der Inhalt des 11. Bandes ist folgender.

P. A. Mac Mahon: Abhandlung über eine neue Theorie der symmetrischen Functionen.

W. Woolsey: Ueber die in Reihen dargestellten Integrale binomischer Differentialgleichungen.

M. d'Ocagne: Ueber gewisse Curven, welche man mit den ebenen Curven zum Studium ihrer Infinitesimaleigenschaften verbinden kann.

Cayley: Ueber die Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien. — Ueber die Theorie der Gruppen.

J. Perott: Bemerkung zum Satze von Euklid über die unendliche Anzahl von Primzahlen.

A. E. H. Love: Wirbelbewegung in gewissen Dreiecken.

A. B. Basset: Ueber die permanente Bewegung eines rotirenden flüssigen Ringes.

S. Lie: Die Begriffe Gruppe und Invariante.

E. Picard: Ueber die binären quadratischen Formen mit conjugirten Unbestimmten und die Fuchs'schen Functionen.

F. Morley: Ueber die Geometrie einer circularen kubischen Curve mit Knoten.

H. B. Fine: Ueber die durch Differentialgleichungen definirten Functionen nebst einer Erweiterung der Puiseux'schen Polygon-Construction dieser Gleichungen.

E. Goursat: Ueber die singulären Lösungen der simultanen Differentialgleichungen.

H. A. Rowland: Elektromagnetische Wellen und Oscillationen an der Oberfläche der Conductoren.

J. C. Fields: Der Ausdruck eines beliebigen Differentialcoefficienten einer Function einer Function beliebig vieler Variabeln mittelst der entsprechenden Differentialquotienten von $n$ Potenzen der Function, wo $n$ die Ordnung des Differentialquotienten ist.

O. Bolza: Ueber die Construction intransitiver Gruppen.

K. Heun: Die Herstellung einer linearen Differentialgleichung aus einem gegebenen Element der Integralfunction.

L. Koenigsberger: Ueber die Reduction von Integralen transcendenter Functionen.

F. Franklin: Note über die doppelte Periodicität der elliptischen Functionen. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 12. Stockholm 1889. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der Inhalt des 12. Bandes ist folgender.

P. Appell: Ueber die Bewegung eines Fadens in einer festen Ebene.

M. Lerch: Ueber eine Methode der Entwickelung einiger elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen.

C. Guichard: Ueber die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

J. de Vries: Ueber gewisse ebene Configurationen.

F. Brioschi: Ueber die Gleichung 6. Grades.

K. Heun: Bemerkungen zur Theorie der mehrfach linear verknüpften Functionen.

J. Hacks: Schering's Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste dargestellt mit Hilfe des Zeichens $[x]$.

J. Horn: Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen.

S. Kowalevski: Ueber das Problem der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

V. Volterra: Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Functionen einer imaginären Variabeln. I.

P. Tschebyscheff: Ueber die Integral-Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben.

E. Picard: Ueber eine Classe linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung.

H. Dobriner: Ueber das räumliche Achteck, welches die Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung bilden.

H. G. Zeuthen: Note über die 8 Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung.

A. Hurwitz: Ueber eine besondere Art der Kettenbruch-Entwickelung reeller Grössen. H.

# Litterarischer Bericht
## XXXII.

---

### L e h r b ü c h e r.

Vorschule der Mathematik für österr. Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Jos. Schram, Professor am Communal-Real- und Obergymnasium in Mariahilf, und Rud. Schüssler, Doctor der Philosophie. Mit 384 Figuren. (In besonderem Heft.) Wien 1889. Alfred Hölder. 319 S.

Zwei Schriften vom erstern Verfasser sind hier bereits besprochen worden, die eine: „Lehrbuch der ebenen Geometrie“ — erschienen 1878, im 247. litt. Bericht S. 25, die andere: „Ueber die Identität geometrischer Gebilde“ — ohne Zeitangabe, soeben im vorigen litt. Ber. S. 32. Letztere sucht die in einem mit ersterer gleich betiteltem Werke befolgte Didaktik gegen Angriffe zu verteidigen und führt daraus die Sätze an, auf welche die Angriffe Bezug haben. Von diesen Sätzen ist der eine, welcher die Congruenz durch Vertauschbarkeit definirt, wörtlich unverändert auch in die „Vorschule“ übergegangen, während zwei andre, deren einer statt der Congruenz den Namen Identität einführt, der zweite dieselbe mittelst des falsch gebrauchten Ausdrucks „eindeutig“ auf die Bestimmungsstücke zurückführt, im gegenwärtigen Werke nicht vorkommen, und, wenn Ref. nicht irrt, auch in der besprochenen Ausgabe nicht gestanden haben. Auf die Bezeichnung des gegenwärtigen als „Vorschule“ scheinen die Verfasser selbst kein Gewicht zu legen, da es im Vorwort stets „Lehrbuch“ genannt wird. In der Tat charakterisirt es sich gegenüber andern Lehrbüchern gerade in entgegengesetzter Richtung: es hat eher den Charakter einer Encyklopädie, die

in sachlich geordneter Reihe von Artikeln über alle Lehrthemata concinne vollständige Auskunft erteilt. Diese Darstellungsweise verliert natürlich im weitern Fortschritt mehr und mehr ihr Unterscheidendes und fällt schliesslich mit der rational didaktischen Entwickelung des Lehrstoffs zusammen. Schon die Ausdehnung des Lehrbuchs auf Stereometrie und Kegelschnitte lässt dasselbe nicht als Vorschule erscheinen. Hauptsächlich aber ist es die Abfassungsweise, die einer Einführung vsn Anfängern in das mathematische Gebiet am wenigstens entspricht. Während überall sonst auf exacten Ausdruck grosse Sorgsamkeit verwandt ist, treten gerade in den Anfängen, wo es sich um Erklärung der elementarsten Begriffe handelt, mancherlei Schwächen und Misgriffe auf. Der in der Geometrie begangene und an bezeichneter Stelle gerügte Fehler, der in der Erklärung der Congruenz durch Vertauschbarkeit liegt, entstellt auch den Anfang der Arithmetik, wo gesagt wird: „Zwei gleichartige Grössen heissen einander gleich, wenn die eine für die andere gesetzt werden kann, ungleich, wenn dies nicht möglich ist.“ Die einfachste Widerlegung gibt wol jede Ungleichung $a > b$, indem man für $a$ jede grössere, für $b$ jede kleinere Grösse setzen kann. Sie deutet darauf hin, dass der Fehler ein Erklärungscirkel sei, da die Erklärung der Gleichheit die Gleichheit stillschweigend voraussetze. Allein auch in $ax = 0$, wie in vielen Gleichungen, kann man für $a$ Ungleiches setzen. Der Fehler ist vielmehr die unzulässige Umkehrung des richtigen Satzes: Gleiches kann man für einander setzen. Ferner ist der Satz unrichtig: „Jedes Ding für sich allein betrachtet heisst Einheit.“ Im Gegenteil heisst es nur dann so, wenn man es in Verbindung mit andern Dingen betrachtet, und, was wesentlich ist, wenn man von deren Verschiedenheit absieht. Ferner zeigt der Satz: „Rechnen hat die Aufgabe, aus gegebenen Zahlen nach bestimmten Vorschriften eine neue Zahl zu bilden“ — Mangel an Beobachtung. Nirgends, auch nicht in diesem Buche, wird das Wort Rechnen in dem genannten Sinne gebraucht. Nicht derjenige, welcher aus den Zahlen 3 und 8 die neue Zahl $3 \times 8$ bildet, sondern derjenige, welcher die so gebildete Zahl in der dekadischen Form 24 darstellt, rechnet. Während der Verfasser bei andern Gegenständen selbständig mit Besserung vorgegangen ist und manchmal in der Abweichung vom Gewöhnlichen geirrt hat, ist es hier gerade ein recht häufig vorkommender Fehler, den er ohne Ueberlegung aufnimmt. Was zu dem Fehler verleitet, ist der Umstand, dass bei Erklärung der einzelnen Operation der Unterschied von Stellung und Lösung der Rechenaufgabe ohne Bedeutung ist. Hier ist daher auch der Fehler von keiner Bedeutung; bei den mannichfaltigen Transformationen der Algebra hingegen bringt er Unklarheit mit sich; die falsche Definition hat zwar der Schüler hier längst vergessen, aber



das Richtige weiss er darum doch nicht. In Betreff der Geometrie ist die verfehlte Definition der Congruenz bereits ausführlich besprochen. Die behandelten Lehrthemata sind der Reihe nach folgende. Unter „besondere Arithmetik": die Zahl und ihre Darstellung, die 4 Grundoperationen in ganzen Zahlen, Teilbarkeit der Zahlen, gemeine Brüche, Decimalbrüche, mehrfach benannte Zahlen, Proportionen. Unter „allgemeine Arithmetik": arithmetische Zeichensprache, Operationen erster, zweiter Stufe, allgemeine Brüche, Quadrat und Quadratwurzel, Kubus und Kubikwurzel, Proportionen, Gleichungen 1. Grades. Unter „Planimetrie": Grundgebilde, Dreieck, Kreis, Viereck, Polygon, Längenmessung, Flächengleichheit und Flächenmessung, Aehnlichkeit. Unter „Stereometrie": Punkt, Gerade, Ebene im Raume, Prisma und Cylinder, Pyramide und Kegel, Kugel, Polyeder, Kegelschnittslinien. Auf die besondere und auf die allgemeine Arithmetik folgen Aufgaben des Verkehrs, auf die Planimetrie Constructionsaufgaben, die Lösungen sind am Schlusse des Buchs zusammengestellt. Ausserdem sind an einzelne Lehren Fragen und Aufgaben angeknüpft. Hoppe.

Lehrbuch der gesammten niederen Mathematik umfassend Arithmetik, Buchstabenrechnung, Algebra einschliesslich der Logarithmen, Geometrie, ebene Trigonometrie und Stereometrie. Mit zahlreichen Beispielen und Uebungsaufgaben nebst vollständiger Lösung und Ausrechnung bearbeitet für den Selbstunterricht sowie auch für den Schulgebrauch von C. Otto, Gewerbeschullehrer a. D. und H. Diesener, Architekt. Mit 420 Holzschnitten. Abteilung I. und II. Arithmetik, Buchstabenrechnung und Algebra. Abteilung III. IV. u. V. Geometrie, ebene Trigonometrie und Stereometrie. Halle a. d. S. 1889. Ludw. Hofstetter. 64 + 50 + 173 + 132 + 97 + 75 S.

Das Buch lehrt, wie man ohne alles Denken und Verstehen eine gewisse praktische Fertigkeit im Rechnen und Construiren gewinnen soll. Es besteht nur aus Regeln (mit vorgängiger Angabe des Wortgebrauchs) und Uebungsbeispielen. Von Begründung und Begriffserklärung ist nirgends die Rede, ja die Regeln und Worterklärungen sind nicht einmal dafür abgefasst, dass der Schüler daraus das Verfahren entnehmen kann. S. 6. z. B. steht: „Multipliciren heisst, eine Zahl, den Multiplicator, so oft zu sich selbst addiren, als eine andere Zahl, der Multiplicator Einheiten hat." Wollte ein Schüler hiernach 5 mit 3 multipliciren, so würde er 5 zu 5 addiren, dann wieder 5 zu 5, dann wieder 5 zu 5, und dreimal dasselbe Resultat 10 finden, was denn mit mehrfacher Bestätigung ergäbe, dass 3 mal

5 = 10 ist. Wahrscheinlich sind also die Regeln und Worterklärungen nur dazu da, im Examen hergesagt zu werden, und das Rechnen erlernt der Schüler, indem er es dem Lehrer nachmacht.

Hoppe.

Kleyers Encyklopädie der gesamten, mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften. Stuttgart. Julius Maier.

Das Verzeichniss der bis jetzt erschienenen Teile dieser Encyklopädie nennt 23 Lehrbücher, eine Logarithmentafel und eine Geschichte der Geometrie, worunter die Mehrzahl von Kleyer bearbeitet ist. Dem Ref. liegen die Anfänge zweier dieser Lehrbücher vor, nämlich der folgenden.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Bearbeitet nach eigenem System von Adolph Kleyer. Erster Teil: Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Bearbeitet nach eigenem System von Adolph Kleyer. Erster Teil: Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variabeln. Zweite Auflage.

Die Einleitung des erstern ist ein Gemisch von richtigen und unrichtigen Gedanken über den Raumbegriff. Die unrichtigen sind es, welche dem beginnenden Vortrag zugrunde liegen und, wenigstens innerhalb der 2 ersten Hefte, ziemlich den einzigen Stoff dazu bieten. Jenen Gedanken zufolge ist die Linie eine Aneinanderlagerung von Punkten, die der Verfasser auch Atome und Infinitesimale nennt. Der Punkt ist ein Teil der Linie, aber so klein, dass er nicht mehr geteilt werden kann. Ein Linienelement besteht aus 2 Atomen. Die Linie hat eine endliche Anzahl unendlich kleiner Teile. U. s. w. Dies sind nicht bloss einmalige Aussagen, sondern der gesamte Lehrvortrag enthält nichts weiter als die Umsetzung der gemeinen Vorstellung in solche confuse Redeweise. Als äusserliche Eigentümlichkeit ist zu erwähnen, dass jede Seite in 2 Spalten geteilt ist. Links steht unter „Frage“ die in eine Frage gekleidete Ankündigung des Themas, über das der Verfasser, rechts unter „Antwort“ sprechen will.

Im Vorwort zum Lehrbuch der Differentialrechnung sagt der Verfasser, es sei ihm ergangen, wie es jetzt noch 100 Andern ergehe, deren mathematisches Denken durch keine der Methoden, welche zur Herleitung der Differentialformeln dienen, Befriedigung

finden. Er nennt 5 Methoden, aber, wie vom bösen Geist auf unfruchtbarem Felde herumgeführt, nur solche, die erdacht worden sind, damit man die Principien der Differentialrechnung nicht verstehe, und geht mit Stillschweigen an den Methoden vorbei, durch welche sie leicht verständlich werden. Er beansprucht nun nicht, schon jetzt über die Frage zur Klarheit gelangt zu sein und die rechte Methode gefunden zu haben, vielmehr könne er zur Herausgabe seiner Bearbeitung gedrängt, sich nur auf einige Ergebnisse seines Nachdenkens, die er für unumstösslich halte, stützen. In diesen sucht er eine Auffassung der Grösse, wie sie der Natur der Körperwelt entspreche, zu geben und betrachtet daher die Grösse als aus unteilbaren Teilen bestehend, wie oben von der Linie gesagt ward; diese sind dann seine Differentiale. Hoppe.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1. Heft. Kongruenz. Dritte, teilweise umgearbeitete Auflage. Halle a. S. 1889. Louis Nebert. 66 S.

Das 1. Heft ist im 2. litt. Ber. S. 14, das 2. Heft im 25. litt. Ber. S. 8, das 3. Heft im 251. l. Ber. S. 29 besprochen. Die 3. Auflage unterscheidet sich, abgesehen von kleinen Verbesserungen, durch folgendes von den 2 vorausgehenden. Die „Systematik der Geometrie“ ist aus der Einleitung entfernt und in den Anhang gesetzt. Der Abschnitt über die Linien ist übersichtlicher gegliedert. Der erste Lehrsatz aus der Parallelentheorie ist durch den entsprechenden Grundsatz ersetzt worden, dieser lautet: Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen. Hiermit ist eine Berichtigung eingeleitet, aber noch nicht vollzogen. Statt nun mit Anwendung des Grundsatzes die Gleichheit der gleichliegenden Winkeln an Parallelen zu beweisen, hat der Verfasser erstern müssig liegen lassen und letztere auf einen sehr bekannten Trugschluss gestützt. Hoppe.

Lehrbuch der Ebenen Geometrie. Nach neuen Grundsätzen bearbeitet. Von Karl Koch, Professor am Lyceum in Cannstatt. Erster Teil. Mit 80 Figuren. Ravensburg 1889. Dorn. 103 S.

Der Titel sagt, dass das Lehrbuch nach neuen Grundsätzen bearbeitet ist. Eigentlich ist es indes derselbe Reformgedanke, den schon viele Bearbeiter von Lehrbüchern verfolgt haben, und in dessen Verwirklichung das gegenwärtige Lehrbuch nur weiter geht als viel-

leicht alle Vorgänger: dem Schüler soll keine Verstandestätigkeit an Gegenständen zugemutet werden, die ihm zur Zeit noch fremd sind. Allein im Zuwerkegehen zeigt sich doch eine bedeutende Verschiedenheit, welcher pädagogische Ansicht zugrunde liegen muss, so dass hier wirklich die Grundsätze füglich neu genannt werden können, wenn sie auch nur in Meidung früherer Mängel und Misgriffe bestehen. Der grösste und doch so gewöhnliche Misgriff ist es, dass diejenigen, welche die Pflege der Anschauung forderten, auch, als ob es notwendig damit verbunden wäre, oder um die euklidische Methode zu überflügeln, das Gesichtsfeld des Schülers recht bald zu erweitern und ihn so an allen Schwierigkeiten recht unmerklich vorbeizuführen strebten. Dadurch geht der Hauptbildungszweck der mathematischen Disciplin, welcher das Verweilen auf engem Felde der Betrachtung als unerlässlich fordert, verloren, nicht das Verstehen, sondern das Nichtverstehen bei der Meinung zu verstehen wird den Schülern leicht gemacht. Koch pflegt in nicht minderm Grade die Anschauung. aber er verweilt stets auf engstem Felde. Hierzu kommt, dass die Beobachtungen an der Figur keine bloss äussere sind, dass vielmehr jede Beziehung, auch wenn sie selbstverständlich ist, durch besondern Satz zum Bewusstsein gebracht wird. Hervorzuheben ist endlich die logische Genauigkeit in Deduction, Urteil und Ausdruck, die so häufig von den Verbesserern der Methode als Nebensache behandelt, hier aber trotz aller Kürze und Einfachheit überall festgehalten wird. Bedenken könnte vielleicht die sehr abweichende Anordnung des Lehrstoffs erregen, indem dadurch die Systematik verhüllt wird, umsomehr weil die Sätze, welche einen wirklichen Fortschritt enthalten, mit vielen solchen, wo dies nicht der Fall ist, gemischt auftreten. Nach einer Aeusserung im Anfang des Vorworts scheint der Verfasser zu verlangen, dass der Schüler zuvor wisse, wie man z. B. einen Winkel abträgt, halbirt u. s. w,, ehe von abgetragenen, halbirten Winkeln die Rede sein dürfe. Eine solche Forderung würde geradezu die Regel alles vernünftigen Handelns: Erst denken, dann tun — auf den Kopf stellen, und kann wol kaum seine Meinung sein. Die Dreiteilung eines Winkels wissen wir nicht auszuführen und können sie doch als geschehen denken. Hoppe.

Lehrbuch der Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Lehr anstalten und zum Selbst-Unterricht. Von Dr. Rottok, vormals Professor und Rektor am Gymnasium und Realgymnasium zu Rendsburg. Dritte, mit Aufgaben vermehrte und verbesserte Auflage (Mit 57 Figuren im Text.) Leipzig 1888. Hermann Schultze 96 S.



Lehrbuch der Stereometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dr. Rottok, vormals Professor und Rektor am Gymnasium und Realgymnasium zu Rendsburg. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. (Mit 28 Figuren im Text.) Leipzig 1888. Hermann Schultze. 65 S.

Das erstere Lehrbuch beginnt mit einem ganz unklaren Satze: es nennt die Geometrie eine Wissenschaft der räumlichen Grössen, nur auf Ausdehnung Rücksicht nehmend, von andern, wie physischen u. s. w. Eigenschaften absehend. Wenn andere Lehrbücher — in der Tat sind es nicht wenige — im Eingangssatze die Raumgrössen ausschliesslich als Gegenstand der Geometrie hinstellen, so ist dies ein einmaliger ungenauer Ausdruck, sie sorgen wenigstens, wenn auch öfters ungenügend, im weitern Verlaufe dafür, die Begriffe durch ihre Anwendung richtig zu stellen. Hier hingegen ist der ungenaue Eingangssatz die Quelle immer neuer Unklarheiten: die unklare Begriffsmischung von Grössen und Qualitäten wie Richtung, Lage, Gestalt wird fortgesponnen und der dadurch erzeugte Mangel an Orientirung zur Erschleichung eines Scheinbeweises für den Parallelensatz benutzt. Ebenso wird durch eine unverständliche Auseinandersetzung die Nichtberücksichtigung des Falles der Incommensurabilität zu rechtfertigen versucht; statt Evidenz zu geben, erschwert der Verfasser nur die Erhebung eines Einwandes.

In der Stereometrie wird gleich von Anfang die Bewegung der Gebilde in Betracht gezogen, es geschieht dies mit besonderer Bevorzugung, ohne dass die Sache es erforderte und öfters in ausgedehnterem Masse als dazu Anlass war. Es scheint daher die Tendenz vorzuwalten, das Gesichtsfeld des Schülers gleich anfangs zu erweitern, was aber nur dahin wirken kann, eine recht oberflächliche Auffassung zu erzeugen. Hoppe.

Grundzüge der Naturlehre für die unteren Classen der Gymnasien, Realschulen und verwandten Anstalten. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor am Ober-Gymnasium im IX. Bezirke Wiens, ehem. Privatdocent für mathematische Physik an der k. k. technischen Hochschule in Brünn. Ausgabe für Gymnasien. Mit 234 in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, veränderte Auflage. Wien 1887. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 207 S.

Das Vorliegende ist ein vortreffliches Lehrbuch der Physik für Anfänger, einerseits leichtfasslich in hohem Grade, andererseits in echt wissenschaftlichem Geiste bearbeitet, so dass es dem Zwecke der Einführung in das künftige Studium so gut genügt wie es der

populären Aufklärung und der Verbreitung nützlicher Kenntnisse zu dienen sich eignet. Der Lehrstoff ist nicht auf vorgezeichnete Grenzen beschränkt worden, doch umfasst er mehr als gewöhnlich zur Kenntniss der Schüler gelangt, und zwar nach sehr treffendem Urteile das Wesentliche für richtige Auffassung der Naturerscheinungen. Der Vortrag bindet sich nicht an eine gleichmässige Form, sondern wählt diese den Gegenständen in vielseitigster Behandlung entsprechend. Er ist nicht ausschliesslich beschreibend, sondern auch erklärend, gibt nicht bloss die Qualität der Erscheinung, sondern wo es hingehört auch das Mass und dessen Gesetze. Wo auch von letztern das weniger Einfache ausgeschlossen werden musste, da ward um so gründlicher das Einfache behandelt. In denjenigen Punkten, in welchen sonst häufig Irrlehren aufgetreten sind, findet sich hier stets der Grund sogleich so gelegt, dass die irrige Auffassung keine Stelle hat. Wie in einzelnen Fragen der Verfasser sich entschieden hat, ist im Vorwort ausgesprochen; um es zu würdigen würde ein Eingehen auf die Behandlungsweise im einzelnen nötig sein. H.

Lehrbuch der Physik für die oberen Classen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten. Von Dr. Ignaz G. Wallentin, Professor am k. k. Staatsgymnasium im neunten Bezirke von Wien, Ehrenmitglied der physikalisch-chemischen Gesellschaft zu Frankfurt am Main. Fünfte, veränderte Auflage. Mit 232 in den Text gedruckten Holzschnitten und einer Spectraltafel in Farbendruck. Ausgabe für Gymnasien. Wien 1888. A. Pichler's Witwe und Sohn. 318 S.

Dieselben vorzüglichen Eigenschaften, welche die „Grundzüge der Naturlehre“ besitzen, und die im vorigen Berichte dargelegt sind, charakterisiren auch das Lehrbuch der Physik. Es werden darin, nach einer Einleitung über die Methode der Physik und die allgemeinen Eigenschaften der Körper, nach einander behandelt: Mechanik, Wärme, Magnetismus, Elektricität, Wellen, Schall, Licht, Wärmestrahlung, und im Anhang: Astronomie nebst mathematischer Geographie und Chemie. Bei allen Lehrgegenständen sind die allgemeinen Gesetze obenan gestellt, an sie schliessen sich dann die speciellen Erscheinungen, die Beobachtung und deren Mittel. H.

Joh. Chr. Walberer's Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten neu bearbeitet von Dr. Georg Recknagel, Professor am Realgymnasium zu Passau, correspon-

direndem Mitgliede der R. B. Akademie der Wissenschaften. Sechste Auflage. München 1889. Theodor Ackermann. 178 S.

Das Lehrbuch von Walberer ist in 2. und 4. Auflage im 228. und 268. litt. Ber. S. 34. S. 43. besprochen. Das Vorliegende stellt sich als Umarbeitung der analytischen Mechanik für den Schulgebrauch dar, d. h. der Lehrgang ward im ganzen beibehalten, was hingegen im einzelnen nach Ermessen des Herausgebers zu hoch für den Standpunkt der Schüler war, ward in mehr erläuternder Form vorgetragen, mitunter auch weggelassen. Diese Umsetzungen sind nun durchaus kein Muster von Fleiss und didaktischem Urteil. Die mathematische Schärfe wird preisgegeben, mancherlei Unbestimmtheiten bleiben, wo die Klarstellung zu schwierig schien, das ursprünglich Einfache wird durch Umschweife dem Blick entzogen. Um nur ein Beispiel anzuführen, so ist der Begriff des Gleichgewichts eines Systems von Kräften, der doch durch die gleiche Wirkung mit Nullkraft sofort definirt sein würde, durch Bedingungen bestimmt worden, die sich auf die erfolgenden Bewegungen beziehen, Bedingungen die höchstens bei dauerndem, nicht aber bei momentanem Gleichgewicht zutreffen. Da bei Gleichgewicht der Kräfte die mannichfaltigsten Bewegungen stattfinden können, so ist es offenbar unvernünftig die Deutlichkeit des Begriffs darauf stützen zu wollen. Ueberdies liegen die Bewegungsbedingungen nicht mehr im Bereich der zu beobachtenden Wirklichkeit, wenn ausser dem System im Gleichgewicht gleichzeitig andre Kräfte wirken. Die in den früheren Auflagen des Buches von Walberer enthaltenen Irrlehren kommen freilich in der gegenwärtigen Bearbeitung nicht vor; doch zeugt es nicht von Beherrschung des Lehrstoffs von Seiten des neuen Bearbeiters, wenn jene Fehler nur am Gängelbande der analytischen Methode vermieden worden sind, und er nicht vermocht hat, die gleichen Resultate in sicherem synthetischen Lehrgange zu entwickeln. Hoppe.

---

## Tabellen.

Tafel der Bessel'schen Functionen $I_k^0$ und $I_k^1$ von $k = 0$ bis $k = 15{,}5$ berechnet von Dr. E. Meissel in Kiel. Aus den Abhandlungen der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1888. Berlin 1889. Georg Reimer. 4°. 23 S.

Die Tafel ist eine Erweiterung der Bessel'schen Tafel für die Functionen

$$I_k{}^0 = 1 - \frac{k^2}{2^2} + \frac{k^4}{2^2.4^2} - \frac{k^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{k^8}{2^4.4^2.6^4.8^2} - \ldots$$

$$-I_k{}^1 = -\frac{k}{2} + \frac{k^3}{2^2.4} - \frac{k^5}{2^2.4^2.6} + \frac{k^7}{2^2.4^2.6^2.8} - \ldots$$

in den Abhandlungen der Akademie vom Jahre 1824. Sie gibt innerhalb der genannten Grenzen für die Hundertel von $k$ die Werte beider Functionen auf 12 Bruchstellen. H.

Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen nebst einem Anhange enthaltend die Theorie der Hyperbelfunctionen. Von Dr. W. Ligowski, Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie und Schule in Kiel. Berlin 1890. Ernst u. Korn. 104 S.

Die Haupttafel gibt die Werte der brigg'schen Logarithmen der Functionen $\mathfrak{Sin}\,\psi = \frac{1}{2}(e^\psi - e^{-\psi}) = \mathrm{tg}\,\varphi$, $\mathfrak{Cos}\,\psi = \frac{1}{2}(e^\psi + e^{-\psi}) = \sec\varphi$ und die Werte der vermittelnden Function $\varphi$ entsprechend der Relation $e^\psi = \mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{R}+\varphi}{2}$ für jedes $\psi$ von 0 bis 12. Die Detaillirung der $\psi$ geht bis $\psi = 2$ auf Tausendtel, dann bis $\psi = 9$ auf die Hunderttel, von da auf Ganze. Die Logarithmen sind bis $\psi = 2$ fünfstellig, von da bis $\psi = 5$ sechsstellig, von da bis $\psi = 8$ siebenstellig, weiterhin zehnstellig. Die $\varphi$ sind bis $\psi = 6$, die Differenzen bei allen Functionen angegeben. Diese Haupttafel ist mit vielen kleinern Tafeln verbunden, welche zur Erleichterung des Rechnens mit hyperbolischen Functionen dienen. In der Einleitung ist der Gebrauch der Tafeln erläutert, der Anhang enthält die Theorie der hyperbolischen Functionen. In der Berechnung von Tafeln dieser Functionen war namentlich Gudermann vorausgegangen; das Nähere darüber ist im Vorwort ausgesprochen. H.

Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres 1 à 12000 suivies des mêmes tables à quatre décimales et de diverses tables et formules usuelles. Paris 1889. Imprimerie Nationale.

Die gegenwärtigen Tafeln sind im Auftrage des Kriegsministers von der geodätischen Section des Service géographique unter der Leitung des Oberst-Lieutenants Bassot zusammengestellt aus den bis jetzt ungedruckten, von Prony berechneten 14stelligen Tafeln. Hiermit ist erst ein Teil des Auftrags erfüllt, dieselben Tafeln sollen auch 8stellig herausgegeben werden; ihr Erscheinen in diesem Jahre

ist angekündigt. Es ist erkannt worden, dass die schon längst vergriffenen 7 stelligen logarithmisch trigonometrischen Tafeln von Borda für Decimalteilung des Quadranten einen Ersatz haben müssen, und dass überdies 7 Stellen dem Bedürfniss noch nicht genügen. Dies zu erwartende Werk ist es also, was über das Bestehende hinausgeht, und was in den vorhandenen Hülfsmitteln des Rechnens eine längst empfundene Lücke auszufüllen verspricht. Der jetzt erschienene Teil tritt, wie in die Augen fällt, mit einem unerwünschten Uebermass auf: wir brauchen nicht in einem Bande vereinigt 5 und 4 stellige Tafeln, noch weniger solche für Decimal- und Sexagesimalteilung. Hoffentlich wird das grössere Volum der 8 stelligen Tafeln die Herausgeber bestimmen die Tafeln für Decimalteilung gesondert erscheinen zu lassen. Dagegen ist eine Erleichterung der Interpolation sehr wünschenswert. Die grössenteils 4 stelligen Differenzen bei Borda, welche hier zu 5 stelligen werden würden, nehmen einen grossen Raum ein, der sich füglich für engere Argumentfolge verwenden liesse. H.

Table des quarts de carrés de tous les nombres entiers de 1 à 200 000, servant à simplifier la multiplication, l'élévation au carré ainsi que l'extraction de la racine carrée et à rendre plus certains les résultats de ces opérations, calculée et publiée par Joseph Blater. Avec la collaboration de M. A. Steinhauser, Conseiller royal- impérial à Viennes. Paris (1889). Gauthier-Villars.

Das Product zweier Zahlen lässt sich nach der Formel

$$pq = \tfrac{1}{4}(p+q)^2 - \tfrac{1}{4}(p-q)^2$$

als Differenz zweier Werte einer Function eines Arguments darstellen. Die vorliegende Tafel gibt diese Function und ersetzt hiermit je eine Multiplication durch eine Addition, 2 Subtractionen und zweifaches Nachschlagen. Sie unterscheidet sich von ihren Vorgängern durch grössere Ausdehnung und compendiösere Einrichtung.

H.

---

## Vermischte Schriften.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Derde reeks. Vijfde deel. Amsterdam 1889. Johannes Müller.

Der 5. Teil enthält folgende mathematische Abhandlungen.

G. Schouten: Die Regel für die Bahnform und die Eigenschaften der Centralbewegung graphisch dargestellt. — Allgemeine Eigenschaften der reinen rollenden Bewegung eines Rotationskörpers auf horizontaler Ebene angewandt auf die Bewegung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt seiner Axe.

P. H. Schoute: Der lineare Complex (I. 1).

Jan de Vries: Ueber ebene Configurationen. — Ueber die harmonischen Configurationen ($24_3$, $18_4$).

V. A. Julius: Ueber die vibrirende Bewegung einer deformirten Flüssigkeitskugel.

J. A. C. Oudemann: Untersuchung der Bedingung, unter der im Doppelbildmikrometer von Airy der Wert einer schraubenumlaufenden Unabhängigen von der Accommodation des Auges kommt.

P. H. Dojes: Ueber einige Formeln, die sich auf die durch Druck- und Temperaturveränderungen bewirkten Veränderungen in der Zusammensetzung von Lösungen beziehen.

F. J. van den Berg: Die Constructionsfigur für die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, als Configuration betrachtet. — Einige Formeln für die Berechnung der bernoullischen Zahlen und der Tangentencoefficienten.

C. H. C. Grinwis: Die Energie des kugelförmigen Condensators.

J. Cardinaal: Geometrische Theorie der windschiefen Flächen 4. Ordnung. H.

# Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXVI.

---

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch der Erfindungen u. Fortschritte auf den Gebieten der Physik u. Chemie, der Technologie u. Mechanik, der Astronomie u. Meteorologie. Hrsg. v. H. Gretschel u. G. Bornemann. 25. Jahrg. Leipzig, Quandt & H. 6 Mk.

Fink, E., Kant als Mathematiker. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk.

### Methode und Principien.

Zimmermann, W. F. A., Naturkräfte u. Naturgesetze. 4. Afl. Bearb. u. hrsg. v. B. Dürigen. 30. u. 31. Lfg. Berlin, Dümmler's Verl. à 50 Pf.

### Lehrbücher.

Boyman, J. R., Lehrbuch der Mathematik f. Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. 3. Theil. Arithmetik. 7. Afl. besorgt von C. Werr. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.

Lieber, H., u. F. v. Lühmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik. 2. Thl. Arithmetik. 4. Afl. Berlin, Simion. 1 Mk. 25 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

Maier, A., Vorschule der Mathematik. Karlsruhe, Bielefeld. 1 Mk.

Mehler, G., Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien u. Realgymnasien. 16. Afl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

### Sammlungen.

Adam, W., 1500 Aufgaben aus der Buchstabenrechnung u. Algebra m. vollständigen Berechnungen. 2. Afl. Gera, Hofmann. 4 Mk. 40 Pf.; geb. 5 Mk.

Brockmann, F. J., planimetrische Konstruktionsaufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Gerke's, R., Aufgabensammlung aus der darstellenden Geometrie. 40 (autogr.) Taf. m. 350 Fig. 2. Afl. Hrsg. v. G. Schönermark. Fol. Hannover, Cruse's B. Kart. 6 Mk.

Heuner, F., Aufgabensammlung zum Rechenunterrichte. 7. Afl. Ansbach, Seybold. 1 Mk. 20 Pf.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

— Ergebnisse zum 6. u. 7. Hft. Oberklasse. Asg. f. Lehrer. 4. Afl. 60 Pf.

Hoffmann, J., u. J. Klein, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. 9. Afl. Düsseldorf, Schwann. 1 Mk.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst etc. 568.—607. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Kniess, K., u. O. Bachmann, Aufgabensammlung f. das Rechnen m. bestimmten Zahlen, bearb. unter besond. Berücksicht. d. f. Lateinschulen vorgeschrieb. Lehrpensums. Resultate. München, Kellerer. 80 Pf.

Krauth, Th., Aufgaben-Sammlung f. das gewerbliche Rechnen. Für Gewerbeschulen u. gewerbl. Fortbildungsschulen. 2. Afl. Schüler-Asg. Karlsruhe, Bielefeld. 40 Pf.

Láska, W., Sammlung von Formeln der reinen u. angewandten Mathematik. 3. Lfg. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk.

Matek, B., Resultate zur Aufgabensammlung in Močnik's Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra f. die oberen Klassen der Mittelschulen. Wien, C. Gerold's S. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Reich, A., die Hauptlehren der Mathematik m. e. Sammlung ausführlich gelöster u. Anhängen ungelöster Aufgaben m. ihren Resultaten. (In ca. 90 Lfgn.) 1.—9. 25.—47. Lfg. Hanau, Reich. à 25 Pf.

Sachse, J. J., Uebungsbuch f. e. praktischen, geistbildenden u. erziehlichen Rechenunterricht. 1. u. 2. Hft. 3. Afl. Osnabrück, Wehberg. 55 Pf.

Särchinger, E., u. V. Estel, Aufgabensammlung f. den Rechenunterricht in den Unterklassen der Gymnasien. 2. u. 3. Hft. Leipzig, Teubner. Kart. 1 Mk. 80 Pf.

Schmehl, Ch., Rechenbuch f. höhere Lehranstalten. 1. Thl. Das Rechnen m. ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen u. Decimalbrüchen. Giessen, Roth, Verl. 1 Mk. 40 Pf.

Stockmayer, H., M. Fletscher u. G. Thomass, Aufgaben f. den Rechenunterricht in den mittleren Klassen der Gelehrtenschulen etc. 1. Bdchn. 4. Afl. Heilbronn, Scheurlen's Verl. Kart. 80 Pf.

— Dasselbe. 2.—4. Bdchn. 5. Afl. Ebd. Kart. 2 Mk. 25 Pf.

Waldvogel, J., Uebungen aus dem mathematischen Repetitionsstoffe der Obergymnasialklasse. 1. Thl. Aschaffenburg, Krebs. 1 Mk. 20 Pf.

## Tabellen.

Bruhns, C., neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen. 3. Afl. Leipzig, B. Tauchnitz. 4 Mk. 20 Pf.

Ligowski, W., Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen, nebst e. Anh., enth. die Theorie der Hyperbelfunktionen. Berlin, Ernst & K. 5 Mk.; geb. 6 Mk.

Weisbach, J., Tafel des vielfachen Sinus u. Cosinus, sowie der vielfachen Sinus versus v. kleinen Winkeln, nebst Tafel der einfachen Tangenten, zum Gebrauche f. prakt. Geometer u. Mechaniker überhaupt u. f. Markscheider besonders. 4. Afl. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

## Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Abel, N. H., u. E. Galois, Abhandlungen üb. die algebraische Auflösung der Gleichungen. Deutsch hrsg. v. H. Maser. Berlin, Springer. 4 Mk.

Büttner, A., die Elemente der Buchstabenrechnung u. Algebra. 9. Afl. Bielefeld, Velhagen & Kl. 2 Mk. 80 Pf.

Cavan, K., methodische Behandlung der Anfangsgründe der Buchstabenrechnung. Ems, Sommer. 1 Mk.

Gegenbauer, L., Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der aus den 4. Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Kleyer, A, Lehrbuch der Integralrechnung. Integralrechnung I: Die Integration von Differentialfunktionen v. der allgemeinen Curve $f(x).\partial x$. 1. Thl. Stuttgart, J. Maier. 10 Mk.

Lübsen, H. B., Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (Differential- u. Integralrechnung) zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Nothwendigste u. Wichtigste. 7. Afl. Leipzig, Brandstetter. 8 Mk.

Prange, O., Lehrbuch d. Gleichungen des 1. Grades m. mehreren Unbekannten. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 7 Mk.

Schick, E., Katechismus der praktischen Arithmetik. 3. Afl. bearb. v. M. Meyer. Leipzig, J. J. Weber. Geb. 3 Mk.

Study, E., Methoden zur Theorie der ternären Formen. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Thomae, J., Abriss e. Theorie der Functionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunctionen. 3. Afl. Halle, Nebert's Verl. 10 Mk.

Tschebyscheff, P. L., Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie). Deutsch hrsg. v. H. Schapira. Berlin, Mayer & M. 7 Mk.

## Geometrie.

Ameseder, A., die Quintupellage collinearer Räume. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

— Theorie der cyklischen Projectivitäten. Ebd. 50 Pf.

Bobek, K., üb. die Steiner'schen Mittelpunktskurven. II. u. III. Mittheilg. Leipzig, Freytag. 80 Pf.

Bützberger, ein m. der Theorie algebraischer Flächen zusammenhängendes planimetrisches Problem. Bern, Jent & R. 80 Pf.

Dietsch, Ch., Leitfaden der darstellenden Geometrie. 2. Afl. Leipzig, Deichert. 2 Mk.

Döhlemann, K., Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. München, Th. Ackermann, Verl. 1 Mk.

Heilermann, H., u. J. Dieckmann, Grundlehren der Trigonometrie u. Stereometrie. 1. Thl. Ebene Geometrie. Essen, Bädeker. 40 Pf.

Koch, K., Lehrbuch der ebenen Geometrie. Nach neuen Grundsätzen bearb. 1. Thl. Ravensburg, Dorn. 1 Mk.

Kröger, M., Leitfaden f. den Geometrie-Unterricht in Mittelschulen u. gehobenen Volksschulen. 4. Afl. Hamburg, Meissner's Verl. 1 Mk.

Krumme, W., der Unterricht in der analytischen Geometrie. Für Lehrer u. zum Selbstunterricht. Braunschweig, Salle. 6 Mk. 50 Pf.

Lauermann, C., zum Normalproblem der Ellipse. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Lötzsch, C., Geometrie in konzentrisch erweiterten Kursen. 6. Afl. 2. Kurs. Mittweida, Polytechn. Buchh. 1 Mk.

Mertens, F., zum Normalproblem der Kegelschnitte. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Mink's Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene u. des Raumes f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. 2. Afl. v. E. W. Fiedler. Berlin, Nicolai'sche Verl.-Buchh. 1 Mk.

Müller, C., zeichnende Geometrie. 4. Afl. Esslingen, Mayer. Geb. 2 Mk. 40 Pf.

Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. 1. Thl. 1. Hft. Die gradlinigen Figuren u. der Kreis. Mit Uebungen. 3. Afl. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 60 Pf.

Nöther, M., zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curven 4. Ordnung. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 50 Pf.

**Ostwald's** Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 5. Allgemeine Flächentheorie [Disquisitiones generales circa superficies curvas] v. C. F. Gauss. Deutsch hrsg. v. A. Wangerin. Leipzig, Engelmann. Geb. 80 Pf.

**Pick**, G, üb. Raumcurven 4. Ordnung 1. Art und die dazu gehörigen elliptischen Functionen. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

**Sauerbeck**, P. J., üb. die Raumcurven 6. Ordnung m. 4 wirklichen Doppelpunkten. Tübingen, Franz Fues 1 Mk. 20 Pf.

**Uth**, K., Leitfaden f. den Unterricht in der Planimetrie. 4. Afl. Cassel, Hühn. Geb. 1 Mk. 80 Pf.

**Wiegand's** Lehrbuch der Planimetrie. 1. Kurs. bearb. v. F. Meyer. 20. Afl. Halle, H. W. Schmidt's Verl. 1 Mk.

— Dasselbe. 1. Kurs. Für Gymnasien, Real- u. Bürgerschulen u. zum Gebrauche f. Hauslehrer bearb. v. F. Meyer. 21. Afl. Asg. in österreich. Orthographie. Ebd. 1 Mk.

### Trigonometrie.

**Netzhammer**, R., Lehrbuch der ebenen u. sphärischen Trigonometrie nebst e. Sammlung v. Uebungsaufgaben, zum Gebrauche an Gymnasien. Paderborn, F. Schöningh. 2 Mk. 80 Pf.

**Roese**, F., Grundriss der ebenen Trigonometrie. Wismar, Hinstorff, Verl. 75 Pf.

### Praktische Geometrie, Geodäsie.

Auszug aus den Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der Landesaufnahme. VI. Hft. Provinz Ost- u. Westpreussen, angrenzende Landestheile u. die Insel Rügen. Berlin, Mittler & S. 2 Mk.

**Reich**, A., die geodätischen Rechnungen u. ihre mathemat. Grundlagen. 1 Thl. Vorstudien. Hanau, Reich. 11 Mk.

### Mechanik.

**Klimpert**, R, Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geo-Dynamik). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 13 Mk. 50 Pf.

— Lehrbuch üb. die Percussion od. den Stoff fester Körper. Ebd. 3 Mk.

**Salcher**, P., u. J. **Whitehead**, üb. den Ausfluss stark verdichteter Luft. Leipzig, Freytag. 80 Pf.

**Voigt**, E., elementare Mechanik als Einleitg. in das Studium der theoretischen Physik. Leipzig, Veit & Co. 12 Mk.

## Technik.

Thomson, S. P., die dynamoelektrischen Maschinen. 2. Afl., übers. v. C. Grawinkel. 5. Hft. Halle, Knapp. 4 Mk.

Urbanitzky, A. v., die elektrische Beleuchtung u. ihre Anwendung in der Praxis. 2. Afl. Wien, Hartleben. 4 Mk.; geb. 4 Mk. 80 Pf.

## Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. d. Spectren der Elemente. 2. Abschn. Berlin, G. Reimer. Kart. 4 Mk.

## Erd- und Himmelskunde.

Bebber, W. J. van, Beitrag zur Kenntniss der täglichen Periode der Windgeschwindigkeit an unserer Küste. Leipzig, Engelmann. 50 Pf.

— Lehrbuch der Meteorologie f. Studierende u. zum Gebrauche in der Praxis. Stuttgart, Enke. 10 Mk.

Bibliothek, internationale wissenschaftliche. 68. Bd. Die wichtigsten periodischen Erscheinungen der Meteorologie u. Kosmologie. Von H. Fritz. Leipzig, Brockhaus. 7 Mk.; geb. 8 Mk.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb v. W. Meyer u. B. Schwalbe. 11. Afl. 3.—7. Lfg. Berlin, Emil Goldschmidt. à 60 Pf.

Hayn, F., Bahn-Bestimmung d. Cometen 1862 III. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk. 80 Pf.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1887. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse d. meteorolog. Beobachtungen im J. 1887. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. Berlin, Asher & Co. 22 Mk.

— Dasselbe f. 1889. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1889. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 1. Hft. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, 1889. Bayern. Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königr. Bayern, hrsg. v. der königl. meteorolog. Central-Station durch C. Lang u. F. Erk. 11. Jahrg. 1889. 2. Hft. München, Th. Ackermann, Verl. prcplt. 18 Mk.

— Dasselbe. Jahrg. 1888. Württemberg. Mittheilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. L Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 2 Mk. 80 Pf.

Israel-Holtzwart, K., Elemente der theoretischen Astronomie f. Studierende. Neue Asg. Wiesbaden, Bergmann. 16 Mk.

Láska, W., Lehrbuch der sphärischen u. theoretischen Astronomie u. der mathematischen Geographie. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Meyer, M. W., die Lebensgeschichte der Gestirne in Briefen an e. Freundin. Eine populäre Astronomie der Fixsterne. 2. Afl. Jena, Manke's Verl. 4 Mk.; geb. 5 Mk.

Miethe, A., zur Actinometrie astronomisch-photographischer Fixsternaufnahmen. Rostock, Volckmann. 1 Mk.

Mischpeter, E., Beobachtungen der Station zur Messung der Temperatur der Erde in verschiedenen Tiefen im botan. Garten zu Königsberg. Königsberg, Koch. 90 Pf.

Plassmann, vademecum astronomi. Vollständige Sternkarte für das nördliche u. mittlere Europa. gr Fol. (1 lith. Blatt m. 4 stummen Karten z. Einzeichnen u. Text.) Paderborn, F. Schöningh. In Mappe 3 Mk.

Pfeil, L. Graf v., üb. Erdbeben u. Seebeben. Leipzig, Ed. H. Mayer. 50 Pf.

Sternkarte, drehbare. Der Sternhimmel zu jeder Stunde des Jahres. Asg. f. Mitteleuropa. 7. Afl. Asg. A. Chromolith. Frankfurt a/M., Deutsche Lehrm.-Anstalt. 1 Mk. 25 Pf.

Verhandlungen der vom 17.—23. Septbr. 1888 in Salzburg abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Red. v. A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 24. Jahrg. 1889. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. Alphabet. Inhaltsverzeichniss zu Bd. 1—17. Stuttgart, Wittwer's Verl. 1 Mk. 50 Pf.

## Nautik.

Döring, W, der blaue Junge. — Das Loth. Resultate der zehnjähr. Untersuchg. v. Seeunfällen. Oldenburg, Schulze. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 50 Pf.

## Physik.

Behn-Eschenburg, H., Untersuchungen üb. das Giltay'sche Eisenelektrodynamometer. Zürich, Müller's Verl. 2 Mk.

Clausius, R., die mechanische Wärmetheorie. 2. Afl. der „Abhandlungen üb. die mechan. Wärmetheorie". 3. Bd. Entwickelungen der besonderen Vorstellgn. v. der Natur der Wärme als e.

Art der Bewegg. Hrsg. v. M. Planck u. C. Pulfrich. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk. 20 Pf.

Echo, elektrotechnisches. Red.: M. Krieg. Jahrg. 1889. 40. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk.

Eiben, C. E., Physikstunden, angeschlossen an die Erscheinungen d. täglichen Lebens. Hannover, Meyer. 1 Mk. 60 Pf.; kart. 1 Mk. 80 Pf.

Fischer, H. L., Versuch e. Theorie d. Berührungs-Elektricität. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk. 60 Pf.

Hertz, H., üb. die Beziehungen zwischen Licht u. Elektricität. Ein Vortrag. Bonn, Strauss, Verl. 1 Mk.

Heussi, J., Lehrbuch der Physik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Bildungsanstalten. 5. Afl. Neue Asg. Braunschweig, Salle. 4 Mk. 20 Pf.

Hübl, A. Frhr. v., u. A. v. Obermayer, üb. einige elektrische Entladungserscheinungen u. ihre photographische Fixierung. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 107.—112. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Koller, H., üb. den Durchgang v. Elektricität durch sehr schlechte Leiter. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 20 Pf.

Krebs, A., Lehrbuch der Inductionselektricität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Reis, P., Elemente der Physik, Meteorologie u. mathematischen Geographie. Hilfsbuch f. den Unterricht an höheren Lehranstalten. Mit zahlreichen Uebungsfragen u. -Aufgaben. 4. Afl. Leipzig, Quandt & H. 4 Mk. 50 Pf.

Waeber, R., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik m. besond. Berücksicht der Meteorologie. 6. Afl. Leipzig, Hirt & S. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. den physikalischen u. chemischen Unterricht. Unter der besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. B. Schwalbe. Hrsg. v. F. Poske. 3. Jahrg. 1889/90. 1. Hft. Berlin, Springer. preplt. 10 Mk.

## Vermischte Schriften.

Abhandlungen der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem J. 1888. Mathematische. Berlin, G. Reimer. 2 Mk.

— Dasselbe. Physikalische. 2 Thle. Ebd. Kart 36 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 55. Bd. Leipzig, Freytag. 54 Mk. 80 Pf.

---

## INHALT.



Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

